ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

NGUYỄN THỪA HỢP
Ханоиский университет

В настоящей статье исследуется решение одного класса операционных уравнений в банаховом пространстве. Дается его применение к решению линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнении разнообразных типов. Предполагаемый метод обобшит метод С.Р. фирштейна [5] о решений интегро-дифференциального уравнения

$$y\ (x) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 k_i\ (x,\ t)\ y^{(i)}\ (t)\, dt + f(x).$$

§ 1. О РЕШЕНИИ ОДНОГО ОПЕРАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_0, E_1,..., E_n — банаховые пространства над одним и тем же полем K; A_j, T_j, $j = 1, 2,\ldots, n$

— линейные операторы, ограниченные или нет, причем A_j действует из E_j в E_0 и T_j — из E_0 в E_j.

Многие теоретические и практические вопросы приводятся к решению операционного уравнения в E_0:

$$u + \sum_{j=1}^{n} A_j\ T_j\ u = f. \tag{1.1}$$

В этом параграфе, мы изучаем это уравнение с следующими предположениями:

а) $\mathcal{D}(A_j) = E_j$, $R(A_j) \subset \mathcal{D}(T_i)\ i, j = 1,\ldots, n$. Здесь $\mathcal{D}\ (A_j)\ \mathcal{D}\ (T_i)$ — области определения A_j, соответственно T_i, $R\ (A_j)$ — область значения A_j.

б) Произведения $T_i\ A_j$, $i, j = 1,\ldots, n$, — вполне непрерывные операторы из E_j в E_i.

Обозначим через E декартово произведение $E_1, E_2, \ldots, E_n$:

$$E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n ,$$

снабженное естественной алгебраической структурой. E — банахово пространство с нормой :

$$\| u \|_E = \sum_{i=1}^{n} \| u \|_{E_i}. \tag{1.2}$$

Двойственность $<.,.>$ между E и E^* определяется следующим образом :

$$< u, f > = \sum_{i=1}^{n} < u_i , f_i >_{E_i} , \tag{1.3}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n) \in E^*$, $f_i \in E_i^*$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in E$, $u_i \in E_i$ и $<.,.>_{E_i}$ — двойственность между E_i и E_i^*.

Рассмотрим уравнение (1. 1). Из этого получим :

$$T_i u + \sum_{j=1}^{n} T_i A_j T_j u = T_i f, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Последние уравнения могут записаться в виде одного уравнения в E :

$$w + Bw = F, \tag{1.4}$$

причем :

$$w = \begin{pmatrix} T_1 u \\ T_2 u \\ \vdots \\ T_n u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} T_1 p \\ T_2 p \\ \vdots \\ T_n p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} T_1 A_1 & T_1 A_2 \ldots\ldots T_1 A_n \\ T_2 A_1 & T_2 A_2 \ldots\ldots T_2 A_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_n A_1 & T_n A_2 \ldots\ldots T_n A_n \end{pmatrix}$$

Оказывается, что уравнения (1.1) и (1.4) одновременно разрешимы или нет.

Действительно, очевицно, что из разрешимости уравнения (1.1) следует разрешимость уравнения (1.4).

Обратно, если

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

— решение уравнения (1.4), то прямой выкладкой легко проверить, что

$$u = -\sum_{j=1}^{n} A_j w_j + f \tag{1.5}$$

удовлетворяет соотношению $w_i = T_i u$ и следовательно и уравнению (1.1).

Для однородных уравнений

$$u + \sum_{i=1}^{n} A_i T_i u = 0, \tag{1.1$_0$}$$

$$w + Bw = 0 \tag{1.4$_0$}$$

следующее соответствие между их решениями

$$w = \begin{pmatrix} T_1 u \\ T_2 u \\ \vdots \\ T_n u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u = -\sum_{i=1}^{n} A_i \; w_i$$

является биоднозначным и сохраняет линейную зависимость соответствующих элементов так, что уравнения $(\mathrm{I.I})_0$ и $(1.4)_0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Следовательно мы можем заменить изучение уравнения (1.1) изучением эквивалентного ему уравнения (1.4).

Из полной непрерывности операторы $T_i \, Aj$ из E_j в E_i сразу вытекает полная непрерывность оператора B в E так, что (1.4) является уравнением типа Рисс — Шаудера в E.

