ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ, 4, № 1 (1979)

РЕЩЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ МЕТОДОМ ПАРНЫУРАВНЕНИЙ

NGUYỄN VĂN NGỌC
Математический институт ханой.

В данной работе изучается плоская контактная задача для полосы на основе метода преобразующих операторов для одного типа парных рядовых уравнении [I]. Найдено решение последного в виде бесконечной системы алгебраических уравнений и доказана квази-вполне регулярность этой системы. Даны также исследования поведения напряжений в окрестностях некоторых особых точек полосы и численные результаты.

§I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Рассмотрим плоскую контактную задачу теории упругости для полосы($|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$), лежащей без трения на жестком основании, которое представляет собой совокупность плоских периодических опор длиной $2a$ и периодом $2l$. Полоса подвергается действию равномерной внешней нагрузки q, приложенной к краю $y = 0$ в направлении оси oy сверху вниз. Край $y = h$ лежит на опорах, ось oy нормальна к краям полосы и делит длину одной опоры пополам. Кроме того, в каждой точке полосы действуют силы тяжести постоянной интенсивности P.

Подобная задача была рассмотрена в работе [2]. Однако, там жесткие опоры замены сосредоточенными силами и силы тяжести не учитывались. Ясно, что при значительных длинах опор, такая замена не может отражать реальности.

Здесь, учитывая периодичность и симметричность задачи, мы рассматриваем решение, выраженное через одну бигармоническую функцию, только на полуодном периоде ($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant h$). Решение последней приводим к парному уравнению относительно коэффициентов ряда фурье по системе $\{\cos nx\}$.

Можно показать, что уравнения Ламе для рассматриваемой задачи будут удовлетворены, если перемещения $U(x,y)$ и $V(x, y)$ взять в виде [3].

$$\left.\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \\ V(x, y) &= \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{py^2}{2(\lambda+2\mu)} \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где

$$\Delta^2\Phi = 0, \tag{1.2}$$

λ и μ — постоянные Ламе.

Отметим, что представления (I.I) при $p = 0$ были получены в [4], а в данной работе они получены нами.

На основании известных соотношений обобщенного закона Гука и формулы (I.I), получим следующие формулы для напряжений

$$\left.\begin{aligned} б_x\ (x,y) &= -(\lambda+2\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y} + \lambda\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} - \frac{\lambda p y}{\lambda+2\mu}, \\ б_y\ (x,y) &= (3\lambda+4\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} - py, \\ \tau_{xy}(x,y) &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} - \lambda\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Из периодичных и симметричных соображений необходимо следует, что

$$\begin{aligned} U(x,y) &= U(x\pm 2l, y) = -U(-x,y), \\ V(x,y) &= V(x\pm 2l, y) = V(-x,y), \\ б_x(x,y) &= б_x(x\pm 2l, y) = б_x(-x,y), \\ б_y(x,y) &= б_y(x\pm 2l, y) = б_y(-x,y), \\ \tau_{xy}(x,y) &= \tau_{xy}(x\pm 2l, y) = -\tau_{xy}(-x,y). \end{aligned}$$

Из последних условий и формул (I.I) и (I. 3) также следует, что

$$\Phi\ (x,y) = \Phi\ (x\pm 2l, y) = \Phi\ (-x,y). \tag{1.4}$$

Таким образом, проблема сводится теперь к чистой математической задаче. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l,\ 0<y<h\}, \\ \partial\Omega &= \{(x, y=0)\cup(x, y=h)\}, \\ \overline{\Omega} &= \Omega\cup\partial\Omega, \end{aligned}$$

$$D^s = \frac{\partial^{s_1+s_2}}{\partial x^{s_1}\partial y^{s_2}}, \quad |s| = s_1+s_2.$$

Найти функцию $\phi\ (x,y)$, удовлетворяющую условиям (1.4) и следующим условиям

$$U\ (0,y) = U\ (l,y) = 0,\ 0<y<h, \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}\ (0,y) = \tau_{xy}\ (l,y) = 0,\ 0<y<h, \tag{1.6}$$

$$\tau_{xy}\ (x,0) = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.7}$$

$$\tau_{xy}\ (x,h) = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.8}$$

$$б_y\ (x,0) = -q, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned} V\ (x,h) &= 0, & 0\leqslant x<a, \\ б_y\ (x,h) &= 0, & a<x\leqslant l, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Мы ищем решение в следующем классе

$$\mathcal{K} = \{\Phi \mid \Phi \in C^3(\Omega) \cap D^4\Phi \in L^1(\Omega),\ D^3\Phi \in L^p(\partial\Omega),\ p \geq 1\}. \tag{1.11}$$

