ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 4, №1 (1979)

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА И МЕТОД ОТЫСКАНИЯ КОРНЕЙ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

BÙI THẾ TÂM
Институт Математики ханой.

В настояшей работе исследуются общая схема построения модифицированных функций Лагранжа и сходимость двойственных методов, приводится один метод отыскания корней монотонных отображений.

§I. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА

Будем рассматривать общую задачу выпуклого программирования

$$f(x) \to \sup,\ g(x) \geqslant 0,\ x \in G, \tag{I}$$

где $x \in E^n$, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x)) \in E^m$, функции $f(x)$, $g_i(x)$ выпуклы вверх на G, G — выпуклое подмножество E^n, E^n n — мерное евклидово пространство. С помошью кла́ссичесой функции Лагранжа $F^0(x, y) = f(x) + (g(x), y)$, $x \in G$, $y \geqslant 0$, введем задачу, двойственную (I)

$$\psi^0(y) \equiv \sup_{x \in G} F^0(x, y) \to \inf,\ y \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть $\mu(g, y)$ — функция $2m$ переменных, принимающая конечные значения для всех $g \in E^m$, $y \in E^m_+$, удовлетворяющая следующим условиям:

A1. $\mu(g, y)$ вогнута и монотонна по g при любом фиксированном $y \geqslant 0$, выпукла по y при любом фиксированном $g \in E^m$.

A2.
$$\inf_{y \geqslant 0} \mu(g, y) = \begin{cases} 0 & , \quad g \geqslant 0, \\ -\infty & , \quad g \ngeqslant 0. \end{cases}$$

С помошью функции μ (g, y) определим функцию

$$F_\mu(x, y) = f(x) + \mu(g(x), y),\ x \in G,\ y \geqslant 0,$$

При соблюдении условия А1 $F_\mu(x, y)$ — вогнуто-выпуклая функция на $G \times E_+^m$.

Функция $F_\mu(x, y)$ порождает пару двойственных задач

$$\varphi_\mu(x) \equiv \inf_{y \geqslant 0} F_\mu(x, y) \to \mathrm{Sup},\ x \in G, \tag{3}$$

$$\psi_\mu(y) \equiv \sup_{x \in G} F_\mu(x, y) \to \inf,\ y \geqslant 0. \tag{4}$$

Из условия А2 следует, что задача (3) совпадает с задачей (1), т.е.

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} f(x), & x \in R, \\ -\infty, & x \notin R, \end{cases} \tag{5}$$

где $R = \{x : g(x) \geqslant 0,\ x \in G\}$. Функция $F_\mu(x, y)$ называется модифицированной функцией Лагранжа для задачи (1), задача (4) — двойственной задачей по отношению к задаче (1).

ТЕОРЕМА 1. Если $\mu(g,y)$ удовлетворяет А2, то следующие утверждения эквивалентны:

1) *(x^*, y^*), $x^* \in G$, $y^* \geqslant 0$, является седловой точкой $F_\mu(x,y)$,*

2) *x^* есть решение задачи (1), y^* — решение задачи (4), причём $f(x^*) = \psi_\mu(y^*)$,*

3) *$x^* \in \operatorname{Argmax}_{x \in G} F_\mu(x, y^*)$, $g(x^*) \geqslant 0$ и $\mu(g(x^*),y^*) = 0$.*

Доказательство 1.) $\Rightarrow$ 2). Пусть (x^*, y^*) является седловой точкой $F_\mu(x,y)$, т.е.

$$F_\mu(x,y^*) \leqslant F_\mu(x^*, y^*) \leqslant F_\mu(x^*,y), \forall\, x \in G, \forall y \geqslant 0 \tag{6}$$

Правая часть неравенства (6) приводится к неравенству $\mu(g(x^*),y^*) \leqslant \mu(g(x^*), y)$, $\forall y \geqslant 0$. Отсюда и из А2 вытекает $g(x^*) \geqslant 0$, т.е. $x^* \in R$. С другой стороны, из (5) имеем для всех $x \in R$ $f(x^*) = \varphi_\mu(x^*) = F_\mu(x^*, y^*) \geqslant F_\mu(x,y^*) \geqslant \inf_{y \geqslant 0} F_\mu(x,y) =$ $=\varphi_\mu(x) = f(x)$. Это означает, что x^* — решение задачи (1).

Далее, имеем для любого $y \geqslant 0$ $\psi_\mu(y^*) = F_\mu(x^*, y^*) \leqslant F_\mu(x^*, y) \leqslant$ $\leqslant \sup_{x \in G} F_\mu(x,y) = \psi_\mu(y)$, т.е. y^* — решение задачи (4). Из (5) и (6) получаем $f(x^*) = \varphi_\mu(x^*) = \psi_\mu(y^*)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что x^* и y^* — решения задачи (1) и (4), причём $f(x^*) = \psi_\mu(y^*)$.

В силу (5) имеем для всех $x \in G$, $y \geqslant 0$ $F_\mu(x,y^*) \leqslant \sup_{x' \in G} F_\mu(x',y^*) = \psi_\mu(y^*) =$ $f(x^*) = \varphi_\mu(x^*) = \inf_{y' \geqslant 0} F_\mu(x^*,y') \leqslant F_\mu(x^*, y)$. Это означает, что (x^*, y^*) есть седловая точка функции $F_\mu(x,y)$, в частности, $F_\mu(x^*,y^*) \geqslant F_\mu(x,y^*)$, $\forall\, x \in G$.

Неравенство $g(x^*) \geqslant 0$ очевидно. Из А2 и неравенства $F_\mu(x^*,y^*) \leqslant F_\mu(x^*, y)$, $\forall y \geqslant 0$, получаем $\mu(g(x^*),y^*) = \inf_{y \geqslant 0} \mu(g(x^*),y) = 0$.

3) $\to$ 1). Из А2 вытекает $\mu(g, y) \geqslant 0$, $\forall g \geqslant 0$, $\forall y \geqslant 0$. Отсюда и из предположения следует, что для всех $x \in G$, $y \geqslant 0$ справедливо $F_\mu(x,y^*) \leqslant F_\mu(x^*,y^*) = f(x^*) \leqslant f(x^*) + \mu(g(x^*),y) = F_\mu(x^*,y)$, т.е. (x^*,y^*) — седловая точка функции $F_\mu(x,y)$. Теорема доказана.

