ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

ПОЧТИ НОРМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

NGUYỄN ANH MINH
Ханойский планово-экономический институт.

§1. ПРОБЛЕМА ЧИ - ШОНГ - ВОНГА И КРИТЕРИЙ ПОЧТИ НОРМАЛВНОЙ СТРУКТУРЫ

Чи-Шонг-Вонг [5] сформулировал два эквивалентных вопроса:

1) Каждое ли Каппановское отображение, переводящее выпуклое и слабо бикомпактное подмножество банахова пространства в себя, имеет неподвижную точку?

2) Каждое ли выпуклое и слабо бикомпактное подмножество банахова простран ства имеет почти нормальную структуру?

В этом параграфе мы дадим прямой отрицательный ответ(1) на эти вопросы, заодно установим и критерий для почти нормальной структуры в стиле Бродского — Мильмана [1].

Напомним, что замкнутое, выпуклое множество в банаховом пространстве называется множеством почти нормальной структуры, если для любого его ограниченного, замкнутого выпуклого подмножества H с диаметром $\delta(H) > 0$, существует точка x из H; что

$$\| x - y \| < \delta(H), \forall y \in H).$$

Сперва дадим контрпример, решающий проблему Чи-Шонг-Вонга.

Пример 1. Пусть S — любое абстрактное несчетное множество. $L(S)$ обозначает банахово пространство ограниченных функций $f : S \to R$ с нормой

$$\| f \| = \sup_{s \in S} | f(s) | .$$

Положим

$K = \{f \in L^\infty(S) : f$ неотрицательна, и $\sum_{s \in S} f(s) \leqslant 1\}$ (последнее неравенство означает, что f отлично от нуля только на не более чем счетном подмножестве, и сумма берётся по этому подмножеству).

(1) После того, как ответ был автором найден, обнаружилось [4], где Чи-Шонг-Вонг 9 нескольких словах сообщает, что он получил решение, правда, не в прямон форме. Доказательство Чи-Шонг-Вонга до сих пор автору неизвестно.

Утверждается, что так определённое K является выпуклым и слабо бикомпактным, но не имеет почти нормальной структуры.

Действительно, выпуклостьясна. Слабая бикомпактность проверяется, например, по теореме 29 из книги [3] (стр. 304, §6, гл. IV). (Впрочем легко доказывается она и непосредственно).

Рассмотрим теперь любую $f \in K$. Т. К. S несчётно, а f отлично от нуля только на не более чем счетном подмножестве, то существует $s_0 \in S$, что $f(s_0) = 0$. Возьмём функцию X_{s_0}:

$$X_{s_0}(s) = \begin{cases} 1, \text{ если } s = s_0 \\ 0, \text{ если } s \neq s_0 \end{cases}$$

Ясно, что $X_{s_0} \in K$, и

$$\| f - X_{s_0} \| = | f(s_0) - X_{s_0}(s_0) | = 1 = \delta(K),$$

а это доказывает, что К не имеет почти нормальной структуры.

Введём теперь новое определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть N_1 обозначает первое порядковое число несчетного типа Трансфинитная последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha} < N_1$ в банаховом пространстве, направленная множеством порядковых чисел $\{\alpha : \alpha < N_1\}$, называется диаметральной N_1 — последовательностью, если существует число $\delta > 0$, что $\| x_\alpha - x \| = \delta, \forall \alpha < N_1$ и $\forall x \in \mathrm{co}\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, где $\mathrm{co}\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ есть выпуклая оболочка множества $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D—Замкнутое, выпуклое подмножество банахова пространства. Тогда D имеет почти нормальную структуру в том и только в том случае, если D не содержит никакой диаметральной N_1 — последовательности.

Доказательство.

А) Покажем, если D не имеет почти нормальную структуру, то D содержит некоторую диаметральную N_1 — последовательность:

D тогда должно содержать ограниченное, замкнутое и выпуклое подмножество H, что $\forall x \in H$ существует $y \in H$, чтобы $\| x - y \| = \delta\ (H) > 0$.

