ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p

В.Г. АНГЕЛОВ И.Д.Д. БАЙНОВ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе методом аккретивных операторов доказана теорема о существовании и единственности решения некоторых нелинейных функциональных уравнений. Решение находится в пространстве сильно измеримых функций, суммируемых по Бохнеру со степенью p, где $1 \leqslant p < +\infty$.

Рассмотрим нелинейное фукциональное уравнение

$$x(t)' = X(t, x(t), x(\Delta(t))), \ t \geqslant 0 \tag{1}$$

где $x(t)$ неизвестная функция.

Известно, что в общем случае решения функционального уравнения (1) зависят от произвольной функции. По этому поводу см. [1], стр. 44 — 45. Следовательно задача о нахождении эффективных достаточных условий, гарантирующих существования и един ственности решения уравнений одной переменной.

В настоящей работе методом аккретивных операторов [2] —[4] доказана теорема о существовании и единственности абстрактного решения из L^p функционального уравнения (1). Отметим что в работах [5] — [7] другими методами были доказаны теоремы о существовании и единственности только непрерывного решения уравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{B}$ банаховое пространство. Оператор $L : D(L) \to \mathcal{B}$ называется аккретивным, если выполнено неравенство

$$\| (I + \lambda L)x - (I + \lambda L)y \|_{\mathcal{B}} \geqslant \| x - y \|_{\mathcal{B}}$$

для каждого $\lambda > 0$ и $x, y \in D(L)$, где I идентитет, $D(L)$ — область определения оператора L и $D(L) \subseteq \mathcal{B}$. Если еще $I + \lambda L \equiv \mathcal{B}$, то оператор L называется m — аккретивным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{B}$ банаховое пространство и $N : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ нелинейный непрерывный оператор, который удовлетворяет реляциям

$$\| ((1 + \lambda \Upsilon - \lambda \alpha)I + \lambda N)x - ((1 + \lambda \Upsilon - \lambda \alpha)I + \lambda N)y \|_{\mathcal{B}} \geqslant \| x - y \|_{\mathcal{B}} \tag{2}$$

для некоторых чисел $\Upsilon, \alpha, \gamma > \alpha > 0, \lambda > 0$ и $x, y \in \mathcal{B}$.

Тогда для каждого элемента $x \in \mathcal{B}$ существует единственный элемент $z \in \mathcal{B}$ удовлетворяющий равенству $(N + \gamma I)\, z = x$.

Доказательство. Оператор $N+(\gamma-\alpha)I$ непрерывен. Неравенство(2) означает, что он аккретивен. Тогда с помощью результата работы [2] (см. тоже [4], теорема 3.2, стр.161) заключаем, что оператор $N+(\gamma-\alpha)I$ является m—аккретивным. Следовательно оператор

$$I+\frac{1}{\alpha}(N+\gamma I-\alpha I)=\frac{1}{\alpha}(N+\gamma I) \tag{3}$$

отображает $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$.

Неравенство (2) при $\lambda=\frac{1}{\alpha}$ принимает вид

$$\left\|\frac{1}{\alpha}(N+\gamma I)x-\frac{1}{\alpha}(N+\gamma I)y\right\|_{\mathcal{B}}\geqslant\|x-y\|_{\mathcal{B}} \tag{4}$$

Следовательно оператор $N+\gamma I$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$ и его обратный оператор удовлетворяет неравенству

$$\|(N+\gamma I)^{-1}x-(N+\gamma I)^{-1}y\|_{\mathcal{B}}\leqq\frac{1}{\alpha}\|x-y\|_{\mathcal{B}} \tag{5}$$

Тогда если x произвольный элемент пространства $\mathcal{B}$, существует единственный элемент $z\in\mathcal{B}$, такой, что $(N+\gamma \mathrm{I})z=x$.

Этим теорема 1 доказана.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{B}$ банаховое пространство, R^1_+ —множество действительных неотрицательных чисел. Через $L^p(R^1_+;\mathcal{B})$ будем обозначать совокупность всех сильно измеримых функций $f\colon R^1_+\to\mathcal{B}$ которые интегрируемы с p —той степенью по Бохнеру, где $1\leqq p<+\infty$. Эта совокупность является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{L^p(R^1_+;\mathcal{B})}=\left[\int_0^\infty\|f(t)\|^p_{\mathcal{B}}\,dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

(см. [8]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия :

1. Функция $\triangle(t)\colon R^1_+\to R^1_+$ измерима и имеет свойство, что прообраз всякого множества меры нуль измерим. Кроме того для каждой функции $f\in L^p(R^1_+;\mathcal{B})$ выполнено условие $f(\Delta(t))\in L^p(R^1_+;\mathcal{B})$ и

$$\|f(\triangle(t))\|_{L^p(R^1_+;\mathcal{B})}\leqq K\|f(t)\|_{L^p(R^1_+;\mathcal{B})} \tag{6}$$

где K положительная постоянная и $1\leqq p<+\infty$.

