ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ P – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТАХ.

HOÀNG ĐÌNH DUNG
Математический Институт, Ханой.

В статье дается новый метод решения некоторых задач теории фильтрации в в неоднородных изотропных грунтах, основанный на применении p -аналитических функций комплексного переменного.

§1. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ y^k –АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ФОРМУЛЫ ИХ ОБРАЩЕНИЯ

1⁰. По определению, так называемые p -аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = y^k$ $(k = \text{const} > 0)$, или для кратности, y^k– аналитические функции $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений эллиптического типа [1]

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y^k}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{y^k}\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1}$$

Пусть G -область в верхней полуплоскости $z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ -аналитическая функция от z в области G. Тогда методом p -аналитических функций Г. Н. Положего [1] можно показать, что функция $F(z)$, определенная равенством

$$F(z) = \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}\frac{f(\zeta)}{i}\left(\frac{z-\bar z}{2i}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta + i\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar z}{2}-\zeta\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta,$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \tag{2}$$

где интегрирование от точки z_0 до точки z ведется вдоль любого кусочно-гладкого контура r, лежащего в G; $arg(z-\zeta)(\bar{z}-\zeta)$ фиксируется тем или иным способом, является y^k-аналитической в области G в следующих случаях:

а) область G в своей границе имеет отрезок действительный оси L, $\operatorname{Im} f(z)/L=0$, z_0-любая точка на L (нефиксированная);

б) область G в своей границе имеет бесконечно удаленную точку $z_0=\infty$, и при $z \to z_0 = \infty$ вдоль контура Γ существует предельное положение касательной и $f(z)=0(|z|^{-k-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$).

Множества еналитических функций $f(z)$, укаванных в случаях «а», «б» будем обозначать соответственно через T_1, T_2.

2°. Пусть Γ_1 -разрез в верхней полуплоскости $z = x + iy$, проведенныйвдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точку $(x,0)$ с точкой (x, a), причем точка $(x,0)$ лежит на L (случай «а»). Далее, $(x^+_, y)$ и $(x^-_, y)$-точки с координатами (x,y), лежащие соответственно на правом и левом краях разреза Γ_1, $z^+ = x^+ + iy$, $z^- = x^- + iy$. Считаем, что если $z = x + iy$ и $\zeta = x + i\eta$ $(\eta < y)$ на правом крае Γ_1, то $arg(z-\zeta)(\bar{z}-\zeta) = 0$.

Рассмотрим интегральное представление (2) в этом случае $(Z_0 = x + i0)$. На правом крае разреза Γ_1 оно принимает вид

$$F(z^+) = U(x^+,y) + iV(x^+,y) = \int_0^y \left[y^{1-k} u(x^+,\eta) + i\eta v(x^+,\eta) \right] (y^2-\eta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\eta. \tag{3}$$

По формуле обращения интегрального уравнения типа Абеля [1] можем записать формулу обращения представления (3) в виде

$$u(x^+,y)+iyv(x^+,y) = \begin{cases} K\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^y \dfrac{d^m[y^{k-1}U(x^+,\eta)+iV(x^+,\eta)]}{(d\eta^2)^m} \dfrac{\eta d\eta}{(y^2-\eta^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ K\dfrac{d^m[y^{k-1}\;U(x^+,y)+iV(x^+,y)]}{(dy^2)^m}, & k = 2m, \end{cases} \tag{4}$$

Где, как и в дальнейшем, m-целое число: $m = \left[\dfrac{k}{2}\right]$, K — постоянная:

$$K = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{k}{2} + 1\right)}$$ (в частности $K = \frac{2}{\pi}$ если $k = 1$), Γ — эйлеров интеграл первого рода.

3°. Пусть Γ_2 — разрез в верхней полуплоскости $z = x + iy$, проведенный вдоль прямолинейного вертикального отрезка, идущего из бесконечности в точку (x,b). Считаем, что если точки $z = x + iy$ и $\zeta = x + i\eta$ лежат на Γ_2^+ (на правом крае разреза Γ_2), то $\arg(z-\zeta)(\bar{z}-\zeta) = -\pi$.