Будем выбирать N_1 — последовательность по трансфинитной индукции: Возьмём любую $x_1 \in H$. Из свойства Н вытекает, что $\exists\ x_2 \in H$, чтобы

$$\| x_1 - x_2 \| = \delta\ (H).$$

и так далее...

Пусть уже выбраны $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ для некоторого $\alpha < N_1$. Мы можем тогда выбирать и x_α следующим образом: Рассмотрим два случая:

Случай первый: Порядковое число α конечного типа. Тогда оно имеет вид $\alpha = n + 1$. Положим

$$x'_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Из выпуклости Н следует, что $x'_\alpha \in H$, и тогда можно выбрать $x_\alpha \in H$, чтобы

$$\| x'_\alpha - x_\alpha \| = \delta\ (H).$$

Доказательство равенства

$$\| x_\alpha - x \| = \delta (H), \ \forall x \in \text{co} \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

аналогично как во втором случае.

Второй случай : Порядковое число α-бесконечного типа. Тогда счетное множество $\{\beta : \beta < \alpha\}$ можно занумеровать натуральными числами :

$$\{\beta : \beta < \alpha\} = \{\beta_i : i = 1, 2, \ldots\}.$$

Положим $\quad x'_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_{\beta_i}$

Из выпуклости и замкнутости H вытекает $x'_\alpha \in H$, и тогда можем выбирать $x_\alpha \in H$ чтобы

$$\| x_\alpha - x'_\alpha \| = \delta (H).$$

Докажем, что $\| x_\alpha - x \| = \delta (H), \ \forall x \in \text{co} \{x_\beta : \beta < \alpha\}$.

Действительно, пусть имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} P_i . x_{\beta i}, \quad (P_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1).$$

Ради удобства положим $P_i = 0$ для $i > n$.

Непустое, конечное множество чисел $\left\{ \frac{1}{2^i . P_i} \ : \ P_i \neq 0 \right\}$ достигает минимума $\frac{1}{2^r . p_r}$ при некотором r.

Положим

$$q_i = \begin{cases} \dfrac{1}{2^r . \, p_r} \ , & \text{если } i = r \\ \dfrac{1}{2_i} - \dfrac{p_i}{2^r . \, p_r}, & \text{если } i \neq r \end{cases}$$

Тогда $q_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1$. Легко проверить, что

$$q_r : x + \sum_{i \neq r} q_i . x_{\beta i} = x'_\alpha$$

Имеем

$$\delta(H) = \| x_\alpha - x'_\alpha \| = \| x_\alpha - q_r . x_{\beta i} - \sum_{i \neq r} q_i . x_{\beta i} \| \leqslant$$

$$\leqslant q_r . \| x'_\alpha - x \| + \sum_{i \neq r} q_i \| x_\alpha - x_{\beta i} \|$$

$$\Rightarrow q_r . \| x_\alpha - x \| \geqslant \delta(H) - \sum_{i \neq r} q_i \| x_\alpha - x_{\beta i} \| \geqslant$$

$$\geqslant \delta (H) - \sum_{i \neq r} q_i \, \delta (H) = q_r . \ \delta (H).$$

$$\Rightarrow \| x_\alpha - x \| \geqslant \delta (H).$$

Поскольку расстояние $\| x_\alpha - x \|$ не может превзойти диаметра $\delta(H)$, то $\| x_\alpha - x \| = \delta(H)$

B) D содержит диаметральную N_1 — последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha < N_1}$, то D не имеет почти нормальную структуру :

На самом деле положим $H = \overline{\text{co}}\ \{x_\alpha\}_{\alpha < N_1}$, где $\overline{\text{co}}$ обозначает замкнутую, выпуклую оболочку.

