ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 4, N° 2 (1979)

SUR L'EXISTENCE DE SECTIONS SÉPARÉMENT MESURABLES ET SÉPARÉMENT ABSOLUMENT CONTINUES D'UNE APPLICATION MULTIVOQUE. APPLICATIONS AUX EQUATIONS INTÉGRALES MULTIVOQUES

PHAN VĂN CHƯƠNG
Institut de Mathématiques, Hanoï

§ 0. PRÉLIMINAIRES

Cet article se compose de deux parties. Dans la première partie on établit un résultat sur l'existence de sections séparément mesurables et séparément absolument continues d'une application multivoque. Ce résultat est utilisé dans la deuxième partie pour obtenir un théorème d'existence des solutions des équations intégrales multivoques de la forme

$$x(t) \in b(t) + \int_0^t \Gamma(t, \tau, x(\tau)) d\tau \tag{0.1}$$

où $t \in I = [0,T] \subset R^1$, $b : I \to I$,

$$\Gamma : \triangle \times E' \to 2^{E'},$$

$\triangle$ étant l'ensemble $\{(t, \tau) \in I^2,\ \tau \leqslant t\}$, E' étant le dual d'un espace de Banach séparable.

Faisant usage du résultat de la première partie, on obtient ensuite une variante du théorème de dépendance continue des solutions vis à vis du paramètre.

L'équation (0.1) est une forme généralisée des équations intégrales auxquelles se réduisent les équations différentielles considérées dans les problèmes de contrôle optimal.

Le problème d'existence des solutions des équations différentielles multivoques a été considéré dans de nombreux travaux ([1]—[5]). L'existence des solutions globales de telles équations sous des hypothèses diverses, a été établie dans [3] — [5]. Quant à l'existence des solutions globales des équations intégrales multivoques, il n'existe jusqu'ici à notre connaissance, qu'un résultat dans le cas de dimension finie pour des équations d'un type spécial [12](*) et un résultat pour le cas de dimension infinie obtenu par l'auteur [13].

(*) Ce résultat m'a été siganalé par Mr. le Prof. Ch. Castaing, après que cet article avait été préparé.

Soient E un espace de Banach, E' son dual.

On désigne par

$\|.\|$, la norme dans E'.

$\delta(A, B)$, la distance de Hausdorff des parties fermées A, B de E', associée à la norme $\|.\|$.

E'_w, l'espace E' muni de la topologie $\sigma(E', E)$,

$B(x, r)$, la boule dans E' de centre x et de rayon r,

$B_r = B(0, r)$,

$\langle \eta, \sigma \rangle$, la valeur de $\sigma \in E'$ en $\eta \in E$.

Rappelons dans ce qui suit quelques notions connues qu'on pourrait trouver dans [5].

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On appelle la *μ-complèté* et désigne par $\mathcal{A}_\mu$, la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et les parties M de Ω de la forme: $M \subset N$, $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$.

Tout $A \in \mathcal{A}_\mu$ est dit *μ-mesurable*. Si $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est *μ-complète*.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. La tribu complètée $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ est, par définition, celle de toutes les parties de Ω qui sont μ-mesurables pour toute mesure $\mu \geqslant 0$, finie, définie sur $\mathcal{A}$. Une tribu $\mathcal{A}$ est dite complète, si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$.

Si Ω est un espace topologique, il peut être considéré comme un espace mesurable, muni de la tribu de toutes les parties boréliennes de Ω, laquelle est désignée par $\mathcal{B}(\Omega)$.

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables. Une application f de Ω_1 dans Ω_2 est dite $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-mesurable, si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ pour tout $B \in \mathcal{A}_2$. Si, de plus, Ω_2 est un espace topologique, on dit parfois « $\mathcal{A}_1$-mesurable » au lieu de « $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}(\Omega_2))$-mesurable ». Si, de plus, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ est un espace mesuré, on dit parfois « μ-mesurable » au lieu de « $(\mathcal{A}_{1\mu}, \mathcal{B}(\Omega_2))$-mesurable ».

Si Ω_1, Ω_2 sont des espaces topologiques séparés, où Ω_2 est uniformisable, on désigne par $\mathcal{C}(\Omega_1, \Omega_2)$ l'espace de toutes les applications continues de Ω_1 dans Ω_2, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts de Ω_1.