При выполнении условия А2 для задач (1) и (4) всегда имеет место неравенство $\sup\limits_{x\in R} f(x) \leqslant \inf\limits_{y\geqslant 0} \psi_\mu(y)$. В качестве очевидных следствий из обобщённой теоремы Дж. Фон. Неймана ([2, стр. 192]) получаем следующие теоремы двойственности.

ТЕОРЕМА 2. Если функции $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = 1,\dots, m$, непрерывны на G где G замкнуто, функция $\mu(g,y)$ удовлетворяет А1 — А2, множество R^* решений задачи (1) непусто и ограничено, то $\max\limits_{x\in R} f(x) = \inf\limits_{y\geqslant 0} \varphi_\mu(y)$.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются утсловия А1 —А2, $\mu(g,y)$ непрерывна по y, множество Y^*_μ решений задачи (4) непусто и ограничено, то $\sup\limits_{x\in R} f(x) = \min\limits_{y\geqslant 0} \psi_\mu(y)$.

Из теорем 1, 2, 3 следует, что $F_\mu(x,y)$ обладает непустом множеством седловых точек, если выполняются, условия теоремы 2 и Y^*_μ непусто, или выполняются условия теоремы 3 и R^* непусто. Условия АI — А2 аналогичны приведённым в [I] условиям. Приведём некоторые примеры функций $\mu(g,y)$, удовлетворяющих АI — А2.

а) $\mu(g,y) = \sup\limits_{z\geqslant 0}\left[(g-z,y) - \frac{1}{2}(Q(g-z), g-z)\right]$ где $g \in E^m$, $y \geqslant 0$, Q— положительно определённая матрица $m \times m$.

б) $\mu(g,y) = \sup\limits_{z\geqslant 0}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(g_i - z_i)y_i - \gamma\sum\limits_{i=1}^{m}|g_i - z_i|^{1+\partial}\right]$, где $\gamma > 0$, $g \in E^m$, $y \geqslant 0$, $\partial > 0$.

в) $\mu(g,y) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{g_i\} \times \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{y_i\}$, $g \in E^m$, $y \geqslant 0$

§2. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. Будем исследовть важный класс модифицированных функций Лагранжа. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $\alpha(u)$, $u \in E^m$, удовлетворяет условиям

Б1. $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 0$,

Б2. $\alpha(u)$ — строго выпукла и растёт на бесконечности быстрее любой линейной функции, т.е. $\lim\limits_{|u|\to\infty}[(p,u) - \alpha(u)] = -\infty$, $\forall p$.

С помощью $\alpha(u)$ построим модифицированную функцию Лагранжа

$$F^{\alpha}(x,y)=f(x)+\sup_{z\geqslant 0}[(g(x)-z,y)-\alpha(g(x)-z)],\ x\in G,\ y\in E^m. \tag{7}$$

Естественно, можем расширить область определения функции $F^0(x,y)$, считая

$$F^0(x,)=\begin{cases} f(x)+(g(x),y), & y\geqslant 0,\\ +\infty & , y\not\geqslant 0,\end{cases}$$

Тогда

$$\psi^0(y)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in G}[f(x)+(g(x),y)], & y\geqslant 0,\\ +\infty & y\not\geqslant 0.\end{cases}$$

Выясним свойства функции $F^{\alpha}(x,y)$.

ЛЕММА 1. $F^{\alpha}(x,y)$ выпукла вверх по x при любом фиксированном $y\in E^m$ и выпукла вниз по y при любом фиксированном $x\in G$, причём $\varphi^{\alpha}(x)=\inf\limits_{y\in E^m}F^{\alpha}(x,y)$ выпукла вверх по $x\in G$ и $\psi^{\alpha}(y)=\sup\limits_{x\in G}F^{\alpha}(x,y)$ выпукла вниз по $y\in E^m$.

Доказательство. Выпуклость вниз по y функции $F^{\alpha}(x,y)$ очевидна. Положим

$$\mu(g,y)=\sup_{z\geqslant 0}[(g-z,y)-\alpha(g-z)],\ g,y\in E^m.$$

Прежде всего докажем, что $\mu(g,y)$ вогнута по $g\in E^m$. Действительно, для любых $g^1,\ g^2\in E^m$; $\lambda,\nu\in[0,1]$, $\lambda+\nu=1$, имеем $\mu(\lambda g^1+\nu g^2,y)=\sup\limits_{z\geqslant 0}[(\lambda g^1+\nu g^2-z,y)-\alpha(\lambda g^1+\nu g^2-z)]$. Если положить $z=\lambda z'+\nu z''$, то

$$\sup_{z',z''\geqslant 0}[(\lambda g^1+\nu g^2-(\lambda z'+\nu z''),y)-\alpha(\lambda g^1+\nu g^2-(\lambda z'+\nu z''))]=$$
$$=\sup_{z\geqslant 0}[(\lambda g^1+\nu g^2-z,y)-\alpha(\lambda g^1+\nu g^2-z)].$$

Поэтому

$$\mu(\lambda g^1+\nu g^2,y)\geqslant\sup_{z',z''\geqslant 0}[\lambda(g^1-z',y)+\nu(g^2-z'',y)-\lambda\alpha(g^1-z')-\nu\alpha(g^2-z'')]=$$
$$=\lambda\sup_{z'\geqslant 0}[(g^1-z',y)-\alpha(g^1-z')]+\nu\sup_{z''\geqslant 0}[(g^2-z'',y)-\alpha(g^2-z'')]=$$
$$=\lambda\mu(g^1,y)+\nu\mu(g^2,y). \tag{8}$$

Далее, убедимся о монотонности функции $\mu(g,y)$ по g. Из Б2 следует, что при фиксированных $g,\ y\in E^m$ вогнутая функция $(g-z,y)-\alpha(g-z)$ достигает максимума по $z\geqslant 0$ в единственной точке $z^*\geqslant 0$ и имеет место неравенство

$$-y+\alpha'(g-z^*)\leqslant 0. \tag{9}$$

Из единственности точки z^* вытекает дифференцируемость функции $\mu(g,y)$ по g, причём с учетом (9) имеем

$$\nabla_g\mu(g,y)=y-\alpha'(g-z^*)\geqslant 0,\ g,y\in E^m. \tag{10}$$

Отсюда получаем монотонность $\mu(g,y)$ по g, т.е.

$$\mu(g^2,y)\geqslant\mu(g^1,y),\ g^2\geqslant g^1,\ y\in E^m. \tag{11}$$

Неравенства (8), (11) и вогнутость функций $f(x)$ и $g_i\ (x)$ обеспечивают вогнутость $F^*(x,y)$ по x при фиксированном $y \in E^m$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если для экстремального значения $\tilde{v}$ двойственной задачи (2) справедливо неравенство $v < \infty$ то функция $\psi^\alpha(y)$ непрерывно дифференцируема при всех $y \in E^m$. Множество Y^*_α точек минимума функции $\psi^\alpha(y), y \in E^m$ совпадает с множеством Y^* точек минимума функции $\psi^0(y),\ y \in E^m$.

