ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ВЫПУКЛЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ СИСТЕМАХ

PHAM HUU SACH
Математический Институт, Ханой.

В многочисленных процессах, в частности, в экономических моделях, вместе с проблемой многокритериальной оптимизации [1] встречаются и задачи, в которых ограничения задаются не однозначными, а многозначными операторами [2]. В работах [3, 4] излагается общая теория несовместности систем выпуклых включений, на основе которой доказывается ряд условий управляемости, инвариантности и оптимальности в процессах с многозначными операторами. Из этой же теории можно вывести и для линейной задачи векторной оптимизации [5] достаточные условия существования множителей Лагранжа, которые представляют собой обобщения известных условий для случая скалярной оптимизации. Отметим, что в отличие от [6] допустимые в [5] точки могут принадлежать некомпактному множеству. В предлагаемой работе будем показывать, что результаты по управляемости и инвариантности, полученные в (3,4), дают возможность изучать множество неулучшаемых точек в многозначных бесконечномерных системах. Отметим, что случай, когда все пространства конечномерны и все операторы однозначны, был рассмотрен в [7].

Пусть X, Y и Z — отделимые локально выпуклые пространства, $D \subset X$ — выпуклое компактное множество, $N \subset Y$ — выпуклое замкнутое множество, $M \subset Z$ — выпуклый замкнутый конус, для которого найдётся хотя бы одна точка $m \in M$, обладающая тем свойством, что $-m \overline{\in} M$.
Положим

$$N^\infty = \{ y^* \in Y^* : \inf_{y \in N} \langle y^*, y \rangle > -\infty \},$$

$$M^\infty = \{ z^* \in Z^* : \inf_{z \in M} \langle z^*, z \rangle > -\infty \} =$$

$$= \{ z^* \in Z^* : \inf_{z \in M} \langle z^*, z \rangle = 0 \},$$

где $Y^* (Z^*)$ — совокупность всех линейных непрерывных функционалов, определяемых на $Y (Z)$.

Будем обозначать через 2^Y совокупность всех непустых подмножеств, содержащихся в Y.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (см. [8]). Оператор $T: D \to 2^Y$ называется полунепрерывным сверху, если справедливы следующие условия :

(а). Для любой $\widehat{x} \in D$ множество $T(\widehat{x})$ компактно.

(б). Для любой $x \in D$ и любого открытого множества G со свойством $G \supset T(\widehat{x})$ найдётся такая окрестность V точки $\widehat{x}$, что включение $G \supset T(x)$ выполняется при всех $x \in V \cap D$.

Ясно, что понятие полунепрерывности сверху совпадает с обычным понятием непрерывности, если оператор T однозначен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $A \subset Y$ называется N — выпуклым, если $\alpha A + (-\alpha) A \subset A - N$ для любого числа $\alpha \in [0,1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $T: D \to 2^Y$ называется N — выпуклым, если его график, т.е. множество

$$\mathrm{graf}\ T = \{ (x, y) : x \in D,\ y \in T(x) \},$$

является N_0 — выпуклым, где $N_0 = \{0\} \times N \subset X \times Y$.

Будем говорить, что оператор T является выпуклым, если он является N — выпуклым, где $N = \{0\}$. Ясно, что это определение совпадает с обычным определением выпуклого оператора (см. [3 — 5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда N—конус легко проверить, что опорная функция N — выпуклого оператора T, определяемая формулой

$$w^T(y^*, x) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle : y \in T(x) \},$$

является вогнутой (в обычным смысле) при любом фиксированном $y^* \in N^\infty$.

Следует отметить, что всюду в дальнейшем пространство Z будет наделено не тольно исходной (сильной), но и слабой топологией $\sigma(Z, Z^*)$. Если говорят просто о замкнутом множестве $B \subset Z$, внутренности B, окрестности точки $z \in Z$, полунепрерывности сверху операторов, определяемых на Z или принимающих значения в Z, не уточняя, в какой топологии, то при этом имеют в виду исходную топологию пространства Z . Аналогичное замечание относится и к пространству Y.