Soient Ω un espace compact métrisable, muni d'une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$, E un espace de Banach. On désigne par $\mathcal{L}^1_E(\Omega, \mu)$ l'espace de toutes les applications μ-intégrables de Ω dans E, par $\mathcal{L}^\infty_{E'_w}(\Omega, \mu)$ l'espace de toutes les applications μ-mesurables de Ω dans E'_w, à valeurs μ-presque partout dans les parties équicontinues de E'. Les quotients de $\mathcal{L}^1_E(\Omega, \mu)$ et de $\mathcal{L}^\infty_{E'_w}(\Omega, \mu)$ par la relation d'égalité μ-presque partout seront désignés respectivement par $L^1_E(\Omega, \mu)$ et $L^\infty_{E'_w}(\Omega, \mu)$. On sait que ce sont des espaces de Banach et que le dual de $L^1_E(\Omega, \mu)$ est $L^\infty_{E'_w}(\Omega, \mu)$ ([9]).

On utilise toujours les mêmes notations pour une application (famille d'applications) μ-mesurables de Ω dans E'_W et pour ses classes d'équivalence μ-presque partout.

On désigne par $\mathcal{B}^r_\Omega$ l'ensemble de toutes les applications appartenant à $\mathcal{L}^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu)$, à valeurs μ-presque partout dans les parties équicontinues de E'.

Dans toute la suite, *l'espace* $L^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu)$ *est toujours muni de la topologie faible* $\sigma(L^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu), L^1_E(\Omega, \mu))$.

§ 1. SUR L'EXISTENCE DE SECTIONS SÉPARÉMENT MESURABLES ET SÉPARÉMENT ABSOLUMENT CONTINUES D'UNE APPLICATION MULTIVOQUE.

Théorème 1. Soient Ω un espace compact métrisable, μ une mesure de Radon positive, définie sur Ω, E un espace de Banach séparable, $I = [0, T] \subset R^1_+$, $G : I \times \Omega \times E' \to 2^{E'}$ à valeurs convexes compactes non vides dans E'_W, telle qu'il existe un nombre $r > 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, et pour tout $x \in E'$, $G(0, \omega, x)$ soit contenue dans B_r.

On suppose que:

1) il existe une fonction $p(t) \geqslant 0$ μ-intégrable sur I telle que pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $x \in E'$ on ait

$$\delta(G(t'', \omega, x), G(t', \omega, x)) \leqslant \int_{t'}^{t''} p(s)\, ds$$

$$(\forall t', t'' \in I, \ t' \leqslant t'')$$

2) pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in E'$ la fonction $\omega \mapsto \sup\limits_{\sigma \in G(t,\omega,x)} \langle \eta, \sigma \rangle$ est μ-mesurable pour tout $\eta \in E$.

3) pour tout $t \in I$ et pour tout $\omega \in \Omega$ l'application multivoque $x \mapsto G(t,\omega,x)$ est semicontinue supérieurement dans E'_W.

Alors, pour toute application $x(.) : \Omega \mapsto E'_W$ μ-mesurable, il existe une application $\sigma(.,.)$ de $I \times \Omega$ dans E' de la forme

$$\sigma(t, \omega) = \sigma^{(0)}(\omega) + \int_0^t p(s) f(s, \omega)\, d\mu \tag{1.1}$$

avec $f(.,\ ) \in \mathcal{B}^1_{I \times \Omega}$, telle que pour tout $t \in I$ on ait $\sigma(t, \omega) \in G(t, \omega, x(\omega))$ pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si, de plus, l'application $x \mapsto G(0, \omega, x)$ est semicontinue inférieurement dans E'_W pour tout $\omega \in \Omega$, on peut choisir $\sigma(.,.)$ telle que $\sigma(0, \omega)$ coïncide avec une application μ-mesurable donnée $\sigma^{(0)}(\omega)$, telle que $\sigma^{(0)}(\omega) \in G(0, \omega, x(\omega))$ sur Ω μ-presque partout.

Pour démontrer le théorème, on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 1.1. Soient Ω un espace compact métrisable, muni d'une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$, $I = [0,T] \subset R^1_+$, E un espace de Banach séparable. Alors:

$$\mathscr{X}_{I;\Omega} = \left\{ t \mapsto \sigma_f(t, .), \ \sigma_f(t, \omega) = \int_0^t p(s) f(s, \omega) ds, \ f \in \mathscr{B}^1_{I\times\Omega} \right\}$$

est une partie compacte métrisable de $\mathscr{C}(I, L^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu))$.

La démonstration de ce lemme est contenue dans celle du Théorème dans [7].

Lemme 1.2. Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable, Y un espace polonais, $z_0(.) : \Omega \to Y$ $\mathscr{A}$-mesurable, $\Phi : \Omega \to 2^Y$ une application multivoque mesurable ([5]). Alors, la fonction $\omega \mapsto d(z_0(\omega), \Phi(\omega))$ est $\mathscr{A}$-mesurable, d étant une distance qui fait de Y un espace métrique complet homéomorphe à Y.