Доказательство. 1) Рассмотрим семейство задач выпуклого программирования, зависящее от векторного параметра $u \in E^m$

$$f(x) \to \sup,\ g(x) \geqslant u,\ x \in G. \tag{12}$$

Обозначим через $\bar{p}(u)$ экстремальное значение целевой функции обобщённой задачи соответствующей (12). Функция $\bar{p}(u)$ выпукла вверх и полунепрерывна сверху. Как показано в [1], $\psi^\alpha_{(y)}$ может быть представлена в виде $\psi^\alpha(y) = \operatorname{Sup}\limits_u [\bar{p}(u) + uy - \alpha(u)]$. Из Б2 и условия $\tilde{v} < \infty$ следует, что функция $\bar{p}(u) + uy - \alpha(u)$ при фиксированном $y \in E^m$ достигает максимума в единственной точке $u(y)$. Отсюда можно вывести дифференцируемость $\psi^\alpha(y)$, причём $\nabla \psi^\alpha(y) = u(y)$.

2) Функция $\Psi^0(y)$ может быть записана в виде

$$\psi^0(y) = \operatorname{Sup}_{x \in G} [f(x) + \operatorname{Sup}_{z \geqslant 0} (g(x) - z, y)] = \operatorname{Sup}_u [\bar{p}(u) + uy].$$

Предположим теперь, что $y^* \in Y^*_\alpha$. это эквивалентно соблюдению соотношения

$$0 = \nabla \psi^\alpha(y^*) = u(y^*) = \arg\max_u [\bar{p}(u) + uy^* - \alpha(u)].$$

В силу условия БI последнее равносильно равенству $0 = l(0) + y^* - \alpha'(0) = l(0) + y^*$, где $l(0)$ — вектор, опорный для $\bar{p}(u)$ при $u = 0$. Это означает, что

$$0 \in \operatorname{Arg}\max_u [\bar{p}(u) + uy^*]. \tag{13}$$

Так как $\tilde{v} < \infty$, всегда имеет место обобщённое соотношение двойственности $\bar{v} = \tilde{v}$.

Включение (13) эквивалентно соотношению $\psi^0(y^*) = \bar{p}(0) = \bar{v} = \tilde{v}$ т. е. $y^* \in Y^*$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Задача $\operatorname{Sup}\limits_{x \in G} \varphi^\alpha(x)$ *эквивалентна задаче (1), т.е.*

$$\varphi^\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & x \in R, \\ -\infty, & x \notin R. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Поскольку для всех $y \geqslant 0$ при $g = 0$ функция $(g - z, y) - \alpha(g - z)$ достигает максимума, равного нулю, в единственной точке $z^* = 0$, то с учётом (10) получаем

$$\mu(0,y) = \operatorname{Sup}_{z \geqslant 0} [(-z,\ y) - \alpha(-z)] = 0, \tag{14}$$

$$\nabla_g \mu(0,y) = y, \quad \forall y \geqslant 0.$$

Используя вогнутость по g функции $\mu(g,y)$ в доказательстве леммы 1 и (14), имеем

$$\mu(g, y) \leqslant \mu(0, y) + (\nabla_g \mu(0, y), g) = (y, g), \ \forall g, \ \forall y \geqslant 0 \tag{15}$$

Если $x \notin R$, т.е. $g(x) \ngeqslant 0$, то из (15) следует $\inf\limits_{y \geqslant 0} \mu(g(x), y) = -\infty$. Отсюда получаем

$$\varphi^\alpha(x) = f(x) + \inf_{y \in E^m} \mu(g(x), y) = -\infty, \ x \notin R.$$

2) Пусть $x \in R$, т.е. $g(x) \geqslant 0$. Из (14) и (11)

$$\mu(g,y) \geqslant 0, \ \forall g \geqslant 0, \ \forall y \geqslant 0. \tag{16}$$

Неравенства (15), (16) приводят к соотношению

$$\operatorname*{Inf}_{y \geqslant 0} \ \mu(g(x), y) = 0, \ x \in R. \tag{17}$$

Рассмотрим $\mu(g, y)$ при $y \ngeqslant 0$ Для любого $y \ngeqslant 0$ обозначим через y^+ такой вектор, что

$$y_i^+ = \begin{cases} y_i, & y_i \geqslant 0, \\ 0, & y_i < 0. \end{cases}$$

Тогда имеем для любого $y \ngeqslant 0$

$$\mu(0, y) = \operatorname*{Sup}_{z \geqslant 0} [(-z,y) - \alpha(-z)] =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{z \geqslant 0} \Big[\sum_{y_i \geqslant 0} -z_i y_i + \sum_{y_i < 0} -z_i y_i - \alpha(-z)\Big] \geqslant \operatorname*{Sup}_{z \geqslant 0} [(-z, y^+) - \alpha(-z)] = 0$$

Отсюда с учётом (11) получаем $\mu(g, y) \geqslant 0, \ \forall g \geqslant 0, \ \forall y \ngeqslant 0$, следовательно,

$$\inf_{y \ngeqslant 0} \mu(g,y) \geqslant 0, \ \forall g \geqslant 0 \tag{18}$$

Из (17), (18) вытекает $\varphi^\alpha(x) = f(x) + \inf\limits_{y \in E^m} \mu(g(x), y) = f(x), \ x \in R$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если функция* $F^0(x, y)$ *имеет непустое множесто* $R^* \times Y^*$ *седловых точек, то множество седловых точек функции* $F^\alpha(x, y)$ *совпадает с* $R^* \times Y^*$ *и устойчиво по* x, *т.е.*. $\operatorname*{Arg\,max}\limits_{x \in G} F^\alpha(x, y^*) \equiv R^*, \ \forall y^* \in Y^*$.