2. Функции $\alpha_k(t)\in L^\infty(R^1_+;R^1_+)$ $(u=1,2)$

$$\alpha_0(t)\in L^p(R^1_+;R^1_+),\ \beta_i(t)\in L^\infty(R^1_+;R^1_+),\ (i=1,2).$$

3. Функция $X(t,x,y)\colon R^1_+\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ измерима по t при каждом фиксированном $(x,y)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, непрерывна по совокупности переменных x и y при почти всех $t\in R^1_+$ и удовлетворяет условиям

$$\|X(t,x,y)\|^p_{\mathcal{B}}\leqq\frac{M^p}{\gamma^p}\left[\alpha_0^p(t)+\alpha_1^p(t)\|y\|^p_{\mathcal{B}}+\alpha_2^p(t)\|y\|^p_{\mathcal{B}}\right] \tag{7}$$

$$\left\| X(t, x, y) - X(t, \bar{x}, \bar{y}) \right\|_{\mathcal{B}}^{p} \leqq \frac{M^{p}}{\gamma^{p}} \left[\beta_1^{p}(t) \| x - \bar{x} \|_{\mathcal{B}}^{p} + \beta_2^{p}(t) \| y - \bar{y} \|_{\mathcal{B}}^{p} \right] \quad (8)$$

где $\bar{\beta}_1^{p} + \bar{\beta}_2^{p} k^{p} \leqq 1, \bar{\beta}_i = ess\ sup\ \beta_i(t),\ t \geqslant 0\ (i = 1,2)$ и постоянные γ и M удовлетворяют условию $\gamma > M > 0$.

Тогда существует единственная функция $x(t) \in L^{p}(R^1_+; \mathcal{B})$, которая удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство: Пусть $\mathcal{B}$ банаховое пространство $L^{p}(R^1_+; \mathcal{B})$. Определим оператор $N : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ по формуле

$$(Nf)(t) = -\gamma X(t, f(t), f(\Delta(t))),\ t \geqslant 0$$

где функция $f \in \mathcal{B}$.

Покажем, что если функция $f(t) \in \mathcal{B}$, то функция $(Nf)(t)$ тоже принадлежит $\mathcal{B}$

В самом деле из условий теоремы 2 следует

$$\| (Nf)(t) \|_{\mathcal{B}}^{p} = \| \gamma X(t, f(t), f(\Delta(t))) \|_{\mathcal{B}}^{p} \leqq$$

$$\leqq M^{p} \left[\alpha_0^{p}(t) + \bar{\alpha}_1^{p} \| f(t) \|_{\mathcal{B}}^{p} + \bar{\alpha}_2^{p} \| f(\Delta(t)) \|_{\mathcal{B}}^{p} \right] \quad (9)$$

где $\bar{\alpha}_k = ess\ sup\ \alpha_k(t)\ (u = 1,2),\ t \geqslant 0$.

Имея ввиду непрерывность функции $X(t, x, y)$ по совокупности x и y и свойство функции $\Delta(t)$, заключаем, что функция $(Nf)(t)$ является сильно измеримой (см. [9] стр. 190, теорема 2). С другой стороны неравенство (9) показывает, что действительная функция $\| (Nf)(t) \|_{\mathcal{B}}$ принадлежит $L^{p}(R^1_+; A^1_+)$.

Используя теорему 3. 7. 4. стр. 80 [8] заключаем, что функция $(Nf)(t) \in L^{p}(R^1_+, \mathcal{B})$.

Покажем, что оператор N липшицово непрерывен. Действительно при $f, g \in \mathcal{B}$

$$\| Nf - Ng \|_{\mathcal{B}}^{p} = \| \gamma X(t, f(t), f(\Delta(t))) - \gamma X(t, g(t), g(\Delta(t))) \|_{\mathcal{B}}^{p} \leqq$$

$$\leqslant M^{p} \int_0^{\infty} \beta_1^{p}(t) \| f(t) - g(t) \|_{\mathcal{B}}^{p} dt + M^{p} \int_0^{\infty} \beta_2^{p}(t) \| f(\Delta(t)) - g(\Delta(t)) \|_{\mathcal{B}}^{p} dt \leqq$$

$$\leqq M^{p} \bar{\beta}_1^{p} \| f - g \|_{\mathcal{B}}^{p} + M^{p} \bar{\beta}_2^{p} k^{p} \| f - g \|_{\mathcal{B}}^{p} \leqq$$

$$\leqq M^{p} (\bar{\beta}_1^{p} + \bar{\beta}_2^{p} k^{p}) \| f - g \|_{\mathcal{B}}^{p} \leqq M^{p} \| f - g \|_{\mathcal{B}}^{p}$$