Démonstration.

Il existe, d'après [5], une suite d'applications étagées, $\mathscr{A}$-mesurables, $\{z_m(.)\}_{m=1}^\infty$, telles que $z_m(\omega) \to z_0(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Comme pour tout y, la fonction $\omega \mapsto d(y, \Phi(\omega))$ est $\mathscr{A}$-mesurable([5]) on voit immédiatement que pour tout m, la fonction $\omega \mapsto d(z_m(\omega), \Phi(\omega))$ est $\mathscr{A}$-mesurable. Donc, la fonction de ω, $d(z_0(\omega), \Phi(\omega)) = \lim\limits_{m \to \infty} d(z_m(\omega), \Phi(\omega))$ est $\mathscr{A}$-mesurable.

Lemma 1.3. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie, $\mathscr{A}\mu$-complète, S un espace souslinien, Y un espace polonais, $\Gamma : \Omega \times S \to 2^Y$ une application multivoque à valeurs dans les parties fermées de Y telle que pour tout $x \in S$, $\Gamma(., x)$ soit $\mathscr{A}$-mesurable, pour tout $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega, .)$ soit semi-continue inférieurement, et soit $\left\{ x_n(.) : \Omega \to S \right\}_{n=1}^\infty$ une suite d'applications étagées, $\mathscr{A}$-mesurables convergeant μ-presque partout vers une application $x_0(.) : \Omega \to S$.

Soit $y_0(.)$ une application donnée $\mathscr{A}$-mesurable de Ω dans Y telle que $y_0(\omega) \in \Gamma(\omega, x_0(\omega))$ μ-presque partout.

Alors, il existe une suite d'applications $\left\{ y_n(.) \right\}_{n=1}^\infty$ $\mathscr{A}$-mesurables, convergeant vers $y_0(.)$ μ-presque partout telle que pour tout n, on ait $y_n(\omega) \in \Gamma(\omega, x_n(\omega))$.

Démonstration.

D'après le lemme 1.2, pour tout $x \in S$, la fonction $\omega \mapsto \varphi_x(\omega) = d(y_o(\omega), \Gamma(\omega, x))$ est $\mathcal{A}$-mesurable. Comme les $x_n(.)$ sont étagées $\mathcal{A}$-mesurables, les $\varphi_n(\omega) = d(y_o(\omega), \Gamma(\omega, x_n(\omega)))$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Remarquons ensuite que si $y_o(.) : \Omega \to Y$ est $\mathcal{A}$-mesurable et $r(\omega) \geqslant 0$ est $\mathcal{A}$-mesurable, alors l'application multivoque:

$$\omega \mapsto B(y_o(\omega), r(\omega)) = \{y \in Y : d(y, y_o(\omega)) \leqslant r(\omega)\}$$

est de graphe dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$. En effet, la fonction $\omega \mapsto r(\omega) - d(y, y_o(\omega))$. étant $\mathcal{A}$-mesurable en ω pour tout $y \in Y$ et continue en y pour tout $\omega \in \Omega$, est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$ – mesurable ([5]).

Donc

$$\{(\omega, y) \in \Omega \times Y : d(y, y_o(\omega)) - r(\omega) \leqslant 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y).$$

Comme pour tout n, $x_n(.)$ est étagée $\mathcal{A}$-mesurable, d'après ce qu'on a remarqué, on voit aisément, d'après les hypothèses du lemme, que chaque application multivoque $F_n : \omega \mapsto \mathcal{B}\left(y_o(\omega), \varphi_n(\omega) + \frac{1}{n}\right) \cap \Gamma(\omega, x_n(\omega))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (qui prend des valeurs nonvides d'après la définition des fonctions $\varphi_n(.)$) est de graphe dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$. En vertu du théorème connu de Neumann — Aumann ([5])), pour chaque nF_n admet une section $y_n(.)$ $\mathcal{A}$-mesurable

Comme $y_o(\omega) \in \Gamma(\omega, x_o(\omega))$ et $x_n(\omega) \to x_o(\omega)$ μ-presque partout, et comme, pour chaque $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega,.)$ est semicontinue inférieurement, il est clair que $\varphi_n(\omega) \to 0$ μ-presque partout. On a donc $d(y_n(\omega), y_o(\omega)) \leqslant \varphi_n(\omega) + \frac{1}{n} \to 0$ μ-presque partout.

Démonstration du Théorème 1.

Comme E'_W est un espace lusinien, il existe une suite d'applications étagées μ-mesurables $\{x_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ de Ω dans E'_W convergeant ponctuellement vers $x(\omega)$ (cf [6], [7]).

