ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 4, №1 (1979)

SURFACES MINIMALES ET SINGULARITÉS

LÊ DŨNG TRÁNG
Université de Paris 7.

Dans cette note nous posons une conjecture permettant la construction explicite de surfaces minimales résolvant le problème de Plateau dans $\mathbb{R}^3$ pour certains contours particuliers de $\mathbb{R}^3$. Par faute de temps, l'auteur n'a pas pu encore confirmer ou infirmer l'assertion de cette conjecture avant le congrès: cependant elle est vraie dans les cas les plus simples connus où le contour est, soit le bord d'un disque, soit les bords enlacés de deux disques qui se coupent orthogonalement, soit le nœud de trèfle, soit les nœuds toriques de type (p,q) avec $(p, q) = 1$.

1. LE PROBLÈME DE PLATEAU

(1.1) Soit K un contour fermé de $\mathbb{R}^3$ ayant une ou plusieurs composantes connexes. Le problème de Plateau consiste à chercher les surfaces d'aire minimales dont le bord est K. Ce problème est lié à l'étude des films savonneux dont le bord est K (cf [9]).

Le problème d'existence d'une surface d'aire minimale de bord K a été résolu par J. Douglas (cf [2] et [3]).

K reste le problème de construire explicitement des solutions au problème de Plateau. Nous nous proposons dans cette note de donner des conjectures sur ce dernier problème.

(1.2) Le problème de Plateau est un problème de calcul des variations. En effet, si l'on considère l'ensemble des surfaces de bord K, il s'agit dans ce cas de minimiser l' aire dans cette ensemble. En fait il faut tout d'abord définir ce que l'on entend par surface. On peut le définir comme J. Douglas (cf [8]). En fait il faut élargir l'ensemble des surfaces lisses de $\mathbb{R}^3$ et considérer les "varifolds" de dimension 2 (cf [1]) ou les courants rectifiables (cf [4], [6]). Les surfaces solutions du problème de Plateau ne sont pas nécessairement des variétés différentiables même si K est une variété lisse de dimension 1. Les surfaces de Plateau ont souvent des singularités. A ma connaissance c'est encore un problème ouvert de connaitre les singularités possibles des surfaces de Plateau.

(1.3) Dans les cas que nous allons considérer la surface S de bord K, solution du problème de Plateau, sera non singulière (si la conjecture est vraie), i.e. S sera une surfaces lisse à bord lisse K. Dans ce cas on peut parler du genre de la surface S. D'autre part on rapelle que, si K n' a qu'une composante connexe, i.e. K est un nœud, on définit le genre de K comme étant le genre de la surface de genre minimum ayant le bord K. Une telle surface est appelée surface de Seifert de K.

On a le résultat connu suivant (cf [5]).

THÉORÈME (1. 3. 1). *Soient* S *et* S' *deux surfaces de Seifert de bord* K. *On suppose que le complémentaire de* K *dans le compactifié* $\mathbb{R}^3 \cup \{+\infty\} = \mathbb{S}^3$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est fibré sur* $\mathbb{S}^1$, *alors* S *et* S' *sont isotopes.*

(1.4) Dans le cas où l'on considère une généralisation du problème de Plateau à $\mathbb{C}^n$ (ou à une variété Kählérienne) avec K bord d'une sous — variété analytique complexe de $\mathbb{C}^n$, la solution au problème de Plateau est la variété analytique complexe elle-même (cf [6] Corollary 2.12). Le problème de Plateau se place dans $\mathbb{R}^3$, mais pour certains contours K, nous avons une relation naturelle avec la géométrie analytique complexe, comme nous allons le voir.

2. *NŒUDS ALGÉBRIQUES ET FIBRES DE MILNOR*

(2.1) Soit $f(X, Y)$ un polynôme complexe de 2 variables non constant et sans facteurs carrés.

Soit C la courbe définie par $f = 0$.

Supposons que $0 \in C$, i.e $f(0, 0) = 0$. On note S_ε la sphère centrée en 0 de rayon $\varepsilon > 0$. On sait que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, la sphère S_ε coupe C transversalement. On note $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap C$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, K_ε est une variété de dimension 1 qui est un entrelacement dans S_ε (C'est un nœud si K_ε n'a qu'une seule composante connexe).

Définition (2.1.1) Un entrelacement $K \subset \mathbb{S}^3$ est un entrelacement algébrique strict s'il existe une application conforme φ de $\mathbb{S}^3$ sur S_ε telle que $\varphi(K) \subset S_\varepsilon$ soit un entrelacement défini comme ci-dessus.