Пусть теперь заданы полунепрерывные сверху операторы $T: D \to 2^{Y^J}$ и $S: D \to 2^Z$, причём $T(S)$ является выпуклым (M — выпуклым).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно видеть, что лемма 1.2 работы [3] (см. также лемму 1.2 работы [4]) остаётся верной и для случая, когда оператор $T(S)$ является не выпуклым, а N—выпуклым (M — выпуклым) если $N(M)$— выпуклый конус.*)

Аналогичное замечание относится и к так называемой основной леммы работы [5]. Кстати, отметим, что формулировка следствия этой леммы работы [5] (см. [5, стр. 65]) неточна : к условиям следствия нужно добавить ещё одно требование(!), приведенное в [6] :

*) Отметим ещё, что упомянутая лемма верна и в предположении, что оператор S является полунепрерывным сверху не в исходной (метрической), а в слабой топологии $\sigma(Z, Z^*)$ нормированного пространства Z.

(!). Если последовательность $(y^*_n, z^*_n) \in N^\infty \times M^\infty$ **) слабо сходится к (y^*, z^*) то $\|(y^*_n, z^*_n)\| \to \|(y^*, z^*)\|$.

Без дополнительного условия (!) упомянутое следствие неверно. Это следует из его доказательства. В связи со сделанным замечанием условие(!) должно быть добавлено и к условиям теоремы 11 работы [5] потому, что последняя теорема установлена при помощи сказанного выше следствия.

Будем обозначать через D' множество всех решений системы

$$x \in D \quad , \quad T(x) \cap N \neq \varnothing. \tag{1}$$

Предположим в дальнейшем, что $D' \neq \varnothing$. Можно показать, что множество D', следовательно и Q, компактно, где

$$Q = \bigcup_{x \in D'} S(x).$$

M — управляемость (M—инвариантность) оператора S относительно ограничений (1) означает, что $M \cap Q \neq \varnothing$ $(Q \subset M)$, где $\varnothing$ — пустое множество. В работах [3,4] приведены условия M — управляемости и M — инвариантности оператора S относительно различных ограничений. Отметим, что в силу замечаний 1 и 2 можно проверить, что теорема 3.1 работы [3] (соотв. теорема 2.1 работы [3]) доказанная в предположении, что T является выпуклым, а S — аффинным [3,4], остаётся верной и для случая, когда T является N — выпуклым и S является M — выпуклым (соотв. $(-M)$—выпуклым), если M — выпуклый замкнутый конус и D выпуклое компактное множество. Отсюда следует лемма 1, где нужно считать S непрерывным.

ЛЕММА 1. Условие $M \cap Q \neq \varnothing$ (*соотв.* $-Q \subset M$) *имеет место тогда и только тогда, когда,* $\inf \{\widehat{g}(z^*) : z^* \in M^\infty\} = 0$ (*соотв.* $\sup\{\widehat{g}(z^*) : z^* \in M^\infty\} = 0$, *где*

$$\widehat{g}(z^*) = \inf_{y^* \in N^\infty} \sup_{x \in D} [h^T(x, y^*, N) \times h^S(x, z^*, M)],$$

$$h^T(x, y^*, N) = w^T(y^*, x) - \inf_{y \in N} \langle y^*, y\rangle$$

Всюду в дальнейшем там, где специально не оговорено противное, будем считать, что Z — нормированное, оператор T является N — выпуклым полунепрерывным сверху, а оператор S является однозначным M — выпуклым и непрерывным в слабой топологии $\sigma(Z, Z^*)$ пространства Z. Условимся писать $z_1 \leqslant z_2$, если $z_1 - z_2 \in M$.

Пусть $B \subset Z$ — некоторое множество. Будем обозначать через $P(B)$ множество всех таких точек $b_0 \in B$, что из условий $b \in B$, $b \leqslant b_0$ следует, что $b_0 \leqslant b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Точка $x_0 \in D'$ называется неулучшаемой, если $S(x_0) \in P(Q)$.