Возьмём любую $x \in H$, x будет иметь вид

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \text{ где } x_n \in \text{co } \{x_\alpha\}_{\alpha < N_1}:$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{k_n} p_{n,i} \cdot x_{\alpha_{n,i}} \text{ для некоторых } \alpha_{n,i} < N_1.$$

Т. к. множество индексов $\{\alpha_{n,i}\}$, входящих в последнее представление для элементов x_n, не более чем счетно, то $\exists\ \alpha < N_1$, что $\forall \alpha_{n,i} < \alpha$. Значит $x_n \in \text{co } \{x_\beta : \beta < \alpha\}, \forall n$, а это в сочетании со свойством диаметральной N_1 — последовательности дает

$$\| x_\alpha - x_n \| = \delta = \delta(H),\ \forall n.$$

Отсюда вытекает $\| x_\alpha - x \| = \delta(H)$. Теорема доказана.

§2. МНОГОЗНАЧНЫЕ КВАЗИСЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Сирик [2] доказал теорему о неподвижной точке для многозначного отображения F с условием

$\delta(Fx, Fy) \leqslant q \max \{d(x,y), \delta(x,Fx), \delta(y,Fy), d(x,Fy), d(y,Fx)\}$.

Расстояния d оставлены сириком и другими авторами потому, что применяли метод сечения. Мы в следующей теореме покажем, что в правой части можно положить все расстояния в виде δ.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отображение F, переводящее полное метрическое просртанство X в семейство $BN(X)$ непустых ограниченных подмножеств пространства X, удовлетворяет условию

$$\delta(Fx, Fy) \leqslant q \cdot \max \{d(x, y), \delta(x, Fx), \delta(y, Fy), \delta(x, Fy), \delta(y, Fx)\}$$

для любых $x, y \in X$. Здесь $q < 1$, d обозначаёт расстояние в X, а расстояние δ между множествами определяется так:

$$\delta(A, B) = \sup_{x\in A,\ y\in B} d(x, y)$$

Тогда будем иметь:

1) F обладает единственной неподвижной точкой x^*, причём $F(x^*) = \{x^*\}$.

2) Любая орбита $\{x_n\}_0^\infty$ отображения F (т.е. $x_{n+1} \in Fx_n$) сходится $k\, x^*$, и

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, \delta(x_0, Fx_0).$$

Следующий пример показывает, что для двух даже однозначных отображений аналогичная теорема неверна.

Пример 2: Положим $X = \{a_i\}_1^\infty \cup \{b_i\}_1^\infty \cup \{a'_i\}_1^\infty \cup \{b'_i\}_1^\infty$

В X определим расстояние следующим образом:

$$d(a_i, a_j) = d(a'_i, a'_j) = d(b_i, b_j) = d(b'_i, b'_j) =$$
$$= d(a_i, b_k) = d(a'_i, b'_k) = 2, \quad \text{для } i \neq j,$$
$$d(a_i, a'_k) = d(a_i, b'_k) = d(b_i, a'_k) = d(b_i, b'_k) = 1.$$

Положим

$$F(a_i) = a'_i, \quad F(b_i) = b'_i, \quad F(a'_i) = a'_{i+1}, \quad F(b'_i) = b_{i+1}$$
$$G(a_i) = a_{i+1}, \quad G(b_i) = b_{i+1}, \quad G(a'_i) = b_i, \quad G(b'_i) = a_i.$$

Легко проверить, что (X, d) является полным метрическим пространством, и

$$d(Fx, Gy) \leqslant \frac{1}{2} \max \{d(x, y), \ d(x, Fx), \ d(y, Gy), \ d(x, Gy), \ d(y, Fx)\}$$

Но тем не менее ни F, ни G не имеют неподвижных точек. Введём теперь следующе определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2: Множество Y с неотрицательной функцией ρ, определённой на $Y \times Y$, назовём полуметрическим пространством, если выполнены следующие три условия:

(i) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geqslant 0$ для $\forall x, y \in Y$.