Хорошо известно, что однородное уравнение

$$w + Bw = 0 \tag{1.4}$$

и его однородное сопряжённое уравнение

$$v + B^* v = 0 \tag{1.4$^*_0$}$$

имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений, скажем $w^{(1)}$, $w^{(2)}, \ldots, w^{(p)}$ и $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)}$ соответственно. Кроме того, неоднородное уравнение

$$w + Bw = F \tag{1.4}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда удовлетворяются соотношений :

$$< F, v^{(i)} > = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{1.6}$$

При выполнении условий (1.6), существует обобщённая резольвента Γ такая, что всякое решение W уравнения (1.4) выражается через правую часть последнего формулой:

$$W = F + \Gamma F + \sum_{j=1}^{p} c_j v^{(j)}, \tag{1.7}$$

где c_j — произвольные постоянные.

Резольвента Γ является матрицей :

$$\Gamma = \| \Gamma_{ij} \|, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

причем Γ_{ij} — линейные непрерывные операторы из E_j в E_i.

Таким образом, из (1.7) и (1.5) следует :

$$u = f + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j T_j f + \sum_{j=1}^{p} c_j u^{(j)}, \tag{1.8}$$

где

$$\gamma_j = -[A_j + \sum_{i=1}^{n} A_i \Gamma_{ij}]$$

$$u^{(j)} = -\sum_{i=1}^{n} A_i W_i^{(j)}\ .$$

Итак, из приведённых рассуждений легко убедимся в справедливости следуюшую теорему :

ТЕОРЕМА 1. I. Однородное уравнение

$$u + \sum_{j=1}^{n} A_j T_j u = 0 \qquad (1.1)_0$$

имеет конечное число линейно независимых решений, скажем $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$. *Это число равно числу линейно независимых решений уравнения*

$$W + BW = 0. \qquad (1.4)$$

2. Для того, чтобы неоднородное уравнение

$$u + \sum_{j-1}^{n} A_j T_j u = f \qquad (1.1)$$

было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия :

$$< F, v^{(i)} > = \sum_{j=1}^{n} < T_j f, v_j^{(i)} >_{E_j} = 0. \qquad (1.9)$$

Здесь $\{v^{(i)}\}$ $i = 1,\ldots, p$ *—полная система линейно независимых решений однородного союзного с* $(1.4)_0$ *уравнения*

$$v + B^* v = 0 \qquad (1.4)_0^*$$

и $v_j^{(i)}$, $j = 1,\ldots, n$ *— компоненты элемента* $v^{(i)}$ *в* E^*.

3. Если условия (1.9) удовлетворены, то существуют обобшенные резольвенты γ_j *из* E_j *в* E_0 *такие, что общее решение уравнения (I.I) дается формулой*

$$u = f + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j T_j f + \sum_{j=1}^{p} c_j u^{(j)}$$

где c_j *— произвольные постоянные.*

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ

В качестве приложения теоремы, ниже изучаем один класс линейного интегро-дифференциального уравнения, который имеет все применение в многих вопросах.

Сначала докажем предварительную лемму.

Пусть Ω и $\mathcal{D}$ — ограниченные измеримые области m_1 — мерного, соответственно m_2 — мерного эвклидова пространства. Через $W_p^k(\Omega)$ обозначим, как правило, соболевские пространства [2].

ЛЕММА. Пусть $\mu(t) \in L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, $r = \max(p,p')$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $k(x,t) \in W_r^m(\mathcal{D} \times \Omega)$, m *— положительное целое число. Тогда интеграл*

$$v(x) = \int_\Omega k(x,t)\,\mu(t)dt \tag{2.1}$$

принадлежит $W_p^m(\mathcal{D})$ *и может дифференцироваться в смысле Соболева под знаком интеграла:*

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \int_\Omega \frac{\partial^\alpha k(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,\mu(t)dt,\ \alpha \leqslant m. \tag{2.2}$$

Интегральные операторы (2.1) и (2.2) вполне непрерывны из $L_p(\Omega)$ *в* $L_p(\mathcal{D})$