Для каждой точки $s \in Z$ положим

$$L(y^*, z^*, x, s) = h^T(x, y^*, N) + \langle z^*, S(x) - s\rangle,$$

$$g(z^*, s) = \inf_{y^* \in N^\infty} \sup_{x \in D} L(y^*, z^*, x, s),$$

$$G_-(s) = \inf_{z \in M^{\infty 1}} g(z^*, s), \qquad G_+(s) = \sup_{z \in M^{\infty 1}} g(z^*, s),$$

где $M^{\infty 1}$ = совокупность всех функционалов $z^* \in M^\infty$ с нормой, равной единице.

**) В [5] вместо N^∞ и M^∞ используются обозначения N^* и M^*.

Из леммы 1 получим следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для существования хотя бы одной такой точки $x \in D'$ что $S(x) \leqslant s$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $G_-(s) \geqslant 0$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Условие $s \leqslant S(x)$ выполняется для всех $x \in D'$ в том и только в том случае, когда $G_+(s) \leqslant 0$.

ЛЕММА 2. Функции G_- и G_+ конечны и непрерывны (в метрической топологии пространства Z).

Доказательство. Для любых функций φ_1 и φ_2 справедливы оценки

$$\sup_{x\in D} \varphi_1(x) + \inf_{x\in D} \varphi_2(x) \leqslant \sup_{x\in D} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \leqslant \sup_{x\in D} \varphi_1(x) + \sup_{x\in D} \varphi_2(x).$$

С другой стороны, для всех $y^* \in Y^*$ выполняется неравенство

$$\sup_{x\in D} h^T(x, y, N) \geqslant 0$$

В силу того, что $D' \neq \varnothing$. Отсюда следует, что для всех $z^* \in M^{-1}$ и $y^* \in Y^*$ имеем

$$-(\mu + \| s \|) \leqslant \sup_{x\in D} h^T(x, y^*, N) - (\mu + \| s \|) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in D} L(y^*, z^*, x, s) \leqslant \sup_{x\in D} h^T(x, y^*, N) + (\mu + \| s \|),$$

где и в доказательстве леммы 3 $\mu = \sup \{ \|S(x)\| : x \in D\} < \infty$. Из полученных неравенств ясно, что

$$-(\mu + \| s\|) \leqslant G_-(s) \leqslant G_+(s) \leqslant \mu + \| s\| . \tag{2}$$

Следовательно, функций G_- и G_+ конечны. Их непрерывность следует из неравенств (2) и из того факта, что функция G_- (G_+) является вогнутой (выпуклой) в обычном смысле (см. [9, стр. 116). Лемма доказана.

Отметим, что

$$G_-(S(x_0)) \geqslant 0 \tag{3}$$

для всех $x_0 \in D'$. Соотношение (3) вытекает из того, что для всех $y^* \in Y^*$, $z^* \in M^{-1}$ имеем

$$\sup_{x\in D} [h^T(x, y^*, N) + \langle z^*, S(x) - S(x_0)\rangle] \geqslant h^T(x_0, y^*, N) + \langle z^*, S(x_0) - S(x_0)\rangle \geqslant 0$$

Будем обозначать соответственно через Q_- и Q_+ совокупность всех решений уравнений $G_-(s) = 0$ и $G_+(s) = 0$.

ТЕОРЕМА 1: Точка $x_0 \in D'$ является неулучшаемой в том и только в том случае, когда $S(x_0) \in P(Q_-)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть x_0 — неулучшаемая точка. Положим $s_0 = S(x_0)$ и покажем, что $s_0 \in Q_-$. Для этого в силу (3) достаточно доказать, что неравенство $G_-(s_0) > 0$ не имеет места. В самом деле, в противном случае $G_-(s) > 0$ в некоторой окрестности*) точки s_0 потому, что функция G_- непрерывна (см. лемму 2). Найдётся такая точка $\overline{m} \in M$, что

$$-\overline{m} \in M \tag{4}$$

*) Речь идёт об окрестности в метрической тополочии пространства.