Доказательсво 1) Из лемм 2,3 следует, что множество седловых точек функции $F^\alpha(x, y)$ совпадает с $R^* \times Y^*$.

2) Пусть x^* — произвольная точка R^*. Из (15), (16) и равенства $(g(x^*), y^*) = 0$ вытекает $\mu(g(x^*), y^*) = 0$.Отсюда с учётом неравенства $\alpha(u) \geqslant 0, \ \forall u$, справедливы неравенства $F^\alpha(x,y^*) \leqslant f(x) + \operatorname*{Sup}\limits_{z \geqslant 0} (g(x) - z, \ y^*) = f(x) + (g(x), y^*) = F^0(x, \ y^*) \leqslant$ $\leqslant F^0(x^*, y^*) = f(x^*) = F^\alpha(x^*, y^*), \ \forall x \in G$. Это означает $R^* \subset \operatorname*{Arg\,max}\limits_{x \in G} F^\alpha(x, y^*)$.

Для доказательства обратного включения предположим, что $x' \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x\in G} F^\alpha(x, y^*)$. Тогда из Б1 и соотношения $\nabla\psi^\alpha(y^*) = 0$ получаем $F^\alpha(x', y^*) = f(x') + (g(x') - z', y^*) - \alpha(g(x') - z') = f(x') + (\nabla\psi^\alpha(y^*), y^*) - \alpha(\nabla\psi^\alpha(y^*)) = f(x')$, где (x', z') — точка, где функция $f(x) + (g(x) - z, y^*) - \alpha(g(x) - z)$ достигает максимума по $(x, z) \in G \times E^m_+$. Так как $F^0(x, y)$ обладает непустым множеством $R^* \times y^*$ седловых точек, имеем $\tilde{v} = \bar{p}(0) = v = \operatorname{Sup}\limits_{x\in G} f(x)$. Поэтому $f(x') = F^\alpha(x', y^*) = \max\limits_{x\in G} F^\alpha(x, y^*) = \psi^\alpha(y^*) = \operatorname{Sup}\limits_{u} [\bar{p}(u) + uy^* - \alpha(u)] = \bar{p}(0) = v$. Далее, из соотношения $g(x') - z' = \nabla\psi^\alpha(y^*) = 0$, $z' \geqslant 0$, следует $g(x') \geqslant 0$. Следовательно, $x' \in R^*$, т.е. $\operatorname{Arg}\max\limits_{x\in G} F^\alpha(x, y^*) \subset R^*$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть множество R^* решений задачи (1) непусто и ограничено, функции $f(x)$, $g_i(x)$ непрерывны и G замкнуто. Тогда при любом фиксированном $\bar{y} \in E^m$ функция $F^\alpha(x, \bar{y})$ достигает максимума по $x \in G$ на непустом ограниченном множестве $\tilde{X}(\bar{y})$.

Доказательство. Условия теоремы гарантируют соблюдение двойственного соотношения

$$\max_{x\in R} f(x) = v = \inf_{y\geqslant 0} \psi^0(y).$$

Пусть $x^* \in R^*$, $\bar{y} \in E^m$. Достаточно рассмотреть функцию $F^\alpha(x, \bar{y})$ на непустом (содержащем x^*) замкнутом множестве $G' = \{x \in G :\ F^\alpha(x, \bar{y}) \geqslant F^\alpha(x^*, \bar{y})\} \subseteq G$.

Благодаря условию Б2 верхяя грань в правой части (7) при фиксированных x, y достигается в единственной точке $z(x, y)$, причём

$$\nabla_y F^\alpha(x, y) = g(x) - z(x, y). \tag{19}$$

Следовательно, $F^\alpha(x, y)$ удовлетворяет тождеству

$$F^\alpha(x, y) = f(x) + (\nabla_y F^\alpha(x, y), y) - \alpha(\nabla_y F^\alpha(x, y)). \tag{20}$$

Из леммы 3 имеем для произвольной точки $x \in G'$

$$F^\alpha(x, \bar{y}) \geqslant F^\alpha(x^*, \bar{y}) \geqslant \inf_{y' \in E^m} F^\alpha(x^*, y') = \varphi^\alpha(x^*) = f(x^*) = v. \tag{21}$$

Выберем точку $\hat{y} \geqslant 0$, такую, что $v = \inf\limits_{y\geqslant 0} \psi^0(y) \geqslant \psi^0(\hat{y}) - 1$,

Отсюда с учётом (19) имеем при $x \in G$

$$v \geqslant \sup_{x' \in G} F^0(x', \hat{y}) - 1 \geqslant F^0(x, \hat{y}) - 1 =$$

$$= f(x) + (g(x), \hat{y}) - 1 \geqslant f(x) + (g(x), \hat{y}) - (z(x, \bar{y}), \hat{y}) - 1 =$$

$$= f(x) + (\nabla F^\alpha(x, \bar{y}), \hat{y}) - 1, \tag{22}$$

где $z(x, \bar{y}) \geqslant 0$ — вектор, в котором верхняя грань в (7) достигается при фиксированных x, $\bar{y}$. Из (20), (21) и (22) вытекает

$$F^\alpha(x, \bar{y}) = f(x) + (\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y}), \bar{y}) - \alpha(\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})) \geqslant$$

$\geqslant v \geqslant f(x) + (\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y}), \hat{y}) - 1, \forall x \in G'$, или $(\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y}), \hat{y} - \bar{y}) + \alpha(\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})) \leqslant 1, \forall x \in G'$. Отсюда с учётом Б2 следует, что множество $\{\|\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})\| : x \in G'\}$ ограничено, т.е. $\|\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})\| \leqslant \nu(\bar{y}, \hat{y}), \forall x \in G'$, где константа ν зависит от $\bar{y}$ и $\hat{y}$. Из последнего неравенства имеем

$$\nu^2(\bar{y}, \hat{y}) \geqslant \left(\frac{\partial F^\alpha(x, \bar{y})}{\partial y_i}\right)^2, \text{ следовательно, } \frac{\partial F^\alpha(x, \bar{y})}{\partial y_i} \geqslant -\nu(\bar{y}, \hat{y}), \forall x \in G'.$$

Отсюда с учётом (19) получаем $g_i(x) = \dfrac{\partial F^\alpha(x, \bar{y})}{\partial y_i} + z_i(x, \bar{y}) \geqslant \dfrac{\partial F^\alpha(x, \bar{y})}{\partial y_i}$

$-\nu(\bar{y}, \hat{y}), \forall x \in G'$.