Из $r = \max(p,p')$ следует $r' = \min(p,p')$. Из этого вытекает полная непрерывность из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\mathcal{D})$ операторов в правых частях (2.1) и (2.2) (см. [I], стр. 327). Нам остается доказатъ (2.2) и кроме того, достаточно проверить (2.2) для первых производных:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial k(x,t)}{\partial x_i}\,\mu(t)dt\,,\quad i = 1, 2, \dots, m_2\,. \tag{2.3}$$

В самом деле, при $\varphi(x) \in C_0^1(\mathcal{D})$, функции $k(x,t)\mu(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial k(x,t)}{\partial x_i}\,\mu(t)\varphi(x)$ суммируемы в $\mathcal{D} \times \Omega$ и следовательно по теореме фубини:

$$\int_{\mathcal{D}} v(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx \int_\Omega k(x,t)\mu(t)dt = \int_\Omega \mu(t)dt \int_{\mathcal{D}} k(x,t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx =$$

$$= -\int_\Omega \mu(t)dt \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x_i}\,\varphi(x)dx = -\int_{\mathcal{D}} \varphi(x)dx \int_\Omega \frac{\partial k(x,t)}{\partial x_i}\,\mu(t)dt\,.$$

Лемма доказана. Из леммы также следует:

СЛЕДСТВИЕ 1. При предположениях леммы, оператор (2.1) также вполне непрерывен из $L_p(\Omega)$ *в* $W_p(\mathcal{D})$ *при* $k \leqslant m$, *а оператор (2.2) — из* $L_p(\Omega)$ *в* $W_p^k(\mathcal{D})$ *при* $k \leqslant m - \alpha$.

Пусть теперь S — произвольная гладкая m_2-1 мерная поверхность вложенная в $\overline{\mathcal{D}}$ $(S \subset \overline{\mathcal{D}})$. Обозначим, как правило, через $v(x)\,|_S$ след $v(x)$ на S. Тогда имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. При предположениях леммы, оператор

$$v(x)\,[_S = \int_\Omega k(x,t)\mu(t)dt]_S \tag{2.4}$$

вполне непрерывен из $L_p(\Omega)$ *в* $L_p(S)$ *и более общее, из* $L_p(\Omega)$ *в* $W_p^k(S)$ *при* $k \leqslant m-1$.

Это сразу следует из следствия I и из того, что оператор следа из $W_p^m(\mathcal{D})$ в $W_p^{m-\frac{1}{p}}(S)$ ограничен (3).

Замечание 1. Если $k(x,t)$ — матрица с $N\times N$ элементами из $W_r^m(\mathcal{D}\times\Omega)$, $\mu(t)$ — вектор из $[L_p(\Omega)]^N$ то легко видеть, что утверждения леммы и следствии остаются в силе. Достаточно в утверждениях заменить $L_p(\Omega)$, $L_p(\mathcal{D})$, ... на векторные $[L_p(\Omega)]^N$, $[L_p(\mathcal{D})]^N$,...

Замечание 2. Если Ω и $\mathcal{D}$ — n. мерные области одного и того же пространства и $k(x,t)$ — ядра специального вида :

$$k(x,t) = \frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\,,\; r_{xt} = |\,x-t\,|\,,\; \alpha < n-1\,,$$

причем $A(t)$ — ограниченная измеримая функция, то интеграл

$$v(x) = \int_\Omega k(x,t)\mu(t)dt = \int_\Omega \frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\,\mu(t)dt \tag{2.5}$$

при $\mu(t)\in L_p(\Omega)$ также может дифференцироваться под знаком интеграла

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\right)\mu(t)dt \tag{2.6}$$

и оба операторы (2.5) и (2.6) вполне непрерывны из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\mathcal{D})$.