и точка $s_0 + \overline{m}$ содержится в только что сказанной окрестности точки s_0. Последний факт показывает, что $G_-(s_0 + \overline{m}) > 0$. Согласно предложению 1 имеем $S(\overline{x}) - s_0 - m \in M$, т.е. $S(\overline{x}) - S(x_0) \in \overline{m} + M \subset M$, где $\overline{x}$ — некоторая точка из D'. Так как $\overline{x} \in D'$ и $S(x_0) \in P(Q)$, то $S(x_0) - S(\overline{x}) \in M$. Отсюда следует, что

$$-\overline{m} \in S(x_0) - \bar{S}(x) + M \subset M,$$

что противоречит (4). Таким образом, $G_-(s_0) = 0$, т.е. $s_0 \in Q_-$. Предположим теперь, что $s \in Q_-$ — такая точка, что

$$s \leqslant s_0. \tag{5}$$

Так как $G_-(s) = 0$, то согласно предложению 1 найдётся такая точка $\overline{x} \in D'$, для которой

$$S(\overline{x}) \leqslant s. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получим $S(\overline{x}) \leqslant s_0$. Отсюда следует, что

$$s_0 \leqslant S(\overline{x}), \tag{7}$$

так как $s_0 \in P(Q)$. Из (6) и (7) ясно, что $s_0 \leqslant s$, что означает выполнение включения $s_0 \in P(Q_-)$.

Достаточность. Предположим теперь, что $x_0 \in D'$ и $S(x_0) \in P(Q_-)$. (8)

Возьмём произвольную точку $\overline{x} \in D'$, для которой

$$S(\overline{x}) \leqslant S(x_0). \tag{9}$$

Имеем $G_-(S(\overline{x})) \leqslant G_-(S(x_0))$. С другой стороны, $G_-(S(\overline{x})) \geqslant 0$ в силу того, что $\overline{x} \in D'$ (см. (3)). Таким образом,

$$G_-(S(\overline{x})) = 0. \tag{10}$$

условия (8)—(10) дают $S(x_0) \leqslant S(\overline{x})$, т.е. $S(x_0) \in P(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. *1) Если $s_0 \in P(Q_-)$, то найдётся хотя бы одна такая неулучшаемая точка x_0, что $S(x_0) \leqslant s_0$.*

2) Если $G_-(s_0) = 0$ и инфимум в правой части соотношения

$$G_-(s_0) = \inf_{(z^*, y^*) \in M^{\infty 1} \times N^{\infty}} \sup_{x \in D} L(y^*, z^*, x, s_0) \tag{11}$$

достигается на элементах $z_0^* \in M^{\infty 1}$ и $y_0^* \in N^{\infty}$, то для любой неулучшаемой точки x_0, удовлетворяющей условию $S(x_0) \leqslant s_0$, имеем

$$h^T(x_0, y_0^*, N) = 0, \tag{12}$$

$$L(y_0^*, z_0^*, x_0) = \max_{x \in D} L(y_0^*, z_0^*, x), \tag{13}$$

где $L(y^*, z^*, x) = L(y^*, z^*, x, 0)$.

Доказательство. I. Пусть

$$s_0 \in P(Q_-). \tag{14}$$

Тогда $G_-(s_0) = 0$. Согласно предложению I найдётся такая точка $x_0 \in D'$, что

$$S(x_0) \leqslant s_0. \tag{15}$$

Покажем, что x_0 — неулучшаемая точка. В самом деле, из (15) получим

$$G_-(S(x_0)) \leqslant G_-(s_0) = 0. \tag{16}$$

неравенства (3) и (16) показывают, что

$$G_-(S(x_0)) = 0. \tag{17}$$

Условия (14), (15) и (17) дают

$$s_0 \leqslant S(x_0). \tag{18}$$

Возьмём теперь произвольную точку $x \in D'$, для которой условие (9), следовательно и (10), выполняется. Так как $s_0 \in P(Q_-)$ и $S(\bar{x}) \leqslant S(x_0) \leqslant s_0$, то $s_0 \leqslant S(\bar{x})$. (19)

Условия (15) и (19) дают $S(x_0) \leqslant S(\bar{x})$. Таким образом, $S(x_0) \in P(Q)$.