Заметим, что если $\Phi \in \mathcal{K}$, то $\Phi \in L^2(\Omega)$. $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\right\}_0^\infty$ является полной ортогональной системой функций в $L^2(0,l)$. Учитывая периодичность и симметричность задачи, найдём $\Phi(x,y)$ методом конечного интегрального преобразования фурье по системе функций $\{\cos\alpha_k x,\ \alpha_k = k\pi/l\}$

$$\varphi_k(y) = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x,y)\cos\alpha_k x\,dx, \tag{1.12}$$

$$\Phi(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(y)\cos\alpha_k x \tag{1.13}$$

Так как по предположению $\Phi \in \mathcal{K}$, поэтому из свойств коэффициентов фурье следует, что ряд (1.13) будет сходиться равномерно вместе с рядами, полученными дифференцированиями $D^m\Phi$, $m = \overline{0,3}$. Следовательно законо получить формулы для U, V, σ_x, σ_y, и τ_{xy} по правилам (1.1) и (1. 3).

Как следствия теоремы фубини справедливы следующие предложения.

Предложение 1.1. Если $\Phi \in \mathcal{K}$, то $\forall y$, кроме, быть может, множества меры нуль, функция от x, $D^4\Phi\cos\alpha_k x \in L^1(0,l)$ по переменной x.

Предложение 1.2. Если $\Phi \in \mathcal{K}$, то $\forall s = \overline{0,4}$ имеют место формулы дифференцирования по параметру

$$\frac{d^s}{dy^s}\int_0^l \Phi\cos\alpha_k x\,dx = \int_0^l \frac{\partial^s\Phi}{\partial y^s}\cos\alpha_k x\,dx, \tag{1.14}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_0^l \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cos\alpha_k x\,dx = \int_0^l \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}\cos\alpha_k x\,dx\,. \tag{1.15}$$

Теперь на основаниях формул (1 .14) и (1. 15) мы можем применять преобразование (1. 12) к уравнению (1.2). Получим после этого следующие уравнение для изображений

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_k^2\right)^2\varphi_k(y) = 0,\ k = 0,1,2,... \tag{1.16}$$

Решения уравнений (1. 16) возьмём в виде.

$$\varphi_0(y) = A_0 y^3 + B_0 y^2 + C_0 y + D_0\,,$$

$$\varphi_k(y) = A_k\operatorname{ch}\alpha_k y + B_k\alpha_k y\operatorname{sh}\alpha_k y + C_k\operatorname{sh}\alpha_k y + D_k\alpha_k y\operatorname{ch}\alpha_k y, \tag{1.17}$$

где A_k, B_k, C_k и D_k, $(k=0,1,...)$ — призвольные постоянные, принадлежащие определению. Так как C_0 и D_0 не будут участвовать в выражениях для перемешений и напряжений, мы положим их равными нулю.

Подставляя (1. 17) в (1. 13), получим

$$\Phi(x,y) = A_0 y^3 + B_0 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch}\alpha_k y + B_k \alpha_k y \operatorname{sh}\alpha_k y + D_k \alpha_k y \operatorname{ch}\alpha_k y) \cos\alpha_k x. \tag{1. 18}$$

Легко видеть, что решение в форме (1. 18) удовлетворяет условиям (1.5) и (1.6). Введем некоторые обозначения [3]

$$\left.\begin{aligned} V(x,h) &= \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \omega_k \cos\alpha_k x, \\ \sigma_y(x,h) &= \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^3 \rho_k \cos\alpha_k x. \end{aligned}\right\} \tag{1. 19}$$

Из краевых условий (1.7) — (1.9) и представлений (1. 19), после некоторых выкладок получим следующие формулы

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0 = -(q + ph), \quad A_0 = \frac{-q}{6(\lambda+2\mu)}, \quad B_0 = \frac{\omega_0}{2} + \frac{2qh + ph^2}{4(\lambda + 2\mu)}, \\ &A_k = \frac{-\lambda\mu\omega_k}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} W_1(\alpha_k h), \qquad B_k = \frac{\mu\omega_k}{\lambda+2\mu} W_1(\alpha_k h), \\ &C_k = \frac{-\mu^2\omega_k}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)} W_2(\alpha_k h), \qquad D_k' = \frac{-\mu\omega_k}{\lambda + 2\mu} W_2(\alpha_k h), \end{aligned}\right\} \tag{1. 20}$$

$$\omega_k = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \rho_k \varphi(\alpha_k h), \tag{1. 21}$$