Exemples. Si $f = Y$, on obtient que K est le bord d'un disque.

Si $f = Y^2 - X^3$, on obtient le nœud de trèfle.

Remarquons que si $K \subset \mathbb{S}^3$ est un entrelacement algébrique strict et si $x \in \mathbb{S}^3 - K$ la projection stéréographique $\pi = \mathbb{S}^3 - \{x\} \to \mathbb{R}^3$ permet de considérer des contours $\pi(K) \subset \mathbb{R}^3$. Nous les appellerons encore entrelacements algébriques stricts de $\mathbb{R}^3$. Ce sont ces contours pour lesquels nous pensons pouvoir construire des surfaces minimales. On a le résultat suivant du à Milnor.

Théorème (2. 1. 2) (cf [J]). *Si* $\varepsilon > 0$ *est assez petit,* $f/|f|$ *induit une fibration de* $S_\varepsilon - K_\varepsilon$ *sur* $\mathbb{S}^1$.

En d'autres termes la fonction argument de f fibre le complémentaire de $S_\varepsilon - K_\varepsilon$.

Notons $F_\theta = \{x \in S_\varepsilon - K_\varepsilon, \arg f(x) = \theta\}$

avec $\theta \in [0,2\pi]$. On voit que $\overline{F}_\theta = F_\theta \cup K_\varepsilon$ et que le bord ∂F_θ de F_θ est K_ε . On appelle F_θ la fibre de Milnor de f en 0.

(2. 2) Un résultat récent et non publié de M.C. Grima et B. Morin nous permet de construire combinatoirement et algorithmiquement une surface isotope à la fibre de Milnor F_θ en fonction des paires de Puiseux de chacune des branches analytiques de f en 0 et des nombres d'intersection deux à deux de ces branches. Afin d'alléger la rédaction de la note nous ne donnons pas ici cette construction.

3. *CONJECTURES*

Soit $K_\varepsilon \subset S_\varepsilon$ un entrelacement construit comme précédemment. Soit $x \in S_\varepsilon - K_\varepsilon$ et $x \notin F_\theta$. Soit $\pi = S_\varepsilon - \{x\} \to \mathbf{R}^3$ la projection stéréographique. Nous conjecturons que :

(3.1) Supposons que $\pi(K_\varepsilon)$ soit bord d'une surface de Plateau lisse, alors $\pi(\overline{F}_\theta)$ est isotope à une surface de Plateau de bord $\pi(K_\varepsilon)$ (les mécaniciens diraient qu'il existe une déformation élastique de $\pi(\overline{F}_\theta)$ sur une surface de Plateau de bord $\pi(K_\varepsilon)$).

(3. 2) $\pi(K_\varepsilon)$ est bord d'une surface de Plateau lisse.

Grâce aux constructions de B. Morin et M.C. Grima si ces conjectures sont vraies, cela donnerait une construction à isotopie près de certaines surfaces de Plateau. Il est facile de voir que ces conjectures sont vraies quand $f = Y$, $f = XY$, $f = Y^2 - X^3$.

Remarquons que d'après (1.3.1) si K_ε est un nœud il suffit de montrer qu'il existe une surface minimale lisse de genre égal à celui de K_ε.

Si ces conjectures sont vraies, elles le sont pour tout entrelacement algébrique strict.

Nous remercions B. Morin qui a totalement inspiré l'idée de ces conjectures.

BIBLIOGRAPHIE

1. F.J. Almgren. *Plateau's problem.* W.A. Benjamin. N.Y., 1966.
2. J. Douglas. *Solution of the problem of Plateau,* Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263—321.
3. J. Douglas. *Minimal surfaces of higher topological structure,* Ann. of Math. 40 (1939), 205-298.
4. H. Federer and w. H. Fleming. *Normal and integral currents,* Ann. of Math, 72 (1960), 458-520.
5. F. Laudenpach. *Variétés de dimension 3,* Astérisque.
6. H.B. Lawson. *Minimal varieties in real and complex geometry,* Séminaire de Math. Sup., Press de l' Université de Montréal. 1973.
7. J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces, Ann.* Math. Stud. 61, Princeton.
8. R. Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Van Nostrand Reinhold Math. Stud. 25, 1969.
9. J.A.F. Plateau. *Statique Expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires.* Gauthier-Villars. Paris 1973.