Действительно, возможность дифференцирования по Соболеву под знаком интеграла доказывается как и в выше указанной лемме. Суммируемость в $\mathcal{D}\times\Omega$ функция $\frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\,\mu(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $(\varphi(x)\in C_0^1\,(\mathcal{D})$ сразу вытекает из неравенства :

$$\left|\frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\mu(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{|\,\mu(t)\,|}{\tau_{xt}^\alpha} = \mathrm{const}\,\frac{1}{\tau_{xt}^{\frac{\alpha}{p'}}}\cdot\frac{|\mu(t)|}{\tau_{xt}^{\frac{\alpha}{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[\frac{1}{p'}\,\frac{1}{\tau_{xt}^\alpha} + \frac{1}{p}\,\frac{|\,\mu(t)|^p}{\tau_{xt}^\alpha}\right] \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

Суммируемость $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A(t)}{\tau_{xt}^\alpha}\right)\mu(t)\varphi(x)$ устанавливается аналогично. Кроме того, интеграл (2.5), (2.6) являются интегральными опеторами со слабой сингулярностью гарантирующей полную непрерывность соответствующего оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\mathcal{D})$ (см. [1], стр. 333 — 334).

Переходим теперь к исследованию одного класса интегродифференциального уравнения.

Пусть Ω — ограниченная измеримая область вещественного эвклидова пространства E_n, $\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ — произвольные подобласти Ω, $S_{\beta_1\cdots\beta_n}$ — гладкие поверхности вложенные в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим интегро-дцфференцциальное уравнение :

$$u(x)+\sum_{p=0}^{m}\sum_{\alpha=p}\int\limits_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}k_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)\,\frac{\partial^\alpha u(t)}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}\,dt+ \tag{2.7}$$
$$+\sum_{q=0}^{l}\sum_{\beta=q}\int\limits_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}H_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)\,\frac{\partial^\beta u(\xi)}{\partial\xi_1^{\beta_1}\ldots\partial\xi_n^{\beta_n}}\,dS_\xi=f(x),$$

где $u(x)$, $f(x)$ — вещественные векторы размерности N с компонентами из $W_p^M(\Omega)$, $M=\max(m,l+1)$ и $K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)$, $H_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)$ — вещественные квадратные матрицы порядка N с элементами из $W_r^M(\Omega\times\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n})$, соответственно из $W_r^M(\Omega\times\times S_{\beta_1\cdots\beta_n})$, причем $p>1$, $r=\max(p,p')$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

Уравнение (2.7) можем записать в виде :

$$u+\sum_{p=0}^{m}\sum_{\alpha=p}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}u+\sum_{q=0}^{l}\sum_{\beta=q}\mathcal{A}_{\beta_1\cdots\beta_n}\mathcal{T}_{\beta_1\cdots\beta_n}u=f \tag{2.8}$$

с обозначениями :

$$A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\mu=\int\limits_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)\mu(t)dt\,,\quad \mathcal{A}_{\beta_1\cdots\beta_n}\nu=\int\limits_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}H_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)\nu(\xi)dS_\xi$$

$$T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}u=\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\Bigg|_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}},\quad \mathcal{T}_{\beta_1\cdots\beta_n}u=\frac{\partial^\beta u(x)}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\Bigg|_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}.$$

Из доказанной леммы и её следствии сразу следует полная непрерывность операторы

$T_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$, $T_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\mathcal{A}_{\beta_1\cdots\beta_n}$, $\mathcal{T}_{\beta_1\cdots\beta_n}A_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$, $\mathcal{T}_{\beta'_1\cdots\beta'_n}\mathcal{A}_{\beta_1\cdots\beta_n}$,

из $[L_p(\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n})]^N$ в $[L_p(\Omega_{\alpha'_1\cdots\alpha'_n})]^N$ соответственно из

$[L_p(S_{\beta_1\cdots\beta_n})]^N$ в $[L_p(\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n})]^N$, из $[L_p(\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n})]^N$ в $[L_p(S_{\beta_1\cdots\beta_n})]^N$,

из $[L_p(S_{\beta_1\cdots\beta_n})]^N$ в $L_p(S_{\beta'_1\cdots\beta'_n})]^N$.

В качестве приведенных в начале параграфа пространств $E_0, E_1,\ldots,E_n$ возьмём соответственно пространства $[L_p(\Omega)]^N,\ldots,[L_p(\Omega_{\cdots\alpha_1})]^N,\ldots,n[L_p(S_{\beta_1\cdots\beta})]^N,\ldots$ то легко убедимся в том, что уравнение (2.8) входит в класс уравнения (1.1).