(ii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ для $\forall x, y, z \in Y$.

(iii) Если $x \neq y$, то $\rho(x, y) > 0$.

функцию ρ будем называть расстоянием.

Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ в Y называетстя последовательностью коши, если

$$\lim_{n, m \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ называется сходящейся к x, если $\rho(x_n, x) \to 0$.

Полуметрическое пространство Y называется полным, если любая последовательность Коши сходится в нём.

Замечание: В только что опреденном полуметрическомо пространстве нельзя характеризовать сходимость никакой тополощей, потому что тождественная последовательность $x_n \equiv x$ не сходится, если только $\rho(x, x) > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть однозначное отображение T, переводящее полное полуметрическое пространство Y в Y, удовлетворяет условию

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant q \,.\, \max \{\rho(x, y), \ \rho(x, Tx), \ \rho(y, Ty), \ \rho(x, Ty), \ \rho(y, Tx)\}$$

для любых $x, y \in Y$, где $q < 1$.

Тогда будем иметь

1) T имеет единственную неподвижную точку x^*, причём

$$\rho(x^*, x^*) = 0.$$

2) Любая орбита $\{T^n x\}_0^\infty$ сходится к x^*, и

$$\rho(T^n x, x^*) \leqslant q^n \,.\, \max \left\{ \frac{(x, Tx)}{1 - q}, \ \rho(x, x) \right\}.$$

Доказательство: Эта лемма переносит результат Сирика [2] с метрического на полуметрическое пространство. Мы последуем здесь методу доказательства Сирика.

Положим

$$0\,(x, n) = \{T^i x \ :\ i = 0, 1, 2, \ \dots, n\}$$
$$(\text{условно}\ \ T^0\, x = x)$$

$$0\,(x, \infty) = \{T^i x \ :\ i = 0, 1, 2, \dots\}$$
$$\delta(A) = \delta(A, A) = \sup_{x,\, y \in A} \rho(x, y)$$

Имеем

a) Если $1 \leqslant i, \ \ j \leqslant n$, то $\rho(T^i x, T^j x) \leqslant q \cdot \rho(0\,(x, n))$.

(Действительно, $\rho(T^i x, T^j x) \leqslant q \cdot \max \{\rho(T^{i-1} x, \ T^{j-1} x),$

$\rho(T^{i-1} x, \ T^i x), \quad \rho(T^{j-1} x, \ T^j x), \quad \rho(T^{j-1} x, \ T^i x), \quad \rho(T^{i-1} x, \ T^j x)\zeta \leqslant$
$\leqslant q \cdot \ \delta(0\,(x, n))$.

Из этого неравенства получаем ещё, что диаметр $\delta(0\,(x, n))$ конечного множества $0(x, n)$ должен равняться $\rho(x, \ T^k x)$ при некотором $k : 0 \leqslant k \leqslant n$.

$$\text{b)} \qquad \delta(0\,(x, \infty)) \leqslant \max \left\{\frac{\rho\,(x, Tx)}{1-q}, \rho\,(x, x)\right\}$$

(Действительно, по а) имеем $\delta(O\,(x, n)) = \delta(x, T^k x)$. Если $k \geqslant 1$, то

$$\rho(x, T^k x) \leqslant \rho(x, Tx) + \rho(Tx, T^k x) \leqslant \rho(x, Tx) +$$
$$+ \ q \cdot \delta(0\,(x, n)) = \rho(x, Tx) + q \cdot \rho(x, T^k x),$$