где

$$W_1(x) = \frac{\operatorname{sh}x + x\operatorname{ch}x}{x + \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}, \quad W_2(x) + \frac{x\operatorname{sh}x}{x + \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x},$$

$$\varphi(x) = \frac{x + \operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x - x^2}. \tag{1. 22}$$

Чтобы определиьт ω_0 мы поступим следующим образом [2]. Через $\vec{W} = (U,V)$ обозначим вектор перемещения точки (x, y). Очевидно $\vec{W} = 0 \Leftrightarrow U = 0$ и $V = 0$. Этот случай соответствует фиксированной точке (x, y). В нашей задаче такими точками будут $(2lm, h)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Кроме того, $\cos(\alpha_k 2lm) = \cos(2kx) = 1$. Поэтому ω_0 можно определить из следующего условия

$$V(0,h) = 0, \tag{1.23}$$

которое не допускает жесткого перемещения тела как целого.

Неизвестные ω_k и ρ_k определим из краевых условий (1.10), которые с учётом (1.21) имеют вид.

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0 + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(\lambda+\mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \varphi(\alpha_k h)\rho_k \cos\alpha_k x = 0, \quad 0 \leqslant x < a. \\ &-(q+ph) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^3 \rho_k \cos\alpha_k x = 0, \quad a < x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

Введем обозначения.

$$\left.\begin{aligned} &f_k = \alpha_k^3 \rho_k/(q+ph), \quad t = \pi x/l, \\ &b = a/l, \quad c = \pi h/l, \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

После дифференцирования первого уравнения (1.24) мы получим следующее эквивалентное парное рядовое уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi(kc) \sin kt = 0, \quad 0 \leqslant t < b\pi, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kt = 1; \quad b\pi < t \leqslant \pi, \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

и

$$\omega_0 = \frac{-(\lambda+2\mu)(q+ph)}{2\mu(\lambda+\mu)} \frac{l}{\pi} \sum_{k-1}^{\infty} \frac{f_k \varphi(kc)}{k}. \tag{1.27}$$

По предположению (1.11), $D^3\Phi \in L^p\,(\partial\Omega)$, $p \geqslant 1$. Мы имеем f_k как коэффициенты фурье от $\sigma_y\,(x, h)$ по системе $\{\cos\alpha_k x\}$. Здесь мы ещё предположим, что

$$f_k \in S^\alpha, \text{ где } S^\alpha = \left\{ f_k \mid f_k = 0\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), \alpha > 0, \ k \to \infty \right\}. \tag{1.28}$$

Если $f_k \in S^\alpha$, то сходимости рядов (1.26) следует понимать в обобщённом смысле [6].

§2. РЕШЕНИЕ ПАРНОГО РЯДОВОГО УРАВНЕНИЯ

Из формулы (1.22) легко видеть, что $\varphi(x) \to 1$ при $x \to \infty$. Поэтому можем представлять её в виде

$$\varphi(x) = 1 + S(x), \tag{2.1}$$

где $S(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Теперь подставив (2.1) в первое уравнение (1.26) мы получим

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kt = -\sum_{n=1}^{\infty} f_n S(nc) \sin nt, \quad 0 \leqslant t < b\pi, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kt = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad b\pi < t \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Последнее парное рядовое уравнение (2.2) будем решать методом преобразующих операторов [1]. Оно имеет вид

$$\left.\begin{aligned} f_k = -y_k(\cos b\pi) - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, S(nc) J_{kn}, \\ k=1,2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где

$$J_{kn} = \frac{k y_k(\cos b\pi) z_n(\cos b\pi) - n y_n(\cos b\pi) z_k(\cos b\pi)}{n^2 - k^2}, \tag{2.4}$$

$$kJ_{kk} = 1 - P_{k-1}(\cos b\pi) P_k(\cos b\pi) - \frac{1}{2}\left[P_{k-1}^2(\cos b\pi) - P_k^2(\cos b\pi)\right] -$$