Таким образом, теорема I нам дает следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. 1. *Однородное уравнение в* $[L_p(\Omega)]^N$:

$$u(x)+\sum_{p=0}^{m}\sum_{\beta=p}\int\limits_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}K_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)\,\frac{\partial^{\alpha}u(t)}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}\,dt+$$

$$+\sum_{q=0}^{l}\sum_{\beta=q}\int\limits_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}H_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)\,\frac{\partial^{\beta}u(\xi)}{\partial\xi_1^{\beta_1}\ldots\partial\xi_n^{\beta_n}}\,dS_{\xi}=0 \qquad (2.8)_0$$

имеет конечное число линейно независимых решений, скажем $u^{(1)}, u^{(2)},\ldots, u^{(p)}$. *Это число равно числу линейно независимых решений уравнения в*

$$\left\{\prod_{\alpha_1\cdots\alpha_n}[L_p(\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n})]^N\right\}\times\left\{\prod_{\beta_1\cdots\beta_n}L_p(S_{\beta_1\cdots\beta_n})]^N\right\}$$

$$W+BW=0 \qquad (2.9)_0$$

2. *Для того, чтобы неоднородное уравнение* (2.8) *было разрешимо, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:*

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{\alpha=p}\int\limits_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}v^{(i)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\,\frac{\partial^{\alpha}f(t)}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}\,dt+\sum_{q=0}^{l}\sum_{\beta=q}\int\limits_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}v^{(i)}_{\beta_1\cdots\beta_n}(\xi)\,\frac{\partial^{\beta}f(\xi)}{\partial\xi_1^{\beta_1}\cdots\partial\xi_n^{\beta_n}}\,dS_{\xi}=0$$

$$i=1,2,\ldots,p, \qquad (2.10)$$

Где векторы

$$v^{(i)}=\begin{pmatrix}\vdots\\ v^{(i)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\\ \vdots\\ v^{(i)}_{\beta_1\cdots\beta_n}\\ \vdots\end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,p,$$

составляют полную систему линейно независимых решений однородного сопряженного с (2.9) *уравнения:*

$$v+B^*v=0 \qquad (2.11)$$

3. *Если условия* (2.10) *удовлетворены, то существуют матрицы* $\{\Gamma_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)\}$ $\{\mathcal{C}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)\}$ *такие, что общее решение* (2.8) *дается формулой:*

$$u(x)=f(x)+\sum_{p=0}^{m}\sum_{\alpha=p}\int\limits_{\Omega_{\alpha_1\cdots\alpha_n}}\Gamma_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x,t)\,\frac{\partial^{\alpha}f(t)}{\partial t_1^{\alpha_1}\ldots\partial t_n^{\alpha_n}}\,dt+$$

$$+\sum_{q=0}^{l}\sum_{\beta=q}\int\limits_{S_{\beta_1\cdots\beta_n}}\mathcal{C}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x,\xi)\,\frac{\partial^{\beta}f(\xi)}{\partial\xi_1^{\beta_1}\ldots\partial\xi_n^{\beta_n}}\,dS_{\xi}+\sum_{i=1}^{p}c^{(i)}\,u^{(i)}(x)$$

где $c^{(i)}$ *— произвольные постоянные.*

Замечание. Если ядра $K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x,t)$, $H_{\beta_1\ldots\beta_n}(x,\xi)$ выройденны, т.е.

$$K_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x,t) = \sum_{j=1}^{S\alpha_1\ldots\alpha_n} P_j(x)Q_j(t),$$

$$H_{\beta_1\ldots\beta_n}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\Gamma\beta_1\ldots\beta_n} R_j(x)S_j(\xi),$$

где $P_j(x)$, $R_j(x)$ — векторы стольцы, $Q_j(t)$, $S_j(\xi)$ — векторы строки, то уравнение

$$W + BW = F$$

имеет также выроженное ядро так, что известным методом можем приводить решение рассматриваемого уравнения к решению систем алгебрайческих уравнений.

Пример 1. Пусть задано уравнение :

$$u(x) + \int_\Omega K(x,t)u(t)dt + \int_S H(x,s)\frac{\partial u}{\partial n}(s)dS = f(x) \tag{2.12}$$

где S — граница Ω.