Соотношения (20), (21) приводят к равенству

$f(x) \geqslant v - (\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y}), \bar{y}) + \alpha(\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})) \geqslant v - (\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y}), \bar{y}) \geqslant$

$\geqslant v - |\nabla_y F^\alpha(x, \bar{y})| \cdot |\bar{y}| \geqslant v - |\bar{y}| \cdot \nu(\bar{y}, \hat{y}), \forall x \in G'$. Поэтому.

$G' \subset G'' = \{x \in G : g_i(x) \geqslant -\nu(\bar{y}, \hat{y}), i = 1, \ldots, m, f(x) \geqslant v - |\bar{y}| \cdot \nu(\bar{y}, \hat{y})\}$.

Поскольку множество $R^* = \{x \in G : g(x) \geqslant 0, f(x) \geqslant v\}$ решений задачи (1) ограничено, то G'' ограничено, значит, G' ограничено. Из компактности непустого множества G' следует, что непрерывная по x функция $F^\alpha(x, \bar{y})$ достигает своего максимума на G', а начит, на G. При этом множество её точек максимума $\tilde{X}(\bar{y}) \subset G'$, следовательно, $\tilde{X}(\bar{y})$ ограничено. Теорема доказана.

Заметим, что $F^0(x, y)$ не обладает свойствами, приведёнными в лемме 2 и теоремах 4 и 5. В [1] доказаны свойства функции $F^\alpha(x, y)$, где $\alpha(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(u_i)$, функция $\alpha_i(u_i)$ — дважды дифференцируема, сепарабельна и сильно выпукла.

2. Теперь перейдём к исследованию двойственных методов градиентного типа.

а) Пусть функция $\alpha(u)$ удовлетворяет БI—Б2. Если элементы задачи (1) удовлетворяют условиям, приведенным в теореме 5, то можем построить итерационный процесс

$$x^k \in \operatorname{Arg}\max_{x \in G} F^\alpha(x, y^k),$$

$$y^{k+1} = \begin{cases} y^k - \gamma_k u_k / \|u_k\|, & u_k \neq 0, \\ y^k, & u_k = 0, \ k = 0,1,\ldots, \end{cases}$$

где $y^0 \in E^m$, $\gamma_k > 0$, $u_k = \nabla\psi^\alpha(y^k) = \nabla_y F^\alpha(x^k, y^k)$.

Используя результаты [4] об обобщённом градиентном методе, получаем едующие утверждения.

Если y^* непусто и ограничено, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$,

то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(y^k, Y^*) = 0$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(x^k) \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = v$.

Еслм множество Y^* непусто, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ и

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = y^* \in Y^*$, а $\{x^k\}$ — решение задачи (I).

6) Пусть $\alpha(u)$ удовлетворяет БI и условию сильной выпуклости
Б3. $(\alpha'(u_1) - \alpha'(u_2),\ u_1 - u_2) \geqslant \gamma\,|u_1 - u_2|^2$, $\gamma > 0$, $\forall\, u_1, u_2$.

Условие Б2 является следствием условий БI и Б3. Действительно, это следует из соотношений

$$(p, u) - \alpha(u) = (p, u) - \int_0^1 (\alpha'(\tau u), u)\, d\tau =$$
$$= (p, u) - \int_0^1 \frac{1}{\tau}(\alpha'(\tau u) - \alpha'(0), \tau u - 0)\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant |p| \cdot |u| - \int_0^1 \frac{1}{\tau}\gamma\,|\tau u|^2\, d\tau = |p| \cdot |u| - \gamma\,|u|^2.$$

Как показано в [5], при условиах БI и Б3 градиент функции $\psi^\alpha(y)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $1/\gamma$. Тогда можем построить процесс

$$\begin{cases} x^k \in G,\ F^\alpha(x^k, y^k) \geqslant \psi^\alpha(y^k) - \delta_k, \\ y^{k+1} = y^k - \gamma_k \nabla_y F^\alpha(x^k, y^k),\ k = 0, 1, \dots, \\ \delta_k \geqslant 0,\ 0 < \Gamma_1 \leqslant \gamma_k \leqslant \Gamma_2 < 2\gamma,\ y^0 \in E^m. \end{cases} \tag{23}$$

По схеме в [3] можно доказать справедливость оценки
$|\nabla\psi^\alpha(y^k) - \nabla_y F^\alpha(x^k, y^k)| \leqslant (2\delta_k/\gamma)^{1/2}$, $\forall k$. Используя результаты [3] о градиентном методе при наличии возмущений, получаем следуюшие утверждения о сходимости последовательности $\{x^k, y^k\}$, определяемой соотношениями (23).

Если множество y^* решений двойственной задачи (2) непусто и ограничено и $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(y^k, Y^*) = 0$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(x^k) \geqslant 0$

и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = v$. Если Y^* непусто и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{\delta_k} < \infty$, то

$\lim\limits_{k\to\infty} y^k = y^* \in Y^*$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_i(x^k) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = \overline{v}$, где $\overline{v}$ — экстремальное значение целевой функции обобщённой задачи, соответствующей (1).

Для случая дважды дифференцируемой функции $\alpha(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i(u_i)$ соответствующие результаты получены в [3].