$$- 2\sin^2 b\pi \sum_{n=1}^{k-1} \frac{P_n(\cos b\pi) P_n(\cos b\pi)}{n+1}, \tag{2.5}$$

$$y_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos kx \cos\frac{x}{2}\,dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin kx \cos\frac{x}{2}\,dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}},$$

$$z_k(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\sin kx \sin x/2\,dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\cos kx \sin x/2\,dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}},$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Имеют место следующие оценки (1,8)

$$\left.\begin{aligned} &|y_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \qquad |z_k(x)| < \frac{2}{\sqrt{k}}, \\ &|j_{kn}| \leqslant \frac{4}{\sqrt{kn}\,|k-n|}, \quad |j_{kk}| \leqslant \frac{2}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Предложение 2.1. При $\forall\, c > 0$ *имеет место оценка*

$$|S(kc)| \leqslant A(c) k^2 e^{-2kc}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Доказательство. Положим $t = kc$, имеем

$$S(t) = \varphi(t) - 1 = \frac{4t^2 - 2e^{-2t} + 4t^2 + 2}{e^{2t} + e^{-2t} - 2 - 4t^2},$$

Положим $M(t) = e^{2t} + e^{-2t} - 2 - 4t^2$. Имеем

$$M'(t) = 2\,(\mathrm{ch}2t - 2t^2 - 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M'''(t) = 16\mathrm{sh}2t > 0 \ \forall\ t > 0.$$

Следовательно $M''(t)$ — монотонно возрастающая функция. Но $M''(0) = 0$ и $M'(0) = 0$ поэтому $M''(t) > 0 \ \forall\ t > 0$, $\rightarrow$ и $M'(t) > 0 \ \forall\ t > 0$. Это означает, что $M(t)$ является монотонно возрастающей функцией. Имеем $M(0) = 0$, поэтому $M(t) > 0 \ \forall\ t >= 0$.

Далее имеем

$$|S(t)| \leqslant \frac{4t + 2e^{-2t} + 4t^2 + 2}{e^{2t} + e^{-2t} - 2 - 4t} = \frac{t^2}{e^{2t}} \cdot \frac{4 + 4t^{-1} + 2t^{-2} + 2e^{-2t}t^{-2}}{1 + e^{-4t} - e^{-2t}(2 + 4t^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^2}{e^{2t}} \cdot \frac{m(c)}{1 + g(t)}, \qquad (2.\ 8)$$

где

$$m(c) = 4 + 4c^{-1} + 2c^{-2} + 2e^{-2c}c^{-2},\ c \leqslant t,$$

$$g(t) = e^{-4t} - e^{-2t}(2 + 4t^2).$$

Так как $M(t) = e^{2t}[1 + g(t)] > 0 \ \forall\ t > 0 \Rightarrow g(t) > -1 \quad \forall\ t > 0.$

Докажем, что $g(t)$ является монотонно возрастающей функцией. В самом деле, имеем

$$g'(t) = 4e^{-2t} f(t),$$

где

$$f(t) = 2t^2 - 2t + 1 - e^{-2t}.$$

Имеем

$$f'(t) = 4t - 2 + 2e - 2e^{-2t},$$

$$f''(t) = 4\,(1 - e^{-2t}) > 0 \quad \forall\ t > 0.$$

Следовательно $f'(t)$ — монотонно возрастающая функция. Но $f'(0)=0$ и $f(0)=0$, поэтому $f'(t)>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t)>0\ \forall t>0$. Это значит, что

$$g'(t)>0 \quad \forall\ t>0.$$

Заметим, что $g(0)=-1$ и $g(\infty)=0$, следовательно

$$-1<g(c)\leqslant g(t)\leqslant 0 \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получим

$$|S(t)|\leqslant \frac{t^2}{e^{2t}}\cdot\frac{m(c)}{1+g(c)},$$

что и доказывается оценка (2.7).

Теперь мы можем поступить к исследованию бесконечной системы (2.3). Для этого, перепишем (2.3) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{f_k}{k}=\frac{-y_k(\cos b\pi)}{k}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n}nS(nc)J_{kn},\\ k=1,2,3,\ldots\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Введем обозначения

$$F_k=f_k/k\ ,$$

$$T_k=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\,|S(nc)|\ \ |J_{kn}|\,. \tag{2.11}$$

Предложение 2.2. Имеет место следующая оценка

$$T_k\leqslant\frac{1+8\ln 2+4\ln 4(k+1)}{k}\ \text{const}.$$

Следовательно, система (2.10) является квази-вполне регулярной относительно неизвестных F_k.