Рассмотрим интегральное подставение (2) (случай «б», $z_0 = \infty$). На Γ_2^+ оно принимает вид

$$F(z^+) = U(x^+,y) + iV(x^+,y) = \int\limits_{\infty}^{y} \Big\{ \eta^{1-k} \operatorname{Re} \left[f(\xi^+) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} \right] +$$

$$+ i\eta \operatorname{Im} \left[f(\xi^+) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} \right] \Big\} (\eta^2 - y^2)^{\frac{k}{2}-1} d\eta. \qquad (5)$$

Формула обращения интегрального представления (5) на Γ_2^+ записывается в виде

$$\operatorname{Re} \left[f(z^+) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} \right] + iy \operatorname{Im} \left[f(z^+) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} \right] =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{m-1} K \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int\limits_{\infty}^{y} \dfrac{d^m [\eta^{k-1} U(x^+,\eta) + iV(x^+,\eta)]}{(d\eta^2)^m} \dfrac{\eta d\eta}{(\eta^2 - y^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\[2ex] (-1)^{m-1} K y \dfrac{d^m [y^{k-1} U(x^+,y) + iV(x^+,y)]}{(dy^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \qquad (6)$$

4°. Пусть область G в своей границе имеет отрезок действительной оси L и бесконечно удаленную точку $z_0 = \infty$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — функция, аналитическая в G, удовлетворяющая условиям: $v(x,y)/_L = 0$ и при $z \to z_0 = \infty$ $f(z) = 0\left(|z|^{-k-\varepsilon}\right)$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$), Тогда интегральные представления (3) и (5) определяют одну и ту же y^k-аналитическую функцию $F(z)$ в G (при сделанном выше выборе $\arg (z-\zeta)(\overline{z}-\zeta)$), то есть имеем

$$F(z) = \int\limits_0^y [y^{1-k} u(x,\eta) + i\eta v(x,\eta)] (y^2 - \eta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\eta = \int\limits_{\infty}^{y} \Big\{ y^{1-k} \operatorname{Re} [f(\zeta) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] +$$

$$+ i\eta \operatorname{Im} [f(\zeta) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] \Big\} (\eta^2 - y^2)^{\frac{k}{2}-1} d\eta, \quad (\zeta = x + i\eta). \qquad (7)$$

Последнее равенство можно доказать, если заметим, что

$$\int\limits_0^y [y^{1-k} u(x,\eta) + i\eta v(x,\eta)] (y^2 - \eta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\eta - \int\limits_{\infty}^{y} \Big\{ y^{1-k} \operatorname{Re} [f(\zeta) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] +$$

$$+ i\eta \operatorname{Im}\left[f(\zeta)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right]\Big\}(\eta^2-y^2)^{\frac{k}{2}-1}d\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\,(y^{1-k}+\eta)\,(y^2-\eta^2)^{\frac{k}{2}-1}d\eta,$$

$$\arg(y^2-\eta^2) = \begin{cases} -\pi & \eta > y > 0, \\ +\pi & \eta < -y. \end{cases}$$

Если предполагается, что аналитическая функция $f(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке и имеет в этой точке нуль не ниже первого порядка, что, например, справедливо, если функция $u\,(o,y)$ тождественно равна нулю при $|y| > N$, где N — достаточно большое число, то в частности при $k=1$, вместо (7) имеем

$$F(z) = \int\limits_0^y [u(x,\eta) + i\eta v(x,\eta)]\,(y^2-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}d\eta =$$

$$= \int\limits_{\infty}^{y} \Big\{\operatorname{Re}[f(\zeta)e^{i\frac{\pi}{2}}] + i\eta \operatorname{Im}[f(\zeta)e^{i\frac{\pi}{2}}]\Big\}(\eta^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}d\eta + \frac{i}{4}\operatorname{Im}\left[2\pi i \underset{\xi=\infty}{\text{выч}} \frac{(\zeta-x)\,f(\zeta)}{\sqrt{(z-\zeta)(\bar{z}-\zeta)}}\right]. \quad (8)$$

§ 2. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ y^k —АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теперь по аналогии с решением краевых задач x^k — аналитических функций [1] дано применение указанных в §1 формул обращения к решению в замкнутом виде некоторых краевых задач y^k — аналитических функций.