Замечание. Предположим, что $G \equiv E^n$, функции $f(x)$, $g_i(x)$ непрерывно дифференцируемы и $f(x)$ сильно вогнута, т.е.

$$(\nabla f(x^1) - \nabla f(x^2), x^1 - x^2) \leqslant -m \mid x^1 - x^2 \mid^2, \; x^1, x^2 \in E^n, \; m > 0.$$

Тогда для того, чтобы имели место приведённые выше утверждения о сходимости $\{x^k, y^k\}$ процесса (23), на каждой итерации достаточно максимизировать $F^\alpha(x, y^k)$ до выполнения неравенства $\mid \nabla_x F^\alpha(x^k, y^k) \mid^2 \leqslant \delta_k$, причём последовательность $\{\delta_k\}$, удовлетворяющая либо условию $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ (если Y^* непусто и ограничено), либо условию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{\delta_k} < \infty$ (если Y^* непусто), может быть зафиксирована до начала вычислений. Действительно, это следует из оценки $\psi^\alpha(y^k) - F^\alpha(x^k, y^k) = F^\alpha(x_*^k, y^k) - F^\alpha(x^k, y^k) \leqslant \mid \nabla_x F^\alpha(x^k, y^k) \mid^2/2m \leqslant \delta_k/2m$, где x_*^k — единственная точка максимума сильно вогнутой функции $F^\alpha(x, y^k)$.

3. Для решения задачи (1) в [5] построен двойственный метод типа Д. Бертсекаса

$$\begin{cases} x^k \in \operatorname*{Arg\,max}\limits_{x \in G} F^\alpha(x, y^k), \\ y^{k+1} = y^k - \alpha'(\nabla \psi^\alpha(y^k)), \quad k = 0,1,\ldots, \end{cases} \tag{24}$$

и доказано, что если $\alpha(u)$ удовлетворяет условиям Б1 — Б2, R^* и Y^* непусты и ограничены, функции $f(x)$ и $g_i(x)$ непрерывны на замкнутом множестве G, то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho\left(y^k, Y^*\right) = 0$, $\left\{x^k\right\}$ — обобщённое решение задачи (1). В дальнейшем докажем конечность метода (24) в случае линейного программирования.

Рассматривается пара двойственных задач линейного программирования

$$(c, x) \to \max, \; Ax \leqslant b, \; x \geqslant 0, \tag{25}$$

$$(b, y) \to \min, \; A^T y \geqslant c, \; y \geqslant 0, \tag{26}$$

где $x, c \in E^n$; $b, y \in E^m$; A — матрица $m \times n$. Будем предполагать, что множество $\overline{R}^*$ решений задачи (25) непусто и ограничено. Тогда множество $\overline{Y}^*$ решений задачи (26) тоже непусто. Составим модифицированную функцию Лагранжа

$$F^\alpha(x, y) = (c, x) + \sup_{z \geqslant 0} \left[(b - Ax - z, y) - \alpha(b - Ax - z)\right], \; x \geqslant 0, \; y \in E^m,$$

где $\alpha(u)$ удовлетворяет условиям Б1 — Б2. Итерационный процесс (24) для задачи (25) имеет вид

$$\begin{cases} x^k \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x\geqslant 0} F^\alpha(x, y^k), \\ y^{k+1} = y^k - \alpha'(u_k), k=0,1..., \end{cases} \tag{27}$$

где $y^0 \in E^m$, $u_k = \nabla_y F^\alpha(x^k, y^k) = b - Ax^k - z^k$, (x^k, z^k) точка, в которой функция $\widetilde{F}^\alpha(x, z, y^k) = (c, x) + (b - Ax - z, y^k) - \alpha(b - Ax - z)$ достигает максимума. Утверждение о конечности метода (27) в случае $\alpha(u) = \gamma\ |u|^2/2$, $\gamma > 0$ получено в [6].

ЛЕММА 4. Пусть $Y^* \neq \phi$ *— множество решений задачи* $\min(b, y)$, $y \in Q$, *где* $y \in E^m$, *а* Q *— выпуклое многогранное множество. Тогда найдётся* $\varepsilon > 0$ *такое, что если* y' *— решение задачи* $\min(b', y)$, $y \in Q$, *где* $|b' - b| < \varepsilon$, *то* $y' \in Y^*$.

Доказательство этой леммы содержится в [6].

ТЕОРЕМА 6. Для любого $y^0 \in E^m$ *метод* (27) *конечен, т.е. найдётся* N *такое что* $x^N \in \overline{R}^*$, $y^N \in \overline{Y}^*$.

Доказательство. Рассмотрим пару двойственных задач

$$(Ax^k + z^k, y) \to \min,\ A^T y \geqslant c,\ y \geqslant 0, \tag{28}$$

$$(c, x) \to \max,\ Ax \leqslant Ax^k + z^k,\ x \geqslant 0. \tag{29}$$

Задача (29) эквивалентна следующей задаче

$$(c, x) \to \max,\ Ax + z = Ax^k + z^k,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0. \tag{30}$$

Так как (x^k, z^k) определяется путём максимизации $\widetilde{F}^\alpha(x, z, y^k)$ по $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, имеем $(c, x^k) + (b - Ax^k - z^k, y^k) - \alpha(b - Ax^k - z^k) \geqslant (c, x) + (b - Ax - z, y^k) - \alpha(b - Ax - z)$, $\forall x \geqslant 0$, $\forall z \geqslant 0$. Поэтому для всех допустимых точек задачи (30) $(c, x^k) \geqslant (c, x)$, следовательно, x^k —решение задачи(29)

Поскольку x^k максимизирует функцию $\widetilde{F}^\alpha(x, z^k, y^k)$ по $x \geqslant 0$, имеем следующие соотношения

$$\nabla_x \widetilde{F}^\alpha(x^k, z^k, y^k) = C - A^T(y^k - \alpha'(b - Ax^k - z^k))$$

$$= C - A^T y^{k+1} \leqslant 0, \tag{31}$$

$$(\nabla_x \widetilde{F}^\alpha(x^k, z^k, y^k), x^k) = (c - A^T y^{k+1}, x^k) = 0. \tag{32}$$

Аналогично, поскольку z^k максимизирует функцию $\widetilde{F}^\alpha(x^k, z, y^k)$ по $z \geqslant 0$, получаем

$$\nabla_z \widetilde{F}^\alpha(x^k, z^k, y^k) = -y^k + \alpha'(b - Ax^k - z^k) = -y^{k+1} \leqslant 0, \tag{33}$$

$$(\nabla_z \widetilde{F}^\alpha(x^k, z^k, y^k), z^k) = -(y^{k+1}, z^k) = 0. \tag{34}$$

Соотношения (31), (33) показывают, что y^{k+1} — допустимая точка задачи (28) Из (32), (34) вытекает $(Ax^k + z^k, y^{k+1}) = (Ax^k, y^{k+1}) = (c, x^k)$. Поэтому согласно теореме двойственности линейного программирования y^{k+1} является оптимальным решением задачи (28). В силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty} | u_k | = \lim\limits_{k\to\infty} | b - Ax^k - z^k | = 0$ (см. [5]), для всякого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое N, такое, что $| b - (Ax^{N-1} + z^{N-1}) | < \varepsilon$. Используя лемму 4 при $b' = Ax^{N-1} + z^{N-1}$, $y' = y^N$, $Q = \{ y \in E^m : A^T y \geqslant c, y \geqslant 0 \}$ получаем $y^N \in \overline{Y}^*$, т.е. y^N — решение задачи (26). Из теоремы 4 следует $x^N \in \overline{R}^*$. Теорема доказана.