On peut aisément vérifier que pour tout n, l'application multivoque $(t, \omega) \mapsto G(t, \omega, x_n(\omega))$ satisfait à toutes les conditions du théorème sur l'existence des sections séparément mesurables et séparément absolument continues dû à Castaing ([7]). En vertu de ce théorème, il existe donc pour chaque n, une application $\sigma_n(.,.)$ de la forme

$$\sigma_n(t, \omega) = \sigma_n^{(o)}(\omega) + \int_o^t p(s) f_n(s, \omega)\, ds \tag{1.2}$$

où $f_n(.,.) \in \mathcal{B}^1_{I\times\Omega}$, $\sigma_n^{(0)}(.)$ est une application μ-mesurable de Ω dans E'_W, telle que pour tout $t \in I$, il existe un sousensemble $N_{n,t}$ de Ω tel que $\mu(N_{n,t}) = 0$ et

$$\sigma_n(t, \omega) \in G(t, \omega, x_n(\omega)) \quad (\forall \omega \in \Omega \setminus N_{n,t})$$

D'après le lemme 1.1, on peut supposer que la suite d'applications $\{t \mapsto \eta_n(t,.)\}_{n=1}^{\infty}$, où $\eta_n(t,\omega) = \int_0^t p(s) f_n(\omega, s)\, ds$ converge dans $\mathcal{C}(I, L^{\infty}_{E'_W}(\Omega, \mu))$ vers une application $t \mapsto \eta(t,.)$. D'autre part, comme $\{\sigma_n^{(0)}(.)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}^r_\Omega$ par hypothèse et comme $\mathcal{B}^r_\Omega$ est une partie compacte métrisable de $L^{\infty}_{E'_W}(\Omega, \mu)$ on peut supposer que $\sigma_n^{(0)}(.) \to \sigma^{(0)}(.)$ dans $\mathcal{B}^r_\Omega$. Par suite, si on pose

$$\sigma(t,\omega) = \sigma^{(0)}(\omega) + \eta(t, \omega)$$

on peut supposer que la suite $\{t \mapsto \sigma_n(t,.)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers une application $t \mapsto \sigma(t,.)$ dans $\mathcal{C}(I, L^{\infty}_{E'_W}(\Omega, \mu))$.

Soit t fixé dans I. Comme $\sigma_n(t, \omega) \in G(t, \omega, x_n(\omega))$ μ-presque partout, $\sigma_n(t,.) \to \sigma(t,.)$ dans $L^{\infty}_{E'_W}(\Omega, \mu)$ et comme $x_n(\omega) \to x(\omega)$ d'après le théorème de fermeture ([5]), on a bien $\sigma(t, \omega) \in G(t, \omega, x(\omega))$ μ-presque partout.

Démontrons maintenant l'assertion supplémentaire du théorème. Soit $\sigma^{(0)}(.)$ une application μ-mesurable donnée de Ω dans E'_W telle que $\sigma^{(0)}(\omega) \in G(0, \omega, x(\omega))$ μ-presque partout. Prenons une suite d'applications étagées μ-mesurables de Ω dans E'_W convergeant ponctuellement vers $x(\omega)$. Une telle suite existe toujours puisque E'_W est un espace lusinien. En vertu de la métrisabilité et de la compacité de $B_r \subset E'_W$, d'après le lemme 1.3, il existe une suite d'applications μ — mesurables, $\left\{\sigma_n^{(0)}(.)\right\}_{n=1}^{\infty}$, convergeant vers $\sigma^{(0)}(.)$ partout telles que pour tout n, $\sigma_n^{(0)}(\omega) \in G(0, \omega, x_n(\omega))$ μ-presque partout. Pour chaque n, d'après le résultat cité de [7], il existe $f_n(.,.) \in \mathcal{B}^1_{I\times\Omega}$ telle pour chaque $t \in I$, on ait $\sigma_n(t, \omega) \in G(t, \omega, x_n(\omega))$ μ-presque partout, où $\sigma_n(t, \omega) = \sigma_n^{(0)}(\omega) + \int_0^t p(s) f_n(s,\omega)\, ds$.

On peut supposer que $f_n(.,.) \to f(...)$ dans $\mathcal{B}'_{I\times\Omega}$. Comme on a ici $\sigma_n^{(o)}(.) \to \sigma^{(o)}(.)$ dans $L^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu)$(*) si on pose

$$\sigma(t, \omega) = \sigma^{(o)}(\omega) + \int_0^t p(s) f(s, \omega) ds$$

le même argument qu'on a utilisé dans la démonstration de la première partie du théorème, montre que $\sigma_n(.,.) \to \sigma(.,.)$ dans $\mathcal{C}(I, L^\infty_{E'_W}(\Omega, \mu))$ et pour tout t fixé dans I, $\sigma(t, \omega) \in G(t, \omega, x(\omega))$ μ-presque partout.