Доказательство. Имеем.

$$T_k=\frac{1}{2}k\,|S(kc)|\,|J_{kk}|+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k-1}n|S(nc)|\ \ |J_{kn}|\ +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=k+1}^{\infty}n\ |S(nc)|\ \ |J_{kn}|\,. \tag{2.12}$$

Подставляя оценки (2.6) и (2.7) в (2.12) получим

$$T_k\leqslant\frac{\text{const}}{k}+\frac{2\text{const}}{\sqrt{k}}[P(k)+Q(k)], \tag{2.13}$$

где $P(k)=\sum\limits_{n=1}^{k-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(k-n)}$, $Q(k)=\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(n-k)}$

Имеем также

$$P(k) < \int_1^{k-1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(k-x)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \left[\frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2}{\sqrt{k}+1} \;(\sqrt{k}-1) \right]$$

$$Q(k) < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{k+x}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ln (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})^2$$

Следовательно из (2. 13) имеем

$$T_k \leqslant \frac{\text{const}}{k} + \frac{2\text{const}}{k} \ln \left[\frac{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^4 (\sqrt{k} - 1)}{\sqrt{k}+1} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 + 8\ln 2 + 4\ln 4\,(k+1)}{k} \text{const} .$$

Так что $T_k \to 0$ при $k \to \infty$. Это значит, что система (2.10) является квази-вполне регулярной относительно F_k. Следуя [7], заключаем, что существование и единственность решения бесконечной системы (2.10) сводятся к существованию решения конечной системы первых N уравнений.

Предложение 2.3. Пусть система (2.10) имеет ограниченное решение

$$|F_k| \leqslant F < \infty .$$

Тогда $|F_k| \leqslant k^{-3/2} \cdot \text{const}$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$|F_k| \leqslant \frac{|Y_k(\cos b\pi)|}{k} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n |n\,|S(nc)\,J_{kn}| \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}} +$$

$$+ \frac{F}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\,|S(nc) J_{kn}| \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{1 + 8\ln 2 + 4\ln 4(k+1)}{k} F.\text{const}.$$

Следовательно

$$|F_k| \leqslant \frac{F^*}{k}, \ \mathrm{k} \to \infty$$

Подставляя последнюю оценку в (2.10), имеем :

$$|F_k| \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{F^*}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |S(nc)\,J_{kn}|. \tag{2.14}$$

Введем обозначение

$$R(k) = \sum_{n=1}^{\infty} |S(nc)\,J_{kn}|.$$

Точно также как и в доказательстве теоремы 2.2 имеем

$$R(k) \leqslant \frac{2\text{const}}{k^2} + \frac{4\text{const}}{\sqrt{k}}\left[\frac{1}{k}\zeta(3/2) + \frac{2}{k\sqrt{k}}\ln 4(k+1)\right]. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.14), получим:

$$|F_k| \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{F^*\text{const}}{k^2} + \frac{2^*F\text{const}}{k\sqrt{k}}\left[\zeta(3/2) + \frac{2\ln 4(k+1)}{\sqrt{k}}\right].$$

Так как $\frac{\ln 4(k+1)}{\sqrt{k}} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ при $k \to \infty$, поэтому

$$|F_k| \leqslant \frac{\text{const}}{(k^{3/2})} \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.16}$$

Если подставить (2.16) опять в (2.10) то мы снова приходим к оценке типа (2.16). Теорема доказана.

Результаты вычислений f_k для случая $l = 2a$ при различных соотношений h/l сведены в следующей таблице:

$h = 6l$	$h = 1{,}8l$	$h = 1{,}4l$
$f_1 = -1$	$f_1 = -0{,}9935$	$f_1 = -0{,}99630$
$f_2 = 0{,}5$	$f_2 = 0{,}5009$	$f_2 = 0{,}50739$
$f_3 = 0{,}5$	$f_3 = 0{,}50035$	$f_3 = 0{,}50277$
$f_4 = -0{,}375$	$f_4 = -0{,}3754$	$f_4 = -0{,}3786$
$f_5 = -0{,}375$	$f_5 = -0{,}3752$	$f_5 = -0{,}3773$
$f_6 = 0{,}3125$	$f_6 = 0{,}3128$	$f_6 = 0{,}3152$
$f_7 = 0{,}3125$	$f_7 = 0{,}3127$	$f_7 = 0{,}3143$
$f_8 = -0{,}2734$	$f_8 = -0{,}2737$	$f_8 = -0{,}2757$
....	....	....