1°. *Задача I.* Пусть D — первая четверть плоскости $z = x+iy$, $x>0$, $y>0$. Требуется найти функцию $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, y^k — аналитическую в D, непрерывную на границе D, за исключением, может быть, точек $(0, 0)$, $(0, a)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$U|_{x=0} = E(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant a), \quad (9)$$

$$V|_{x=0} = H(y)\,.\,y^{k-1} \quad (a \leqslant y < \infty), \quad (10)$$

$$V|_{y=0} = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \quad (11)$$

где $E(y)$, $H(y)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от y при соответственно $0 \leqslant y \leqslant a$ и $a \leqslant y < \infty$.

Ищем $F(z)$ в виде (3). Из формулы обращения (4) и условия (9) получаем

$$u|_{x=0} = e(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant a), \quad (12)$$

где

$$e(y) = \begin{cases} K\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int\limits_0^y \dfrac{d^m[\eta^{k-1}E(\eta)]}{(d\eta^2)^m}\,\dfrac{\eta d\eta}{(y^2-\eta^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\[2ex] Ky\,\dfrac{d^m[y^{k-1}E(y)]}{(dy^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (13)$$

Предполагая, что $f(z) \subset T_2$ в области D, при помощи интегрального представления (5) и формулы обращения (6) из условия (10) имеем

$$y \operatorname{Im}\left[f(z)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right] = h(y) \quad (a \leqslant y < \infty), \tag{14}$$

где

$$h(y) = \begin{cases} (-1)^{m-1} K \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_{\infty}^{y} \dfrac{d^m[\eta^{k-1} H(\eta)]}{(dy^2)^m} \dfrac{\eta d\eta}{(\eta^2-y^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} Ky \dfrac{d^m[y^{k-1} H(y)]}{(dy^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \tag{15}$$

Из условия (10) легко следует, что

$$v(x,y)|_{y=0} = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty). \tag{16}$$

Таким образом, при краевых условиях (12), (14), (16) имеем краевую задачу Гильберта для аналитической функции $f(z)$ в области D [2]. Записав решение этой задачи в квадратурах и подставив его в (3) получаем решение задачи 1 в явном виде Например, при $k = 1$ это решение можно записать следующим образом

$$F(z) = \int_0^y [\operatorname{Re} f(\zeta) + i\eta \operatorname{Im} f(\zeta)] (y^2-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\eta, \ \zeta = x + i\eta,$$

где аналитическая функция $f(z)$ определяется по формуле Шварца [4]

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0,t)}{t - iz} dt, \tag{17}$$

функция $u(0,t)$ определяется по (12) — (15)

$$u(0,t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_0^t \dfrac{E(\eta)\, \eta d\eta}{\sqrt{t^2-\eta^2}}, & 0 \leqslant t \leqslant a, \\ -\dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{\infty}^t \dfrac{H(\eta)\, \eta d\eta}{\sqrt{\eta^2-t^2}}, & a \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{18}$$

В этом случае если предполагается, что функция $u(0,t)$ тождественно равна нулю при $|t| > N$, где N — достаточно большое число, то при $a \leqslant t < \infty$ из (8) имеем

$$u(0,t) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \int_{\infty}^{t} \frac{H(\eta) - C}{\sqrt{\eta^2 - t^2}} \eta d\eta, \ a \leqslant t < \infty, \tag{19}$$

где

$$C = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u\,(0,t)\,dt. \tag{20}$$