Предполагается, что $u(x),\ f(x) \in W_p^2(\Omega)$, $K(x,t) \in W_r^2(\Omega \times \Omega)$,

$$H(x,s) \in W_r^2(\Omega \times S), \quad r = \max(p,p').$$

Условия разрешимости уравнения (2.12) таковы :

$$\int_\Omega f(x)v_1^{(i)}(x)dx + \int_S \frac{\partial f(s)}{\partial n_s} v_2^{(i)}(s)dS = 0,\ i = 1,2,\ldots,p.$$

где $\left\{ v_1^{(i)}(x),\ v_2^{(i)}(\sigma) \right\}$, $i = 1,\ldots,p$ — полная система линейно независимых решений следующей системы уравнения :

$$\begin{cases} v_1(x) + \int_\Omega K(x,t)v_1(t)dt + \int_S \frac{\partial k(s,x)}{\partial n_s} v_2(s)dS = 0 \\ v_2(\sigma) + \int_\Omega H(t,\sigma)v_1(t)dt + \int_S \frac{\partial H(s,\sigma)}{\partial n_s} v_2(s)dS = 0 \end{cases}$$

Теорема I нам позволяет решить многие интегро-дифференциальные уравнения очень разнообразных типов в зависимости от конкретных операторов T_i.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \int_\Omega K(x,y)u(y)dy + \int_{\mathfrak{D}} H(x,\tau)u(\varphi(\tau))d\tau = f(x). \tag{2.13}$$

Предположим, что $K(x,y) \in L_r(\Omega \times \Omega)$, $r = \max(p,p')$, $H(x,\tau) \in L_p(\Omega \times \mathcal{D})$, $f(x) \in L_p(\Omega)$; $u(x)$ тоже ищется в $L_p(\Omega)$, $\varphi(t)$ — непрерывные функция с областей определения $\overline{\mathcal{D}}$ и с областей значения в Ω.

Здесь

$$T_1 u = u \quad , \qquad T_2 u = u(\varphi(x))$$

Тогда (2.13) разрешимо тогда и только тогда, когда :

$$\int_\Omega v_1^{(i)}(x) f(x) dx + \int_{\mathcal{D}} v_2^{(i)}(\tau) f(\varphi(\tau)) d\tau = 0.$$

$$i = 1,2, \ldots, p,$$

где $v_1^{(i)}(x), v_2^{(i)}(x)$ — полная система линейно независимых решений следующей системы

$$\begin{cases} v_1(x) + \int_\Omega K(y,x) v_1(y) dy + \int_{\mathcal{D}} K(\varphi(\tau),x) v_2(\tau) d\tau = 0 \\ v_2(t) + \int_\Omega H(y,t) v_2(y) dy + \int_{\mathcal{D}} H(\varphi(\tau),t) v_2(\tau) d\tau = 0 . \end{cases}$$

В подробности мы не вдаёмся.

Замечание 1. Тем же методом можно решить более общее следующее уравнение:

$$u(x) + \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \int_{\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x,t) \frac{\partial^\alpha u(t)}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}} dt + \sum_{\beta_1 \ldots \beta_n} \int_{S_{\beta_1 \ldots \beta_n}} H_{\beta_1 \ldots \beta_n}(x,\xi) \frac{\partial^\beta u(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\beta_n}} dS_\xi +$$

$$+ \sum_{\gamma_1 \ldots \gamma_n} \int_{\Omega_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}} L_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(x,t) \frac{\partial^\gamma u(\varphi_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(t))}{\partial t_1^{\gamma_1} \ldots \partial t_n^{\gamma_n}} dt + \sum_{\partial_1 \ldots \partial_n} \int_{S\delta_1 \ldots \delta_n} M\delta_1 \ldots \delta_n(x,\xi) \frac{\partial \partial u(\psi \delta_1 \ldots \delta_n(\xi))}{\partial \xi_1^{\delta^1} \ldots \partial \xi_n^{\delta^n}} dS_\xi =$$

$$= f(x)$$

с следующими предположениями :

а) $\sum\limits_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \ldots, \ldots \sum\limits_{\delta_1 \ldots \delta_n}$ — конечные суммы.

б) $u(x)$ и $f(x)$ — искомый и заданный векторы в некоторой ограниченной области Ω.

в) $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x,t)$, $H_{\beta_1 \ldots \beta_n}(x,\xi)$, $L_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(x,t)$, $M\delta_1 \ldots \delta_n(x,\xi)$ достаточно гладкие матрицы.