Таким образом, для рассмотренных случаях показано, что бесконечная система (2.10) и следовательно система (2.3) имеют единственное решение, которые стремятся к нулю при $k \to \infty$ как $0\,(k^{-3/2})$ и $0\,(k^{-1/2})$ соответственно.
Итак, мы показали, что в этих случаях f_k удовлетворяют условию (1. 28).

§ 3. УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Займёмся теперь вопросом исследования характера особенности напряжений в окрестностях углов опор. Для нормальных напряжений имеем

$$\sigma_x(t, h) = -\frac{\lambda(q+ph)}{\lambda+2\mu} + (q+ph)\,[\sigma(t) + R(t)], \tag{3.1}$$

$$б_y(t,h) = (q + ph)\,[б(t) - 1] \quad , \tag{3.2}$$

где

$$б(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos kt \tag{3.3}$$

$$R(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\frac{k^2c^2}{\mathrm{sh}^2 kc - k^2c^2} \right) \cos kt \; . \tag{3.4}$$

Легко видеть, что ряд (3.4) сходится равномерно. Однако, ряд (3.3) вообще плохо сходится так как при $k \to \infty$, $f_k \to 0$ как $0(k^{-1/2})$. Сумма этого ряда в данном случае — разрывная функция и в точке $t = b\pi - 0$ $(x = a - 0)$ как будет показано ниже, она обращается в бесконечность. В связи с этим, необходимо выделить его главную часть (особенную часть). Подставив в (3.3) значения f_k из системы (2.3), получим

$$б(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos b\pi)\cos nt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\, S(kc)\,.\,\Sigma_k(t) \; ,$$

где

$$\Sigma_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, J_{kn} \cos nt \; . \tag{3.5}$$

Воспользуемся следующими соотношениями в [1,8]

$$J_{kn} = \frac{-y_n(\cos b\pi)\, z_k(\cos b\pi)}{n} + \frac{k}{n}\int_0^{b\pi} y_n(\cos\theta)\, y_k(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\,\theta/2\, d\theta \; , \tag{3.6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\theta)\cos nt = \begin{cases} -1 + \sqrt{2}\, \cos t/2\, (\cos t - \cos\theta)^{-1/2} \; , & t < \theta. \\ -1 & , t > \theta. \end{cases} \tag{3.7}$$

Подставив (3.6) в (3.5), после некоторых преобразований, получим

$$\Sigma_k(t) = -Z_k(\cos b\pi)\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos b\pi)\cos nt +$$

$$+ \, k \int_0^{b\pi} y_k(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\,\theta/2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\theta)\cos nt \right] d\theta.$$

При $b\pi < t \leqslant \pi$, используя (3.7), найдем :

$$\Sigma_k(t) = 0 \; .$$

Отсюда

$$б(t) = 1 \quad , \quad b\pi < t \leqslant \pi \quad . \tag{3.8}$$

Подставив (3.8) в (3.2) убедимся что, $б_y(t, h) \equiv 0$ при $b\pi < t \leqslant \pi$ $(a < x \leqslant l)$, что проверяется краевое условие (1.10).

При $\quad 0 \leqslant t < b\pi$, $\quad$ для $б(t)$ $\quad$ имеем

$$б(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}\,(1 - M)\cos t/2}{\sqrt{\cos t - \cos b\pi}} + g(t)\,, \tag{3.9}$$

где

$$M = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k S(kc) Z_k(\cos b\pi) \;,$$

$$g(t) = -\frac{\cos t/2}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} k f_k S(kc)\int_t^{b\pi}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}}\,d\theta\,.$$

Известно в [I), что

$$\int_t^{\pi}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos t/2}\cdot\frac{\cos kt + (-1)^{k+1}}{k}\,.$$

Отсюда

$$\int_t^{b\pi}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2\,d\theta}{\sqrt{\cos t - \cos\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos t/2}\cdot\frac{\cos kt + (-1)^{k+1}}{k} - \frac{\sqrt{2}}{\cos b\pi/2}\cdot\frac{\cos kb\pi + (-1)^{k+1}}{k}$$