2°. *Задача 2.* Пусть D — полуполоса: $0 < x < h = \text{const}$, $0 < y < \infty$. Требуется найти функцию $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, y^k — аналитическую в D, непрерывную на границе D, за исключением, быть может, точек $(0,0)$, $(h,0)$, $(0,a)$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$(\alpha_1 y^{k-1} U + \beta_1 V)\big|_{x=0} = H_1(y)\cdot y^{k-1}\ (0 \leqslant y \leqslant a), \tag{21}$$

$$(\alpha_2 y^{k-1} U + \beta_2 V)\big|_{x=h} = H_2(y)\cdot y^{k-1}(0 \leqslant y < \infty), \tag{22}$$

$$(\alpha_3 y^{k-1} U + \beta_3 V)\big|_{x=0} = E(y)\cdot y^{k-1}(a \leqslant y < \infty), \tag{23}$$

$$V\big|_{y=0} = 0\ \ (0 \leqslant x \leqslant h), \tag{24}$$

где $H_1(y)$, $H_2(y)$, $E(y)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от y на соответствующих отрезках, α_i, β_i $(i = 1, 2, 3)$ — заданные вещественные постоянные

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0. \tag{25}$$

Ищем решение в виде (5). Из формулы обращения (6) и условий (21), (22), получаем

$$\left\{\alpha_1 \mathrm{Re}\left[f(z)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right] + \beta_1 y \mathrm{Im}\left[f(z)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right]\right\}_{x=0} = h_1(y)\,(0 \leqslant y \leqslant a), \tag{26}$$

$$\left\{\alpha_2 \mathrm{Re}\left[f(z)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right] + \beta_2 y \mathrm{Im}\left[f(z)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right]\right\}_{x=h} = h_2(y)\,(0 \leqslant y < \infty), \tag{27}$$

где при $0 \leqslant y \leqslant a$, $h_1(y)$ — функция, определенная правой частью равенства (15) при условии, что $H(\eta)$ и $H(y)$ заменяются на $H_1(\eta)$ и $H_1(y)$; при $0 \leqslant y < \infty$ $h_2(y)$ — правая часть (15) при условии, что $H(\eta)$ и $H(y)$ — $H_2(\eta)$ и $H_2(y)$.

Пусть $f(z) \subset T_2$ в области D, по § 1. 4° при $a \leqslant y < \infty$, можем записать $F(z)$ в виде (3). Тогда из формулы обращения (4) и условия (24) имеем

$$(\alpha_3 u + \beta_3 y v)\big|_{x=0} = e(y)\ \ (a \leqslant y < \infty), \tag{28}$$

где $e(y)$ определяется равенством (13).

Из условия (24) следует, что

$$v\Big|_{y=0}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant h). \tag{29}$$

Записав решение $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ краевой задачи Гильберта (26)—(29) для полуполосы в квадратурах и подставив его в (5) получаем решение задачи 2 в явном виде.

Пусть, для определенности, $h=\pi$. При помощи формул Сохоцкого в случае расширения условий, налагаемых на плотность [2], по аналогии с [1], убеждаемся, что мнимая часть аналитической функции

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\Phi(t)\operatorname{sh}t\,dt}{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}iz}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\psi(t)\operatorname{sh}(t+i\pi)dt}{\operatorname{ch}(t+i\pi)-\operatorname{ch}iz}, \tag{30}$$

где $\Phi(t)$, $\psi(t)$, — функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, за исключением, быть может, множества точек меры нули, $\Phi(-t)=-\Phi(t)$, $\psi(-t)=-\psi(t)$, обращается в нуль при $y=0$ и принимает заданные значения $\Phi(y)$ и $\psi(y)$ соответственно при $z=iy$ и $z=\pi+iy\ (y>0)$.

В качестве примера на полученное решение задачи 2 запишем $F(z)$ при $k=1$ в следующем случае: $\alpha_1=\alpha_2=\beta_3=1$, $\alpha_3=\beta_1=\beta_2=0$. В этом случае в силу (5) решение имеет вид

$$F(z)=\int\limits_{\infty}^{y}\left\{\operatorname{Re}\left[f(\xi)e^{i\frac{\pi}{2}}\right]+i\eta\operatorname{Im}\left[f(\xi)e^{\frac{\pi}{2}}\right]\right\}(\eta^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}d\eta, \tag{31}$$

$$\zeta=x+i\eta,$$

где $f(z)$ определяется равенством (30), в котором $\Phi(t)$ и $\psi(t)$ записываются так