§3. МЕТОД ОТЫСКАНИЯ КОРНЕЙ МОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАДРАТИЧНОЙ МОДИФИКАЦИИ

Пусть $T(z)$ — монотонное точечно-множественное отображение, заданное на непустом множестве $Z \subset E^n$. Задача отыскания корней $T(z)$ состоит в нахождении таких точек $z^* \in Z$, что $0 \in T(z^*)$. Допустим, что квадратичная функция $\alpha(z) = (z^T Qz)/2$, $z \in E^n$, удовлетворяет условию

$$\gamma'' |z|^2 \leqslant z^T Q z \leqslant \gamma' |z|^2, \; \gamma' \geqslant \gamma'' > 0.$$

Тогда сопряжённая с $\alpha(z)$ функция имеет вид

$$\alpha^*(p) = \max_{z \in E^n} \left[pz - \alpha(z) \right] = \frac{1}{2} p^T Q^{-1} p, \quad p \in E^n, \text{ прич}$$

$$(1/\gamma') \; |p|^2 \leqslant p^T Q^{-1} p \leqslant (1/\gamma'') \; |p|^2, \; p \in E^n.$$

Положим $T_\alpha(z, \omega) = T(z) - \nabla\alpha(\omega - z)$, $\omega \in E^n$, $z \in Z$, и предположим, что при любом $\omega \in E^n$ разрешимо соотношение $0 \in T_\alpha(z, \omega)$, $z \in Z$. Это требование выполняется, если $T(z)$, $z \in Z$ — максимальное монотоное отображение. Отображение $T_\alpha(z, \omega)$, $z \in Z$, является сильно монотонным, так что при фиксированнои $\omega \in E^n$ оно имеет единственный корень $z^*(\omega)$. В [7] модификация $\widetilde{T}(\omega)$, $\omega \in E^n$, отображения $T(z)$, $z \in Z$, определяется формулой $\widetilde{T}(\omega) = \nabla\alpha(\omega - z^*(\omega))$ и показано, что $\widetilde{T}(\omega)$ — однозначное отображение, определённое на всем пространстве E^n, и множество корней отображений $T(\omega)$ и $T(z)$ совпадают.

Для отыскания корней отображения $\widetilde{T}(\omega)$, $\omega \in E^n$ построим итерационный процесс

$$\omega^{k+1} = \omega^k - \gamma_k \nabla\alpha^*(\nabla\alpha(\omega^k - \widetilde{z}(\omega^k))), \; k = 0,1,\ldots, \tag{35}$$

где ω^0 — произвольная точка E^n и $| \widetilde{z}(\omega^k) - z^*(\omega^k) | \leqslant \varepsilon_k$.

Используя соотношение $\nabla\alpha^* (\nabla\alpha(z)) = z, \ \forall z \in E^n$, преобразуем формулу (35) к виду

$$\omega^{k+1} = \omega^k - \gamma_k \tilde{q}_k, \ k = 0,1,..., \qquad (36)$$

$$\tilde{q}_k = \omega^k - \tilde{z}(\omega^k).$$

Сходимость процесса (36) устанавливает

ТЕОРЕМА 7. Если множество Z^* *корней отображения* $T(z)$, $z \in Z$ непусто, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, *а числа* γ_k *лежат в пределах*

$$0 < \Delta_1 \leqslant \gamma_k \leqslant \Delta_2 < 2, \quad \text{то} \ \lim_{k\to\infty} \omega^k = \omega^* \in Z^*.$$

Доказательство. В [7] было получено неравенство

$$(\tilde{T}(\omega^1) - \tilde{T}(\omega^2), \omega^1 - \omega^2) \geqslant (\nabla\alpha(q_1) - \nabla\alpha(q_2), q_1 - q_2), \ \forall \omega^1, \omega^2 \in E^n, \qquad (37)$$

где $\qquad q_1 = \omega^1 - z^*(\omega^1), \ q_2 = \omega^2 - z^*(\omega^2).$

Пусть ω^* — произвольная точка множества Z^*. Положим

$$\bar{\omega}^{k+1} = \omega^k - \gamma_k q_k, \quad q_k = \omega^k - z^*(\omega^k), \qquad (38)$$

$$\rho_k^2 = (\omega^k - \omega^*)^T Q(\omega^k - \omega^*), \quad \bar{\rho}_k^2 = (\bar{\omega}^k - \omega^*)^T Q(\bar{\omega}^k - \omega^*).$$

Используя (38) и неравенство (37) при $\omega^1 = \omega^k$, $\omega^2 = \omega^*$, имеем

$$\bar{\rho}_{k+1}^2 = \rho_k^2 - 2\gamma_k (\omega^k - \omega^*)^T Q q_k + \gamma_k^2 q_k^T Q q_k$$

$$= \rho_k^2 - 2\gamma_k (\tilde{T}(\omega^k), \omega^k - \omega^*) + \gamma_k^2 (\tilde{T}(\omega^k), q_k)$$

$$\leqslant \rho_k^2 - 2\gamma_k (\tilde{T}(\omega^k), q_k) + \gamma_k^2 (\tilde{T}(\omega^k), q_k) =$$

$$= \rho_k^2 - \gamma_k(2-\gamma_k)(\tilde{T}(\omega^k), q_k) = \rho_k^2 - \gamma_k(2-\gamma_k)(\tilde{T}(\omega^k), \nabla\alpha^*(\tilde{T}(\omega^k)))$$

$$= \rho_k^2 - \gamma_k(2-\gamma_k)(\tilde{T}(\omega^k) - \tilde{T}(\omega^*), \nabla\alpha^*(\tilde{T}(\omega^k)) - \nabla\alpha^*(\tilde{T}(\omega^*)))$$

$$\leqslant \rho_k^2 - \frac{1}{\gamma'} \gamma_k (2-\gamma_k) \, |\tilde{T}(\omega^k)|^2 \leqslant \rho_k^2 - L_1 |\tilde{T}(\omega^k)|^2, \qquad (39)$$