т.е. $\qquad \rho(x, T^k x) \leqslant \rho(x, Tx) + q \cdot \rho(x, T^k x)$

$$\Rightarrow \rho(x, T^k x) \leqslant \frac{\rho(x, Tx)}{1-q}.$$

Значит $\qquad \delta(0\,(x, n)) \leqslant \max \left\{\dfrac{\rho(x, Tx)}{1-q}, \rho(x, x)\right\})$

c) Фиксируем любую $x \in Y$. По а) имеем

$$\rho(T^n x, T^{n+m} x) \leqslant q \cdot \delta(O\,(T^{n-1} x, m + 1)) =$$
$$= q \cdot \rho(T^{n-1} x, T^{n-1+m_1} x) \leqslant q^2 \cdot (0\,(T^{n-2} x, m_1 + 1)) =$$
$$= \dots \leqslant q^n \cdot \delta\,(0(x, m_{n-1} + 1)) \leqslant q^n \cdot \delta(0\,(x, \infty)) \leqslant$$
$$\leqslant q^n \cdot \max \left\{\frac{\rho(x, Tx)}{1-q}, \rho(x, x)\right\}.$$

т. е $\qquad \rho(T^n x, T^{m+n} x) \leqslant q^n \cdot \max \left\{\dfrac{\rho(x, Tx)}{1-q}, \rho(x, x)\right\}.$

Отсюда вытекает, что $\{T^n x\}$ является последовательностью Коши. Ввиду полноты Y имеем, что $T^n x$ сходисят к некоторой точке x^*. В последнем доказанном неравенстве устремляем m к бесконечности и получим

$$\rho(T^n x, x^*) \leqslant q^n \cdot \max\left\{ \frac{\rho(x,Tx)}{1-q},\ \rho(x,x)\right\}$$

Равенство $\rho(x^*, x^*) = 0$ следует из того, что

$$\rho(x^*, x^*) \leqslant \rho(x^*, T^n x) + \rho(T^n x, x^*), \forall n.$$

d) $\rho(x^*, Tx^*) \leqslant \rho(x^*, T^{n+1}x) + \rho(T^{n+1}x, Tx^*) \leqslant$

$\leqslant \rho(x^*, T^{n+1}x) + q \cdot \max\ \{\rho(T^n x, x^*), \rho(T^n x, T^{n+1}x),$

$\rho(x^*, Tx^*), \rho(T^n x, Tx^*), \rho(x^*, T^{n+1}x)\}$.

Устремим n к бесконечности и получим

$\rho(x^*, Tx^*) \leqslant q \cdot \rho(x^*, Tx^*) \Rightarrow \rho(x^*, Tx^*) = 0$

$\Rightarrow x^* = Tx^*$.

Предположим, что существует вторая неподвижная точка y^*. Тогда

$\rho(y^*, y^*) = \rho(Ty^*, Ty^*) \leqslant q \cdot \max\{\rho(y^*, y^*), \rho(y^*, y^*), \ldots\}$

$\Rightarrow \rho(y^*, y^*) = 0$

Далее $\rho(x^*, y^*) = \rho(Tx^*, Ty^*) \leqslant q \cdot \max\{\rho(x^*, y^*), 0, \ldots\}$

$\Rightarrow \rho(x^*, y^*) \leqslant q \cdot \rho(x^*, y^*) \Rightarrow \rho(x^*, y^*) = 0$

$\Rightarrow x^* = y^*$.

ЛЕММА 2. Пусть X—полуметрическое пространство. Тогда семейство $BN(X)$ непустых, ограниченых подмножеств пространства X с расстоянием δ тоже является полуметрическим пространством. Кроме того, если X полно, то $BN(X)$ тоже полно.

Доказательство: Свойство полуметричности легко проверяется. Для полноты: Пусть $\{A_n\}_1^\infty$ — последовательность Коши в $BN(X)$. Возьмём любые $x_n \in A_n$. Последовательность $\{x_n\}$ тоже Коши (но в X). $\Rightarrow x_n$ сходится к некоторой точке x (по расстоянию в пространстве X). Имеем:

$\delta(x,A_n) \leqslant \delta(x,x_n) + \delta(x_n,A_n) \leqslant \delta(x,x_n) + \delta(A_n,A_n) = d(x,x_n) + \delta(A_n,A_n) \to 0.$