$$\Phi(t)=\begin{cases} h_1(t) & (0\leqslant t\leqslant a),\\ e(t) & (a\leqslant t<\infty),\end{cases} \tag{32}$$

$$\psi(t)=\quad h_2(t)\ (0\leqslant t<\infty), \tag{33}$$

при

$$h_1(y)=\frac{2}{\pi}\,\frac{d}{dy}\int\limits_\infty^y\frac{H_1(\eta)\eta\,d\eta}{\sqrt{\eta^2-y^2}}\ (0\leqslant y\leqslant a),$$

$$e(y)=\frac{2}{\pi y}\,\frac{d}{dy}\int\limits_0^y\frac{E(\eta)\eta\,d\eta}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\ (0\leqslant y<\infty), \tag{34}$$

$$h_2(y)=\frac{2}{\pi}\,\frac{d}{dy}\int\limits_\infty^y\frac{H_2(\eta)\eta\,d\eta}{\sqrt{\eta^2-y^2}}\ (0\leqslant y<\infty). \tag{35}$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЕ P-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ.

По [1], [3] комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ фильтрационного потока, в случае фильтрации в неоднородной среде с коэффициентом $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(x, y)$, будет p — аналитической функцией с характеристикой $p = \chi$, где $\chi = \dfrac{\tilde{\chi}}{\chi_0}$, χ_0 — некоторое постоянное значение коэффициента фильтрации. При помощи комплексного потенциала определяются все элементы движения: вектор скорости фильтрации, давление, линии тока и расход жидкости.

1°. Пусть в неоднородном водопроницаемом грунте с коэффициентом фильтрации $\chi = \dfrac{1}{|x|^k}$ (k=const > 0) имеет плоский флюбет (основание гидротехнического сооружения, имеющее вид горизонтального отрезка) шириной $2l$ (фиг. 1). Требуется определить все элементы движения.

Не нарушая общности, считаем, что $\chi_0 = 1$. Выпишем краевые условия для комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$. Границы водоемов представляют эквипотенциальные линии. Следовательно, на них можно принять условия:

на $C'D'$ $\varphi = -\dfrac{H}{2}$,

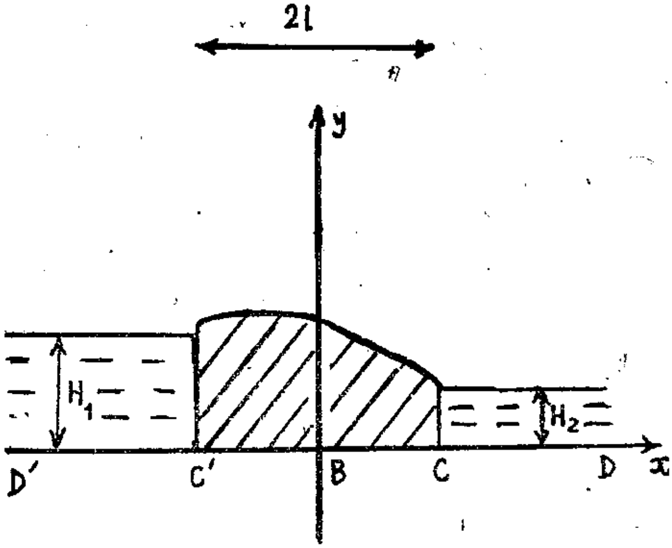
на CD $\varphi = \dfrac{H}{2}$,

где $H = H_1 - H_2$ — действующий напор,

$C'BC$ — линия тока, положим на ней $\psi = -E$, постоянная E будет определена в следующем.

Вследствие симметричности потока на линии AB, которая также является линией равного потенциала, должны иметь

$$\varphi = 0.$$



Фиг 1.