2. Пусть x_0 — неулучшаемая точка, для которой выполняется условие $S(x_0) \leqslant s_0$. Докажем, что x_0 удовлетворяет соотношениям (12) и (13). Действительно, из условий $G_-(s_0) = 0$ и $S(x_0) \leqslant s_0$ получим

$$\sup_{x \in D} L(y_0^*, z_0^*, x) = \langle z_0^*, s_0 \rangle \leqslant \langle z_0^*, S(x_0) \rangle. \tag{20}$$

Так как $x_0 \in D'$, то

$$h^T (x_0, y_0^*, N) \geqslant 0.$$

С другой стороны, из (20) ясно, что

$$L (y_0^*, z_0^*, N) \leqslant \langle z_0^*, S(x_0) \rangle,$$

т.е.

$$h^T (x_0, y_0^*, N) \leqslant 0.$$

Отсюда следует равенство (12). Соотношение (13) является непосредственным следствием условий (12) и (20). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если конус M является острым, т.е. $M \cap (-M) = \{0\}$, то из (15) и (18) получим

$$S(x_0) = s_0. \tag{21}$$

Таким образом, если конус M является острым, то для точки x_0, о которой идёт речь в первом утверждении теоремы 2 имеет место усмовие (21). Отсюда следует

СЛЕДСТВИЕ 1. Если конус M является острым, то

$$P(Q) = P(Q_-).$$

ЛЕММА 3. Пусть выполняются следующие условия:

(а). *Y и Z — банаховые сепарабельные пространства.*

(б). $0 \in \operatorname{int}(Q'_- - N)$, *где*

$$Q' = \bigcup_{x \in D} T(x),$$

а int *означает внутренность (в метрической топологии пространства Y).*

(в). *Если последовательность $Z_n^* \in M^\infty$ слабо сходится к Z^*, то $\|Z_n^*\| \to \|Z^*\|$.*

Тогда для любой $s_0 \in Z$ инфимум в правой части (II) *достигается.*

Доказательство. В силу условия (б) найдётся такое число $\eta>0$, что

$$\eta\,\|y^*\| \leqslant \sup_{y\in Q'-N} \langle y^*, y\rangle. \tag{22}$$

Отсюда следует, что для всех $y^* \in Y^*$ и $z^* \in M^{\infty 1}$ имеем

$$\eta\,\|y^*\| - (\mu + \|s_0\|) \leqslant \sup_{x\in D} L(y^*, z^*, x, s_0). \tag{23}$$

Для каждого натурального числа n найдутся такие функционалы $y^*_n \in N^\infty$ $Z^*_n \in M^{\infty 1}$, что

$$\sup_{x \in D} \; L(y^*_n, Z^*_n, x, s_0) < G_-(s_0) + \frac{1}{n}. \tag{24}$$

Условия (23) и (24) показывают, что

$$\eta\,\|y^*_n\| - (\mu + \|s_0\|) < G_-(s_0) + \frac{1}{n} \leqslant G_-(s_0) + 1,$$

т.е. последовательность y^*_n ограничена по норме. Так как пространства Y и Z сепарабельны, то без ограничения общности можно считать, что последовательности y^*_n и z^*_n слабо сходятся к функционалам $y^* \in Y^*$ и $z^* \in Z^*$ соответственно. В силу условия (В) и включения $z^*_n \in M^{\infty 1}$ ясно, что $z^* \in M^{\infty 1}$. Из слабой сходимости последовательностей y^*_n, z^*_n и условия (24) вытекает, что неравенство

$$\langle y^*, y\rangle + \langle z^*, S(x) - s_0\rangle \leqslant G_-(s_0)$$

выполняется для всех $x \in D$ и $y \in T(x) - N$, из последнего неравенства ясно, что $y^* \in N^\infty$ и

$$\sup_{x \in D} \; L(y^*, z^*, x, s_0) = G_-(s_0).$$

Таким образом, функционалы $(z^*, y^*) \in M^{\infty 1} \times N^\infty$ доставляют инфимум в правой части (II). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. В дополнение к условиям леммы 3 предположим, что конус M является острым, а операторы T и S полунепрерывны сверху в слабой топологии $\sigma(Y, Y^*)$ и $\sigma(Z, Z^*)$ пространств Y и Z соответственно. Тогда

(1). $P(Q) = P(Q_-)$.