§2. SUR L'EXISTENCE DES SOLUTIONS GLOBALES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES MULTIVOQUES.

Soit F un espace localement convexe séparé, soient

$$I = [0, T] \subset R^1_+, \qquad \Delta = \{(t,\tau) \in I^2 : \tau \leqslant t\}$$

$$\Gamma : \Delta \times F \to 2^F, \qquad b : I \to F$$

On appelle solution de l'équation

$$x(t) \in b(t) + \int_0^t \Gamma(t, \tau, x(\tau)) d\tau \tag{2.1}$$

toute application $x : I \to F$ de la forme

$$x_g(t) = b(t) + \int_0^t g(t, \tau) d\tau \tag{2.2}$$

telle que pour tout $t \in I$, $g(t, \tau) \in \Gamma(t, \tau, x_g(\tau))$ pour presque tout $\tau \in [0, t]$

Dans ce qui suit, sous des hypothèses de continuité de $b(t)$, de type de continuité séparée et de mesurabilité séparée de Γ on va établir l'existence des solutions globales continues de (2.1).

Théorème 2. Soient E un espace de Banach séparable, $\Gamma : \Delta \times E'_W \to 2^{E'_W}$ une application multivoque telle que pour tout $(t, \tau, x) \in \Delta \times E'$, $\Gamma(t, \tau, x)$ soit compact convexe nonvide dans E'_W et qu'il existe une boule $B_r \subset E'$ contenant toutes les valeurs de Γ. On suppose que:

1) il existe une fonction $p(t) \geqslant 0$ intégrable sur I telle que $\forall x \in E$, $\forall \tau$, t', $t'' \in I$, $0 \leqslant \tau \leqslant t' < t''$ on ait

$$\delta(\Gamma(t'', \tau, x), \Gamma(t', \tau, x)) \leqslant \int_{t'}^{t''} p(s) ds$$

(*) D'après le Théorème de convergence dominée, en tenant compte de l'hypothèse que $\sigma_n^{(o)}(\omega) \in G(0, \omega, x_n(\omega)) \subset B_r$.

2) $\forall t \in I$, $\forall x \in E'$, $\forall \eta \in E$ la fonction $\tau \mapsto \sup\limits_{\sigma \in \Gamma(t, \tau, x)} \langle \eta, \sigma \rangle$ est mesurable sur $[0, t]$,

3) $\forall (t, \tau) \in \Delta$ l'application multivoque $x \mapsto \Gamma(t, \tau, x)$ est semicontinue supérieurement dans E'_W,

4) $b(.) \in \mathcal{C}(I, E'_W)$.

Alors, il existe une application $t \mapsto g(t,.)$ de I dans $L^{\infty}_{E'_W}(\Omega, \mu)$ de la forme

$$g(t, \tau) = g_0(\tau) + \int_0^t p(s) f(s, \tau)\, ds$$

avec $f(.,.) \in \mathcal{B}^1_{I^2}$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $g(t, \tau) \in \Gamma(t, \tau, x_g(\tau))$ pour presque tout $\tau \in [0, t]$, où $x_g(.)$ est définie par (2.2). Par suite $x_g(.)$ est une solution de (2.1).

Lemme 2.1. Soit $\alpha : I \to I$ une fonction semicontinue supérieurement, φ: *epi* $\alpha \to \mathbf{R}$ telle que

1) $\forall \tau \in I$, $\varphi(\tau,.)$ soit continue à droite au point $t = \alpha(\tau)$,

2) $\forall t \in I$, $\varphi(., t)$, définie sur l'ensemble

$$I_t = \{\tau \in I, \alpha(\tau) \leqslant t\}$$

soit mesurable.

Alors, la fonction $\tau \mapsto \varphi(\tau, \alpha(\tau))$ est mesurable sur I.

Démonstration. Comme $\alpha(.)$ est semicontinue supérieurement, il existe une suite de fonctions étagées mesurables $\{\alpha_n(.)\}_{n=1}^{\infty}$ minorées par $\alpha(.)$ et convergeant vers $\alpha(.)$ partout sur I. Soit, pour chaque n, $\left\{ I_n^{(i)} \right\}_{i=1}^{m_n}$ la partition de I en un nombre fini de sous-ensembles mesurables tels que $\alpha_n(.)$ prenne une valeur constante $t_n^{(i)}$ sur chaque I_n^i. On a donc $\varphi(\tau, \alpha_n(\tau)) = \varphi(\tau, t_n^{(i)})$ pour tout $\tau \in I_n^{(i)}$ et comme $\alpha_n(\tau) \geqslant \alpha(\tau)$ il en résulte que $I_n^{(i)} \subset I_{t_n^{(i)}}$. On déduit alors de l'hypothèse 1) que la fonction $\tau \mapsto \varphi(\tau, \alpha_n(\tau))$ est mesurable sur chaque $I_n^{(i)}$, donc mesurable sur tout I.