где $L_1 = \Delta_1(2-\Delta_2)/\gamma'$. Из (36), (38) получаем оценку

$$|\omega^{k+1} - \bar{\omega}^{k+1}| = |\gamma_k \tilde{z}(\omega^k) - \gamma_k z^*(\omega^k)| \leqslant \gamma_k \varepsilon_k. \qquad (40)$$

Используя неравенство треугольника и (40), имеем

$$\rho_{k+1} \leqslant \bar\rho_{k+1} + [(\omega^{k+1} - \bar\omega^{k+1})^T Q (\omega^{k+1} - \bar\omega^{k+1})]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \bar\rho_{k+1} + \sqrt{\gamma'}\ |\ \omega^{k+1} - \bar\omega^{k+1}\ | \leqslant \bar\rho_{k+1} + \sqrt{\gamma'}\cdot\gamma_k\,\varepsilon_k \leqslant \bar\rho_{k+1} + L_2\varepsilon_k\ , \quad (41)$$

где $L_2 = \sqrt{\gamma'}\cdot\triangle_2 > 0$. Из (41), (39) с учётом $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ вытекает для достаточно больших k

$$\rho^2_{k+1} \leqslant \bar\rho^2_{k+1} + 2L_2\,\bar\rho_{k+1}\,\varepsilon_k + L_2^2\,\varepsilon_k^2 \leqslant \bar\rho^2_{k+1} + 2L_2\,(\bar\rho^2_{k+1} + 1)\varepsilon_k +$$
$$+ L_2^2\,\varepsilon_k^2 \leqslant (1 + 2L_2\,\varepsilon_k)\bar\rho^2_{k+1} + L_3\,\varepsilon_k \leqslant (1 + 2L_2\,\varepsilon_k)\,(\rho_k^2 - L_1\,|\,\widetilde{T}(\omega^k)\,|^2) +$$
$$+ L_3\,\varepsilon_k \leqslant (1 + 2L_2\,\varepsilon_k)\,\rho_k^2 - L_4\,|\,\widetilde{T}(\omega^k)\,|^2 + L_3\,\varepsilon_k, \quad (42)$$

где L_3, L_4 — положительные константы. Отсюда получаем

$$\rho^2_{k+1} \leqslant (1 + 2L_2\,\varepsilon_k)\,\rho_k^2 + L_3\,\varepsilon_k. \quad (43)$$

Из (43) и сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k$ следует ограниченность $\{\rho_k\}$ (см. [5]).

Далее, из (42) и ограниченности $\{\rho_k\}$ справедлива оценка

$$\rho^2_{k+1} \leqslant \rho_k^2 - L_4\,|\,\widetilde{T}(\omega_k)\,|^2 + L_5\,\varepsilon_k\ , \quad (44)$$

где $L_5 > 0$. Просуммируем (44) от некоторого достаточно большого K_0 до N

$L_4 \sum\limits_{k=k_0}^{N} |\,\widetilde{T}(\omega^k)\,|^2 \leqslant \rho^2_{k_0} - \rho^2_{N+1} + L_5 \sum\limits_{k=k_0}^{N} \varepsilon_k \leqslant \rho^2_{k_0} + L_5 \sum\limits_{k=k_0}^{N} \varepsilon_k < \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\,\widetilde{T}(\omega^k)\,|^2$ сходится.

Из ограниченности $\{\rho_k\}$ следует существование предельной точки последовательности $\{\omega^k\}$. В силу сходимости $\{\widetilde{T}(\omega^k)\}$ к нулю эта предельная точка ω^* должна принадлежать множеству Z^*. Из (43) и ограниченности $\{\rho_k\}$ получаем

$\rho^2_{k+1} \leqslant \rho_k^2 + \gamma'_k,\ \gamma'_k > 0,\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\gamma'_k < \infty$, откуда следует единственность предельной точки ω^* (см. [5]), т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}\omega^k = \omega^* \in Z^*$. Теорема доказана.

Заметим, что если выберем $\gamma_k = 1$, $k = 0,1,\ldots$, то метод (36) имеет самый простой вид

$$\omega^{k+1} = \widetilde{z}\,(\omega^k),\ k = 0,1,\ldots$$

причём для $T(y) = \partial\psi^0(y)$, где $\psi^0(y)$ — целевая функция задачи (2), этот метод совпадает с методом (24).

Автор выражает глубокую благодарность Е.Г. Гольштейну за полезное обсуждение результатов.

Поступило в редакцию 14-3-1978г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков. *Модифицированные функции Лагранжа*. Экономика и матем. метобы, 1974, т. X, вып. 3.
2. Е.Г. Гольштейн. *Теория двойственности в математическом программировании и её приложения*. М., « Наука », 1971.
3. Е.Г. Гольштейн, Н.В. Третьяков *Градиентный метод минимизации и алгоритмы выпуклого программирования, связанные с модифицированными функциями Лагранжа*. Экономика и матем методы, 1975, т. XI, вып. 4.
4. Н.З. Шор. *Оббошенные градиентные методы мининизаций негладких функцлй и их применение к задамам математического программирования*. Экономика и матем. методы, 1976, т. XII, вып. 2.
5. Е.Г.. Гольштейн, Бун Тхе Там. *Об одном итерационном методе выпуклого программирования, использующем модифицированные функции Лагранжа*. Экономика и матем. методы, 1977, т. XIII, вып. 6.
6. Б. Т. Поляк, Н.В. Третьяков. *Об одном итерационном мотеде линейного программирования и его экономической интерпретации*. Экономика и матем. методы, 1972, т. VIII, вып. 5.
7. Е.Г. Гольштейн. *Метод модификации монотонных отображений*. Экономика и матем. методы, 1975, т. XI, вып. 6.