Будем рассматривать только правую половину чертежа. Введем вместо w новую функцию

$$F = U + iV = iw \tag{36}$$

и новую переменную

$$\zeta = \xi + i\eta = iz. \tag{37}$$

Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x^k\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-x^k\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Из последних и (36), (37) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=\frac{1}{\eta^k}\frac{\partial V}{\partial\eta},\quad \frac{\partial U}{\partial\eta}=-\frac{1}{\eta^k}\frac{\partial V}{\partial\xi} \tag{38}$$

Таким образом, $F(\zeta)=U(\xi,\eta)+iV(\xi,\eta)-\eta^k$ —аналитическая функция комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$.

Из краевых условий для $w=\varphi+i\Psi$ имеем

$$U_{\mid \xi=0}=E\ (0\leqslant\eta\leqslant l), \tag{39}$$

$$V_{\mid \xi=0}=\frac{H}{2}(l\leqslant\eta<\infty), \tag{40}$$

$$V_{\mid \eta=0}=0\ \ (0\leqslant\xi<\infty). \tag{41}$$

Краевая задача (38) —(41) является задачей, рассмотренной в §2.1° в простом частном случае.

2°. В этом пункте задача, рассмотренная в §3. 1°, обобщается на случай наличия водоупора. Пусть глубина водопроницаемой полосы — π (фиг. 2). Комплексный потенциал $w=\varphi+i\psi$ принимает следующие краевые условия

на $C'D'$ $\varphi=-\dfrac{H}{2}$,

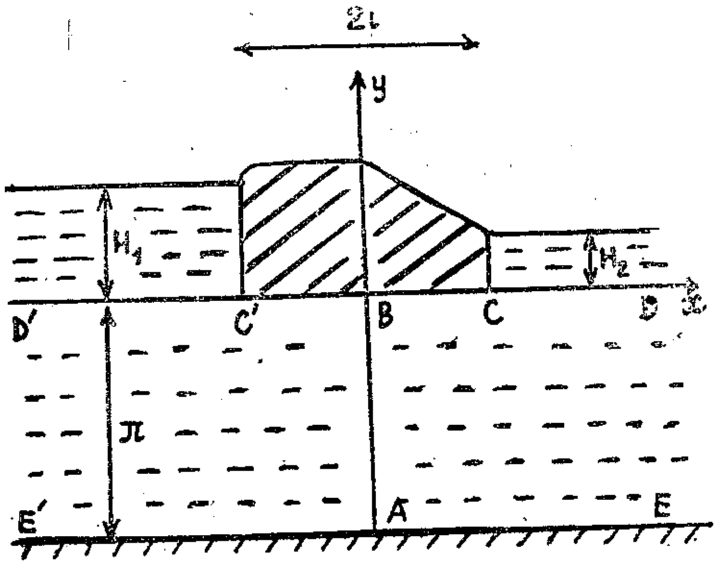
на CD $\varphi=\dfrac{H}{2}$,

где $H=H_1-H_2$.

на BA $\varphi=0$,

на $C'BC$ $\psi=-E$,

на $E'AE$ $\psi=0$.



Фиг 2.

Как и при решении задачи § 3. 1°, с помощью замены функции (36) и переменной (37) эта задача приводится к следующей задаче для η^k — асимптотической функции комплексного переменного $F(\zeta)=U(\xi,\eta)+iV(\zeta,\eta)$ в полуполосе

$$U_{\mid \xi=0}=E\ (0\leqslant\eta\leqslant l), \tag{42}$$

$$U_{\mid \xi=\pi}=0\ (0\leqslant\eta<\infty), \tag{43}$$

$$V_{|\xi=0} = \frac{H}{2}(l \leqslant \eta < \infty), \tag{44}$$

$$V_{|\eta=0} = 0\ (0 \leqslant \xi \leqslant \pi). \tag{45}$$

Краевая задача (38), (42) — (45) является задачей, рассмотренной в § 2. 2⁰ в простом частном случае.

Поступило в редакцию 10-4-1978г.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Положий Г. Н. *Теория и применение р-аналитические и (р.р) - аналитических функции* Киев 1973.
2. Гахов Ф.Д., *Краевые задачи*. Москва, 1977.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод*. Москва, 1978.
4. Мусхелишвили Н.И. *Снигулярные интегральные уравнения*. Москва, 1968.