Démonstration du théorème 2. Considérons l'application multivoque G définie par :

$$G(t, \tau, x) = \begin{cases} \Gamma(t, \tau, x) & \text{si } (t, \tau) \in \Delta,\ x \in E' \\ \Gamma(\tau, \tau, x) & \text{si } (t, \tau) \in I^2 \setminus \Delta,\ x \in E' \end{cases} \tag{2.4}$$

Vérifions les hypothèses du théorème 1 pour G. L'hypothèse 1) du théorème 1) est évidemment satisfaite. On peut aisément déduire des hypothèses 1), 2) du théorème que pour tout $\eta \in E$ et pour tout $x \in E'$ la fonction:

$$\varphi_{x,\eta}(\tau, t) = \sup_{\sigma \in \Gamma(t, \tau, x)} \langle \eta, \sigma \rangle$$

est continue en t sur $[\tau, T]$ pour tout $\tau \in I$ et mesurable en τ sur $[0, t]$ pour tout $t \in I$, donc, après le lemme 2.1, la fonction

$$\tau \mapsto \sup_{\sigma \in G(t, \tau, x)} \langle \eta, \sigma \rangle = \begin{cases} \varphi_{x, \eta}(\tau, t) & \text{si } \tau \leqslant t \\ \varphi_{x, \eta}(\tau, \tau) & \text{si } \tau > t \end{cases}$$

est mesurable sur I pour tout t fixé dans I. L'hypothèse 2) du théorème 1 est donc satisfaite. L'hypothèse 3) du théorème 1 se vérifie facilement.

Désignons par $\mathcal{X}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(I, L^{\infty}_{E'_W}(I))$ des fonctions $t \mapsto g(t,.)$ de la forme

$$\left.\begin{aligned} g(t, \tau) &= \int_0^t p(s) f(s, \tau) ds + q(\tau) \\ &\text{avec } q(.) \in \mathcal{B}^r_I, \ f(.,.) \in \mathcal{B}^1_{I^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

et par $\mathcal{X}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(I, L^{\infty}_{E'_W}(I))$ des fonctions $t \mapsto g(t,.)$ de la forme (2.5) avec $q(\tau) \equiv 0$.

Comme, d'après le lemme 1, $\mathcal{X}_0$ est une partie compacte métrisable de $\mathcal{C}(I, L^{\infty}_{E'_W}(I))$, il existe une boule $\mathcal{B}^{r_1}_I \subset L^{\infty}_{E'_W}(I)$ telle que

$$h(t,.) \in \mathcal{B}^{r_1}_I \quad (\forall h \in \mathcal{X}_0, \ \forall t \in I).$$

Donc
$$g(t,.) \in \mathcal{B}^{r_2}_I \quad (\forall g \in \mathcal{X}, \ \ \forall t \in I),$$

où $r_2 = r + r_1$.

Comme $\mathcal{B}^{r_2}_I$ est métrisable, $\mathcal{X}$ est une partie métrisable de $\mathcal{C}(I, L_{E'_W}^{\infty}(I))$. La compacité de $\mathcal{X}$ se vérifie alors immédiatement en utilisant sa métrisabilité.

Posons

$$x_g(t) = b(t) + \int_0^t g(t, \tau)\, d\tau \tag{2.6}$$

pour tout $g \in \mathcal{X}$.

Remarquons que pour tout $t \in I$, l'intégrale dans le second membre de (2.6) existe et appartient à la boule $\mathcal{B}^{r_2 \cdot T}_I$ dans $L^{\infty}_{E'_W}(I)$.

Considérons l'application multivoque Φ dans $\mathcal{X}$ définie par la formule

$$\Phi(g) = \left\{ \begin{matrix} (t \mapsto \sigma(t,.) : \forall t \in I, \ \sigma(t, \tau) \in G(t, \tau, x_g(\tau)) \\ \text{pour presque tout } \tau \in I \end{matrix} \right\}$$

En vertu du théorème 1, on a $\Phi(g) \neq \phi$ pour tout $g \in \mathcal{X}$. Il est clair que, pour qu'une application $g \in \mathcal{X}$ possède les propriétés formulées dans le théorème, il faut et il suffit que g soit un point fixe de l'application Φ. On est ainsi ramené à vérifier les conditions du théorème de point fixe de Kakutani-Kyfan. Comme $\mathcal{X}$ est compact métrisable, il suffit de montrer que le graphe de Φ est démonbrablement fermé dans $\mathcal{X}^2$.