д) $\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $\Omega_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}$ — ограниченные области, $S_{\beta_1 \ldots \beta_n}$, $S\delta_1 \ldots \delta_n$ достаточно гладкие многообразия размерности которых не больше $n-1$, кроме того, $\Omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \subset \Omega$, $S_{\beta_1 \ldots \beta_n} \subset \overline{\Omega}$.

г) $\varphi_{\gamma_1 \ldots \gamma_n}(t)$, $\psi\, \delta_1 \ldots \delta_n(\xi)$ — биоднозначные достаточно гладкие функции с областями иопределения $\Omega_{\gamma \ldots \gamma_n}$, соответственно $S\delta_1 \ldots \delta_n$ и с областями значения в Ω

Замечание 2. К решению рассмотрённого в § I уравнения можно приводить решение сингулярное уравнение вида:

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_j}k_j(t,\tau)\,\varphi\,(\alpha_j(\tau))\,d\tau=f(t), \tag{2.14}$$

где

— Γ,Γ_j замкнутые кривые Ляпунова.

— $a(t),b(t),f(t),K_j(t,\tau)$—непрерывные по Гельдеру на Γ, соответственно на $\Gamma\times\Gamma_j$.

— $a^2(t)-b^2(t)\neq 0,\ t\in\Gamma,$

— $\alpha_j\ (\tau)$ — непрерывные по Гельдеру функции на Γ_j, отображающие биоднозначно Γ_j на Γ.

Записав (2.14) в виде:

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t)-\sum_{j=1}^{n_i}\int\limits_{\Gamma}k_j(t,\tau)\,\varphi\,(\alpha_j\ (\tau))d\tau \tag{2.15}$$

методом регуляризация Карлемана — Векуа [4] получаем:

$$\varphi(t)=R\left[-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_j}K_j\,(t,\tau)\,\varphi\,(\alpha_j(\tau))\,d\tau+f(t)\right]+b\,(t)\,Z(t)\,P_{x-1}(t) \tag{2.16}$$

где R — резольвента характеристического уравнения; η — индекс уравнения $P_{\eta-1}(t)$—произвольный полином степени $\eta-1$ при $\eta>0$, и $P_{\eta-1}(t)\equiv 0$ при $\eta\leqslant 0$. В случае $\eta<0$, нуждается ещё приложить к (2. 16) конечное число условий наложенных на правую часть уравнения (2.15):

$$\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma}\chi_i(t)\,dt\int\limits_{\Gamma_j}K_i\,(t,\tau)\varphi\,[\alpha_j(\tau)]\,d\tau=\int\limits_{\Gamma}\chi_i\,(t)\,f(t)\,dt, \tag{2.17}$$

где $\{\chi_i\ (t)\}$, $i=1,\ \ldots,$ — η полная система линейно независимы решений уравнения, союзного с характеристическим.

После известных преобразований, получаем:

$$\varphi(t)+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_j}H_j\,(t,\tau)\,\varphi\,[\alpha_j(\tau)]\,d\tau=Rf+\sum_{k=0}^{\eta-1}C_k\,\psi_k\,(t), \tag{2.18}$$

где $H_j\ (t,\tau)$, $\psi_k\ (t)$ — определенные функции (здесь мы считаем что $\eta>0$). Уравнение (2.18) входит в класс уравнения (1.1) с правой частью содержащей произвольные постоянные. Выписав условий разрешимости уравнения (2.18) получаем систему алгебрайческих уравнений для определения постоянных C_k и из этого легко выводить условия разрешимости исходного уравнения (2.14). На этом мы не останавливаемся.

Поступило в Редакцию 20-5-1978г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Канторович и Г.П. Акилов. *Фуккциональный анализ в нормированных пространствах* Москва 1959.
2. С.Л. Соболев. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике* Изд. ЛГУ 1950.
3. J. Necas: *Les méthodes directes en théorie des équations ellitiques*. Prague 1967.
4. Ф.Д. Гахов. *Краевые задачи*. Москва 1958.
5. С.Р. фирштейн. *О нормально и разрешимости интегро-дифференциальных уравнений* Изв. Выш. учеб. завед. математика 1972, №11, 90 – 97.