т.е.

$$\| Nf - Ng \|_{\mathcal{B}} \leqq M \| f - g \|_{\mathcal{B}}$$

Положим $\alpha = \gamma - M$. Тогда при $f, g \in \mathcal{B}$ имеем

$$\| ((1 + \lambda y - \lambda\alpha) I + \lambda N) f - ((1 + \lambda\gamma - \lambda\alpha) I + \lambda N) g \|_{\mathcal{B}} \geqslant$$

$$\geqslant (1 + \lambda M) \| f - g \|_{\mathcal{B}} - \lambda \| Nf - Ng \|_{\mathcal{B}} \geqslant$$

$$\geqslant (1 + \lambda M) \| f - g \|_{\mathcal{B}} - \lambda M \| f - g \|_{\mathcal{B}} =$$

$$= \| f - g \|_{\mathcal{B}}.$$

Таким образом установлено выполнение все условия теоремы 1. Следовательно если функция $g(t) = 0$ почти всюду на R^1_+, то существует единственная функция $x(t) \in L^P(R^1_+, \mathcal{B})$ такая, что

$$(N + \gamma I)\, x = g = 0$$

или $x(t) = X(t, x(t), x(\Delta(t)))$, $t \geqslant 0$, т.е. функция $x(t)$ является единственным решением функционального уравнения (1).

Этим теорема 2 доказана.

Наконец обсудим условия теоремы 2 на примере.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$x(t) = H(t) + ln\,[1 + x^2(e^{(1+\eta)t})],\ t \geqslant 0 \tag{10}$$

при $\mathcal{B} = R^1$, где функция $H(t)$ определена следующим образом

$$H(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & 0 < t \leqq 1 \\ n^{-\frac{2}{p}}, & n - 1 < t \leqq n,\ n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

и $1 \leqq p < +\infty$, $\eta > 0$ произвольное положительное число.

Проверим выполнение условий теоремы 2.

функция $\Delta(t) = e^{(1+\eta)t}$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию (6). Действительно, лдя каждой функции $f \in L^P(R^1_+;\ R^1)$ выполнено неравенство

$$\int_0^\infty |f(e^{(1+\eta)t})|^P dt = \int_1^\infty |f(\tau)|^P \frac{1}{(1+\eta)\tau} d\tau \leqq \frac{1}{1+\eta} \int_0^\infty |f(\tau)|^P d\tau$$

функция $X(t, x, y)$ в рассматриваемом примере будет $X(t, x, y) = X(t, y) = H(t) + ln\,(1 + y^2)$

Тогда

$$|X(t, y)|^P \leqq 2^P\, [H^P(t) + |ln\,(1 + y^2)|^P] \leqslant 2^P[H^P(t) + |y|^P]$$

т.е. выполнено условие (7) теоремы 2. И наконец

$$|X(t, y) - X(t, \bar{y})|^P\, |y - \bar{y}|^P \leqq \frac{1}{1+\eta}\left[(1 + \eta)\, |y - \bar{y}|^P\right]$$

где $M = 1$, $\gamma^P = 1 + \eta$, $\bar{\beta}_2^P\, k^P = (1 + \eta)\,\frac{1}{1 + \eta} = 1 \leqq 1.$

Следовательно, согласно условиям теоремы 2 существует единственная суммируемая функция из $L^P(R^1_+;\ R^1)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению (10).

Софийский университет
ИМЕНИ КЛ. ОХРИДСКОГО

Пловдивский университет
ИМЕНИ П. ХИЛЕНДАРСКОГО

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuczma M. — *Functional equations in a single variable*. Monografie Matematyczne 46, Warszawa, 1968.
2. Martin R. H.—*A global existence theorem for autonomous differential equation in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 307 — 314.
3. Webb G. F. — *Accretive operators and existence for nonlinear functional differential equation*. J. Diff. Equations 14 (1973), 57 — 69.
4. Barbu V. — *Semigrupuri de contractii nonlineare in spatii Banach*, Ed. Acad. RS Romania, Bucaresti 1974.
5. Kuczma M. , Mathowski J. — *Solution of a functional equation in a special class of function* Ann. Pol. Math. XXVI (1972), 287 — 293.
6. Kwapisz M., Turo J. — *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear functional equations of r-th. order*. Ann. Pol. Math. XXXI (1975), 145—157.
7. Czerwik S.—*Special solutions of a functional equation*. Ann. Pol. Math. XXXI (1975), 141—144,
8. Hille E., Phillips R. — *Functional analysis and semigroups*. *XXXI*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1957.
9. *Курс обычновенных дифференциальных уравнений*, авт. Ерушн Н, П., Штоиало И.З. др. Издательское объединение «Вища школа» Головное издательство Киев—1974.