Soient $g_n \to g$ et $\sigma_n \to \sigma$ dans $\mathcal{X}$ tels que $\sigma_n \in \Phi(g_n)$ $(\forall n = 1,2,...)$ Soit t fixé dans I. Comme $g_n \to g$ dans $\mathcal{C}(I, L^\infty_{E'_W}(I))$, on a *a fortiori* $g_n(t,.) \to g(t,.)$ dans $L^\infty_{E'_W}(I)$. Donc, pour tout $\eta \in E$, on a

$$\langle \eta, x_{g_n}(t) \rangle = \langle \eta, b(t) \rangle + \int_0^T \langle \chi_{[0,t]}(\tau) \cdot \eta, g_n(t, \tau) \rangle \, d\tau$$

$$\to \langle \eta, b(t) \rangle + \int_0^T \langle \chi_{[0,t]}(\tau) \cdot \eta, g(t, \tau) \rangle \, d\tau = \langle \eta, x_g(t) \rangle$$

ce qui veut dire que $x_{g_n}(t) \to x_g(t)$ dans E'_w. D'autre part, on a $\sigma_n(t,\tau) \in G(t, \tau, x_{g_n}(\tau))$ pour presque tout $\tau \in I$. D'après le théorème de fermeture ([5]), il en résulte que $\sigma(t, \tau) \in G(t, \tau, x_g(\tau))$ pour presque tout $\tau \in I$.

On a donc $(g, \sigma) \in$ graph G et graph G est fermé dans $\mathcal{X}^2$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Considérons maintenant la question de dépendance de l'ensemble des solutions de (2.1) vis à vis du paramètre.

Théorème 3. Les hypothèses et les notations de I, E, Γ étant celles du théorème 2, soient M un espace compact métrisable et $\xi \mapsto b(., \xi)$ une application continue de M dans $\mathcal{C}(I, E'_W)$.

Alors, l'application Ψ qui fait correspondre à chaque $\xi \in M$ l'ensemble $\Psi(\xi)$ de toutes les solutions de l'équation

$$x(t) \in b(t, \xi) + \int_0^t \Gamma(t, \tau, x(\tau)) d\tau \tag{2.7}$$

qui possèdent les propriétés formulées dans le théorème 2 est semicontinue supérieurement.

Démonstration.

Considérons l'ensemble $\mathcal{X}$ introduit dans la démonstration du Théorème 2 et l'ensemble X des fonctions $t \mapsto x_{g,\xi}(t)$ de la forme

$$x_{g,\xi}(t) = b(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau) \, d\tau$$

avec $g \in \mathcal{X}$, $\xi \in M$.

On va montrer que l'adhérence $\overline{X}$ de X dans $\mathcal{C}(I, E'_W)$ est compacte métrisable. Montrons d'abord que $X \subset \mathcal{C}(I, E'_W)$ et que de plus, X est une partie équicontinue de $\mathcal{C}(I, E'_W)$. Posons

$$X_0 = \left\{ \left(t \mapsto x_g(t) = \int_0^t g(t, \tau) d\tau \right); \; g \in \mathcal{X} \right\}$$

$$X_1 = \{ (t \mapsto b(t, \xi)) \}; \; \xi \in M \}$$

On déduit aisément des hypothèses sur M et sur $b(.,.)$ que X_1 est un compact dans $\mathcal{C}(I, E'_w)$.

D'autre part, comme on l'a vu dans la démonstration du Théorème 2, il existe une boule B_{r_2} dans E' contenant toutes les valeurs de X_0. Donc X_0 est une famille uniformément bornée de fonctions dans $\mathcal{C}(I, E'_w)$. Montrons que X_0 est équicontinue.

On a

$$\left|\int_0^{t''} \langle \eta, g(t'', \tau)\rangle\, d\tau - \int_0^{t'} \langle \eta, g(t', \tau)\rangle d\tau\right| \leqslant \int_0^{t''} |\langle \eta, g(t'', \tau) - g(t', \tau)\rangle|\, d\tau +$$

$$+ \int_{t'}^{t''} |\langle \eta, g(t'', \tau)\rangle|\, d\tau \leqslant \|\eta\| \cdot \left[T.\int_{t'}^{t''} p(s) ds - (t'' - t') \int_0^T p(s)\, ds\right]$$

pour tout $\eta \in E$, $t', t'' \in I$, $t'' > t'$, ce qui montre bien que X_0 est équicontinue.