Таким образом в результате имеем

$$g(t) = N\,.\cos t/2 + d(t)\;, \tag{3.10}$$

где

$$N = \frac{1}{\cos b\pi/2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k S(kc)\left[\cos kb\pi + (-1)^{k+1}\right].$$

$$d(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} f_k S(kc)\left[\cos kt + (-1)^{k+1}\right]. \tag{3.11}$$

Подставив (3. 10) в (3. 9) имеем

$$\left.\begin{aligned} б(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}\,(1 - M)\cos t/2}{\sqrt{\cos t - \cos b\pi}} + N\cos t/2 + d(t)\,,\\ 0 \leqslant t < b\pi \quad (0 \leqslant x < a)\;. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Далее, подставив (3. 12) в (3.1) и (3.2) получим формулы

$$б_x(x,h) = \frac{2\mu(q+ph)}{\lambda+2\mu} + (q+ph\left[\frac{\sqrt{2}\,(M-1)\cos\pi x/2l}{(\cos\pi x/l - \cos\pi a/l)^{1/2}} + N\cos\pi x/2l + \right.$$

$$\left. + d(\pi x/l) + R(\pi x/l)\right], \quad 0 \leqslant x < a \tag{3.13}$$

$$б_y(x,h) = (q+ph)\left[\frac{\sqrt{2}\,(M-1)\cos\pi x/2l}{(\cos\pi x/l - \cos\pi a/l)^{1/2}} + N\cos\pi x/2l + d(\pi x/l)\right], \tag{3.14}$$

$$0 \leqslant x < a.$$

Из оценки (2.7), формул (3.4) и (3.11) заметим, что

$R(t) \in C^\infty$ и $d(t) \in C^\infty$. Кроме того,

$(\cos\pi x/l - \cos\pi a/l)^{-1/2} \in L^p(0,a),\ p<2.$

Откуда $б_x(x,h) \in L^p(0,a)$ и $б_y(x,h) \in L^p(0,a)$ $1 \leqslant p < 2.$

При $a < x \leqslant l$ мы уже имеем $бy(x,h) = 0$. Что касается $б_x(x,h)$. то из (2.8) и (3.1) имеем

$$\left. \begin{aligned} б_x(x,h) = \frac{2\mu(q+ph)}{\lambda+2\mu} + (q+ph)\,R(\pi x/l), \\ a < x \leqslant l \quad . \end{aligned} \right\} \tag{3.15}$$

Для рядов других величин точно таким способом можно улучшить их сходимости. Например, для ω_0 определенной в (1. 28), рассмотрим

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(kc)f_k}{k}. \tag{3.16}$$

Второй ряд (3.16) быстро сходится за счёт $S(kc) = 0\ (k^2 e^{-k^2c^2}),\ k \to \infty$ Рассмотрим только первый ряд

$$\omega^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n}. \tag{3.17}$$

Опять подставить f_n из (2.3) в (3.17), получим

$$\omega^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(\cos b\pi)}{n} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,S(kc)\,H_k, \tag{3.18}$$

где

$$H_k = \sum_{n-1}^{\infty} J_{kn}. \tag{3.19}$$

Найдём H_k. Для этого, подставив (3. 6) в (3.19), получим

$$H_k = -Z_k(\cos b\pi)\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos b\pi)/n +$$

$$+ k\int_0^{b\pi} y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\theta/2\left[\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\theta)/n\right]d\theta. \qquad (3.20)$$

Имеем в [9]

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P_n(\cos\theta) = -\ln|\sin\theta/2| - \ln(1+\sin\theta/2),\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}P_n(\cos\theta) = \ln\left|\frac{1+\sin\theta/2}{\sin\theta/2}\right| - 1.\end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

Сложив почлено (3.21), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(\cos\theta)/n = -2\ln\sin\theta/2,\ 0<\theta<\pi, \qquad (3.22)$$

Так как по определению в [I]

$$Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_n(x),\ P_0(x) = 1.$$

Подставив (3.22) в (3.20) найдём :

$$H_k = 2z_k(\cos b\pi)\ln\sin b\pi/2 - 2k\int_0^{b\pi} y_k(\cos\theta)\ln\sin\theta/2\ \operatorname{tg}\theta/2 d\theta.$$

Откуда получим

$$\omega^* = 2\ln\sin b\pi/2 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k S(kc)\left[\ln\sin b\pi/2\, z_k(\cos b\pi) - kg_k\right], \qquad (3.23)$$

где

$$g_k = \int_0^{b\pi} y_k(\cos\theta)\ln\sin\theta/2\ \operatorname{tg}\theta/2\, d\theta.$$

Можно показать, что $g_k = 0\ (\ln(k-1)/(k\sqrt{k})),\ k\to\infty$.