(2). *Для любой неулучшаемой точки x_0 совокупность функционалов $(z^*, y^*) \in M^{\infty 1} \times N^\infty$, доставляющих инфимум в правой части* (11) *при $s_0 = S(x_0)$ непуста, причём для любых функционалов (z^*_0, y^*_0) из этой совокупности имеют место соотношения* (12), (13).

Доказательство. Если наделить Y слабой топологией $\sigma(Y, Y^*)$ то Y становится отделимым локально выпуклым пространством и все условия теорем 1, 2 и следствия 1 выполняются. Отсюда и из леммы 3 непосредственно вытекает справедливость теоремы 3.

Отметим, что в теореме 3 непрерывность сверху операторов T и S в метрической топологии пространств Y и Z не предполагается выполненной. В частности, множества $T(x)$ и $S(x)$ могут не быть компактными в метрической топологии пространств Y и Z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $x_0 \in D'$ называется оптимальной, если $S(x_0) \leqslant S(x)$ для всех $x \in D$.

Ясно, что каждая оптимальная точка является неулучшаемой. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, в случае $Z = R^1$ понятия неулучшаемости и оптимальности совпадают.

ТЕОРЕМА 4. Точка $x_0 \in D'$ является оптимальной в том и только в том случае, если $G_+(S(x_0)) = 0$, т.е. $S(x_0) \in Q_+$.

Доказательство. Достаточность получается из предложения 2. Докажем теперь необходимость. Пусть x_0 — оптимальная точка. Положим $S_0 = S(x_0)$. Согласно предложению 2 $G_+(s_0) \leqslant 0$. Покажем, что строгое неравенство не имеет места. Действительно, в противном случае $G_+(s) < 0$ в некоторой окрестности точки S_0 в силу нерерывности функции G_+ (см. лемму 2). Возьмём такую точку $\bar{m} \in M$, что

$$-\bar{m} \bar{\in} M \qquad (25$$

и точка $s_0 - \bar{m}$ содержится в только что сказанной окрестности точки s_0. Последний факт показывает, что $G_+(s_0 - \bar{m}) < 0$. Следовательно, опять согласно предложению 2 $S(x_0) - \bar{m} - S(x) \in M$ для всех $x \in D'$. В частности, при $x = x_0$ имеем $-\bar{m} \in M$, что противоречит условию (25). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Точка $x_0 \in D'$ является оптимальной в том и только в том случае, если функция

$$\inf_{y^* \in N^{\infty}} \sup_{x \in D} L(y^*, z^*, x, S(x_0))$$

переменного z^* тождественно равна нулю на множестве $M^{\infty 1}$.

Доказательство следует из теорем 1, 4 и из того факта, что каждая оптимальная точка является неулучшаемой.

Поступила в Редакцию 20-VI-1978г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pareto V. *Cours d'economie politique.* Lausanne, Rouge, 1896.
2. Макаров В.Л., Рубинов А.М. *Суперлинсйное точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.* Успехи мат. наук, №5, 1970.
3. фам Хыу Шак. *К теории управления процессами с многозначными операторами.* Кибернетика, №2, 1976.
4. Phạm Hữu Sách. *Теория многозначных абстрактных процессов,* Acta Mathematica Vietnamica, №1, 1976.
5. Pham Hữu Sách. *Условия экстремума в линейных абстрактных задачах.* Acta Mathematica Vietnamica №1, 1977.
6. Гусев М.И. *Векторная оптимизация линейных систем.* Докл. АН СССР, Т. 207, №1, 1972.
7. Гороховик В.В. *К проблеме векторной оптимизации.*Изв. АН СССР, Техническая Кибернетика, №6, 1972.
8. Berge C. *Topological spaces including a treament of multivalued functions vector spaces and convexity.* Oliver and Boyd, Edingburg and London, 1963.
9. Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства.* Изд. иностр. лит., Мосьва. 1959.