Donc $X = X_0 + X_1$ est équicontinue et uniformément bornée dans $\mathcal{C}(I, E'_w)$. D'après le théorème d'Ascoli (cf. [9]), $\overline{X}$ est compacte. On déduit alors de la séparabilité de E que X est compacte *métrisable*.

Comme par définition de X et de Ψ, $\Psi(\xi) \subset X$, pour prouver que Ψ est semicontinue supérieurement, il suffit de montrer qu'elle est de graphe dénombrablement fermé dans $M \times \overline{X}$. Soient $\xi_n \to \xi$ dans M et $x_n(.) \to x(.)$ dans $\overline{X}$ telles que $x_n(.) \in \Psi(\xi_n)(n = 1.2,..)$. On a

$$x_n(t) = b(t, \xi_n) + \int_0^t g_n(t, \tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

avec des $g_n(.,.) \in \mathcal{X}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, et pour tout $t \in I$ on a $g_n(t, \tau) \in G(t, \tau, x_n(\tau))$ pour presque tout $\tau \in I$. Vu la compacité et la métrisabilité de $\mathcal{X}$, on peut supposer que $g_n \to g$ dans $\mathcal{X}$. Soit t fixé dans I. On a *a fortiori* $g_n(t,.) \to g(t,.)$ dans $L^\infty_{E'_w}(I)$ D'autre part, comme $x_n(.) \to x(.)$ dans $\overline{X}$, on a *a fortiori* $x_n(t) \to x(t)$ dans E'_w. Donc, d'après le théorème de fermeture ([5]), on a

$$g(t, \tau) \in G(t, \tau, x(\tau)) \qquad \text{pour presque tout } \tau \in I. \tag{2.9}$$

Faisant $n \to \infty$ dans (2.8), on a

$$\langle \eta, x(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \eta, x_n(t)\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\{\langle \eta, b(t, \xi_n)\rangle + \int_0^T \langle \chi_{[0,t]}(\tau)\cdot\eta, g_n(t, \tau)\rangle d\tau\right\} =$$

$$= \langle \eta, b(t, \xi)\rangle + \int_0^T \langle \chi_{[0,t]}(\tau)\cdot \eta, g(t, \tau)\rangle\, d\tau$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $\eta \in E$.

Donc $x(t) = b(t, \xi) + \int_0^t g(t, \tau)d\tau.$

Vu (2.9), on en conclut que $x(.) \in \Psi(\xi)$ ce qui prouve que graph Ψ est fermé. Le Théorème 3 est démonstré.

Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance au Professeur Ch. Castaing qui a bien voulu lire le premier manuscrit de cet article et me donner de nombreux conseils utiles.

Received May 20, 1978

TRAVAUX CITÉS

[1] Philippov A.F. *Solutions classiques des équations différentielles à second membre multivoque.* Vestn. Mosk. Univ. Ser. Mat., Mech. N.3, (1965) 16-25 (en Russe).

[2] Kikuchi N. *Control problems of contingent equations.* Publ. R.I.M.S. Kyoto University. Ser. A, 3 (1967) 85−99.

[3] Lazota A., Opial Z. *An application of Kakutani-Kyfan theorem in theory of ordinary differential equations.* Bull. Acad, Polon. Sci. 13 (1965) 781−786.

[4] Castaing Ch., Valadier M. *Équations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes.* Revue Inf. Rech. Op. 16 (1969) 3−16.

[5] Castaing Ch., Valadier M. *Convex Analysis and measurable multifunctions.* Lectures Notes, n. 580. Springer-Verlag 1977.

[6] Castaing Ch. *Intégrales convexes duales.* C.R. Acad. SC. Paris. 275, 1331−1334 (1972).

[7] Castaing Ch. *Un théorème d'existence de sections séparement mesurables et séparément absolument continues.* Séminaire d'Analyse convexe. Montpellier. 1973, Exp. N3

[8] Bourbaki N. *Intégration vectorielle.* Hermann, Paris, 1959.

[9] Edwards R.E. *Functional Analysis. Theory and Applications.* New York, 1965.

[10] Kolmogorov A.N., Fomine C.B. *Éléments de théorie de fonctions et d'analyse fonctionnelle.* « Nauka », Moskva, 1972 (en Russe).

[11] Dunford N., Schwartz J. *Linear Operators.* part I. *General Theory.* New York, 1958.

[12] Raguimkhanow R.K. *Sur l'existence de solutions des équations intégrales à second membre multivoque.* Sibirskii Mat. Journal. T XVII, N. 3, (en Russe).

[13] Phan văn Chương. *Sur un théorème de sélection et son application aux équations intégrales multivoques.* Mat. Sbornik. T. 105. N°4. p. 622−637 (en Russe).