Ряд (3.23) теперь сходится быстро. При больших h/l, например, $h/l \geqslant 6$, результаты вычислений показывают, что $R(x)$, $d(x)$, M и N можно принять равными нулю.

Наконец приведём некоторые результаты вычислений наиболее интересно с точки зрения прочности напряжения $б_x$ при некоторых различных случаях h/l и при $l = 2a$

$$\sigma_x(l,h) = \begin{cases}\dfrac{2\mu(q+ph)}{\lambda+2\mu} + \varepsilon,\ (m=1;\quad h=6l),\\[2mm] \dfrac{2\mu(q+ph)}{\lambda+2\mu} + 0{,}003139\,(q+ph),\ (m=2;\ h=1{,}8l),\\[2mm] \dfrac{2\mu(q+ph)}{\lambda+2\mu} + 0{,}023624\,(q+ph),\ (m=3;\ h=1{,}4l),\end{cases} \qquad (3.24)$$

где m есть число первых членов ряда $R(x)$.

Как видим в (3.24), $б_x$ в рассмотренной точю принимает положительные значения, что имеет место растяжение. Кроме того, с уменьшением h/l оно увеличивается. Это говорит о том, что при малых h или больших l, прочность конструкция ослабляется.

В итоге заключим, что мы уже показали, что для частного случая (не единственного) $2a = l$, $f_k = 0\,(k^{-1/2})$, $k \to \infty$ и определяются однозначно. Кроме того,

$$б_x \in L^1\ (\partial\Omega),\ б_y \in L^1\ (\partial\Omega(\ ,\tau_{xy} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega\ ,\quad \rho_k = 0\left(\frac{1}{k^{3+1/2}}\right),\ k \to \infty. \tag{3.25}$$

Из (3.25) и (1. 21) получим

$$(A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k) = 0\left(\frac{1}{k^{2+1/2}\ e^{kh}}\right),\ k \to \infty. \tag{3.26}$$

Отсюда

$$\varphi_k(y) = 0\left(\frac{1}{k^{1+1/2}\ \ e^{k(h-y)}}\right),\ k \to \infty. \tag{3.27}$$

формула (3. 27) показывается, что при $0 \leqslant g < h$, $\Phi \in C^\infty(\Omega)$.

Поэтому имеет место равенство

$$\triangle^2\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2\,[\varphi_k\,(y)\cos\alpha_k\ x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \cos\alpha_k\ x\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2{}_k\right)^2 \varphi_k\ (y),\ (x,\ y) \in \Omega.$$

Но $\varphi_k\,(y)$ есть решение уравнения (1. 17), следовательно

$$\Delta^2\Phi = 0, \qquad (x,\ y) \in \Omega.$$

Этими результатами и оправдывается правильность полученного выше решения

В заключение автор благодарит Нго Ван Лыок и рецензента за ценные замечания.

Поступило в Редакцию 10-2-1978г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Баблоян. *Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости*. Прикл. матем. и мех., Т. 31, В. 4, Москва, 1967.
2. Б.Н. Жемочкин. *Теория упругости*. Москва, 1948.
3. Нгуен Ван Нгок. *Об одной периодической контактной задаче теории упругости для бесконечной полосы*. Технические науки, В. 10 (112), Ханой, 1975 (На вьстинам. яз.)
4. Н.М. Бородачев. *Колебания упругой полуплоскости*. Труды Куйбышевского инженерно-строительского ин-та, В.5, 1958.
5. С.Л. Блюхин, Б.Д. Котляр. *О числах интегральных операторов и о коэффициентах фурье суммируемых функций*. Теория функций функц. налализ и их приложения, В. 12, Харько, 1970.
6. А.Г. Заманяя. *Интегральные преобразования обобщенных функций*. Москва, 1975.
7. Л.В. Канторович и В.И. Крылов. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва-Ленинград, 1962.
8. А.А. Баблоян. *Решение некоторых "парных" рядов*. Докл. АН Арм. ССР, Т. 39, №3, Ереван 1964.
9. И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов. сумм, рядов и произведенцй*. Москва, 1966.