Значит A_n сходится к $\{x\}$ в $BN(x)$.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что теорема справедлива и в случае, когда X есть полуметрическое пространство. Продолжим F на всё $BN(X)$ до отображения $\overline{F}$ следующим образом: Если $A \in BN(X)$, мы положим

$$\overline{F}(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$$

Проверим, что $\overline{F}(A) \in BN(X)$:

Зафиксируем любую $x_0 \in A$. Утверждается, что для любого $x \in A$ имеем неравенство

$$\delta(Fx,Fx_0) \leqslant c = \max\left\{ q \cdot \delta(A,A), \frac{q}{1-q}\,\delta(A,Fx_0), q \cdot \delta(x_0, Fx_0)\right\}.$$

Действительно, имеем

$$\delta(Fx,Fx_0) \leqslant q.\max\{d(x,x_0),\ \delta(x,Fx),\ \delta(x_0,Fx_0),\ \delta(x,Fx_0),\ \delta(x_0,Fx)\}.$$

Пусть этот максимум достигается, например, при $\delta(x,Fx)$. Тогда

$$\delta(Fx,Fx_0) \leqslant q.\delta(x,Fx) \leqslant q.\ \delta(x,Fx_0) + q.\ \delta(Fx_0,Fx)$$

$$\Rightarrow (1-q).\ \delta(Fx,Fx_0) \leqslant q.\ \delta(x,Fx_0)$$

$$\Rightarrow \delta(Fx,Fx_0) \leqslant \frac{q}{1-q}\delta(x,Fx_0) \leqslant \frac{q}{1-q}\delta(A,Fx_0) \leqslant c$$

и неравенство доказано).

Из этого неравенства следует, что $\overline{F}(A)$ ограниченно. Легко проверить, что $\overline{F}$ удовлетворяет условию

$$\delta(\overline{F}A,\overline{F}B) \leqslant q.\max\{\delta(A,B),\ \delta(A,\overline{F}A),\ \delta(B,\overline{F}B),\ \delta(A,\overline{F}B),\ \delta(B,\overline{F}A)\}.$$

По лемме 2, семейство $BN(X)$ с расстоянием δ является полным полуметрическим пространством, поэтому, применяя лемму 1, получаем, что $\overline{F}$ имеет единственную неподвижную точку A, причём $\delta(A,A)=0$. Из последнего равенства вытекает, что A, состоит только из одной точки : $A=\{x^*\}$, а следовательно x^* является неподвижной точкой для F, и $F(x^*)=\{x^*\}$.

Утверждение 2 в теореме 2 вытекает из утверждения 2 в лемме 1 (с замечанием, что, $d(x,x)=0$, если X есть метрическое пространство).

Единственность неподвижной точки легко доказывается от противного. Пусть y^* есть вторая неподвижная точка для F : $y^* \in Fy^*$.

Тогда, по лемме 1, последовательность $\overline{F}^n(y^*)$ сходится к x^*. Но с другой стороны из определения $\overline{F}$, имеем всегда $\overline{F}^n(y^*) \ni y^*$.

Поэтому $\{x^*\} \ni y^* \Rightarrow x^* = y^*$. Теорема доказана.

поступила в редакцию 19 июня 1978г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М.С. Бродский и Д. П. Мильман, *О центре выцуклого множества* , Д. А. Н. СССР, 59 (1948) 837–840.
2. Lj. B. Ćirić, *A generalization of Banach contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 45, №2 1974, 267 – 273.
3. Данфорд Н. и Шварц Дж, *Линейные операторы—Общая теория* (Перевод с английского) Иностранная Литература, Москва 1962.
4. Chi-Song-Wong, *Fixed points and characterizations of certain maps*, Pacific J. Math., 54, №1, 1974; 305–312.
5. Chi-Song-Wong, *On kannan maps*, Proc. Amer. Math. Soc., 47, №1, 1975, 105 – 111.