ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N° 2 (1978)

Sur une methode d'integration des equations aux derivees partielles(*)

ĐỖ TẤN SĨ
Faculté des Sciences — Université de l'Etat à Mons, Belgique

Dédié à la mémoire de Việt Thái Bình.

RESUME

Une formule d'inversion d'opérateurs différentiels est mise en valeur, permettant la résolution des équations aux dérivées partielles par le calcul hyperdifférentiel. Quelques applications aux équations de la chaleur et de Poisson sont données.

1. INTRODUCTION

Dans les livres de réference de l'enseignement de Mathématique on peut trouver plusieurs méthodes de résolutions des E.D.P. dont la méthode des fonctions de Green qui consiste à écrire a priori la solution sous la forme d''une transformation intégrale.

Or on peut vérifier facilement que pour une équation très simple comme

$$u' + u = f(x)$$

la solution peut s'écrire sous une forme différente :

$$u = e^{-x} \int e^{x} f(x)\, dx$$

Celà nous suggère de chercher la solution d'une E.D.P. sous des formes plus variées que une transformation intégrale conventionnelle.

Ce problème est d'autant plus résolu théoriquement par Trèves[1] qui énonce

(*) Presented to the Vietnam Second Mathematical Congress, Hanoi, August 1977.

que la résolvante d'une E.D.P. est un opérateur hyperdifférentiel, c'est à dire, d'après Miller et Steinberg[2], un opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients variables :

$$F(x, D) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x^i D^j ; \quad D = \frac{d}{dx} \cdot$$

Pour mener à bien cette tâche, dans la section 2. suivante, nous allons montrer une formule qui permettra de factoriser une somme de certains opérateurs en vue de l'inverser.

Dans la section 3., nous montrerons quels sont les types d'opérateurs inversibles par cette méthode ainsi que la forme des solutions des E.D.P. correspondantes.

Dans la section 4., nous résolvons l'équation de la chaleur et l'équation de Poisson par cette méthode.

Ce travail se veut être une esquisse d'une méthode pratique plutôt qu'un exposé théorique sur l'intégration des E.D.P. Les lecteurs nous excuseront donc du manque de rigueur dans le raisonnement.

2. LES FORMULES DE BASE

Pour simplifier les notations, nous considérons seulement le cas à deux dimensions. Soient $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial_x}$, $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial_y}$ et $\int_x$ l'opérateur d'intégration indéfinie partielle par rapport à la variable x. Soit s un opérateur commutant avec ∂_x :

$$[s, \partial_x] = s\partial_x - \partial_x s = 0 \tag{2.1}$$

Alors, si $A(x, s)$ est un opérateur de la forme

$$A(x, s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)\, s^i , \quad a_i \text{ analytique} \tag{2.2}$$

on a

$$[\partial_x, A(x, s)] = \sum_{i=0}^{\infty} [\partial_x, a_i(x)]\, s^i = A'_x(x, s) \tag{2.3}$$

Grâce à (2.1) et (2.3), on obtient facilement la proposition suivante :

PROPOSITION : Si A et B sont deux opérateurs ne contenant pas ∂_x et tel que $A^{-1}B$ commute avec $\int_x A^{-1}B$, alors :

$$(A\,\partial_x + B) \equiv A e^{-\int_x A^{-1}B}\, \partial_x\, e^{\int_x A^{-1}B} \tag{2.4}$$

d' où

$$(A\,\partial_x + B)^{-1} \equiv e^{-\int_x A^{-1}B} \int_x e^{\int_x A^{-1}B} A^{-1} \tag{2.5}$$

L' équation aux dérivées partielles

$$(A\,\partial_x + B)\,u = f(x, y) \tag{2.6}$$

admet donc comme solution générale la transformées de $f(x, y)$ par l'opérateur au second membre de (2.5) qui est de type hyperdifférentiel.

3. RECHERCHE DES E.D.P. INTEGRABLES

D'après ce qui précède, une condition suffisante de solvabilité de l' E.D.P.

$$L\,u = f(x, y) \tag{3.1}$$

est que :

(i) L est le produit des facteurs inversibles $(A_i\,\partial_x + B_i)$. C'est notamment le cas où chaque opérateur $A^{-1}B$ est de la forme :

$$A^{-1}B = a(x)\,b(y, \partial_y) \tag{3.2}$$

car alors l'opérateur

$$A^{-1}B = \int_x a(x)\,.\,b(y, \partial_y) \tag{3.3}$$

commute avec $A^{-1}B$.

Exemples :

1)
$$(y\,\partial_x - x\,\partial_y)\,u = 0 \tag{3.4}$$

$$\Rightarrow u = e^{x^2 \frac{1}{2y} \partial_y} \int_x e^{-x^2 \frac{1}{2y} \partial_y}\, 0 = e^{x^2 \frac{1}{2y} \partial_y} g(y), \forall\, g \text{ analytique}$$

2)
$$(\partial_x^2 - \partial_y^2)\,u = 0 \tag{3.6}$$

$$\Rightarrow (\partial_x - \partial_y)\,(\partial_x + \partial_y)\,u = 0$$

$$\Rightarrow u = e^{x\partial_y} \int_x e^{-2x\partial_y} f(y), \quad \forall f \text{ analytique}$$

(ii) la transformée d'une fonction analytique par des opérateurs hyperdifférentiels découlant de la méthode puisse être calculée.

Ce calcul nécessite parfois l'algèbre de Lie[3] et les relations de Baker-Campbell-Hausdorf, de Fer et Magnus, de Zassenhaus que l'on peut trouver des références dans un article de Wilcox[4].

Un cas simple d'opérateur hyperdifférentiel est le cas de l'opérateur de translation

$$e^{\alpha\partial_y} f(y) = f(y+\alpha) \tag{3.7}$$

qui est lui même un cas particulier des transformations géométriques. En effet, on a :

$$e^{\alpha a(y)\partial_y} f(y) = e^{\alpha\partial_\eta} g(\eta) = g(\eta+\alpha) \tag{3.8}$$

où $\qquad \eta = \varphi(y) = \int a^{-1}(y)\,dy \;\;\&\;\; \partial_\eta = a(y)\partial_y$

et $\quad g(\eta) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$; φ^{-1} désignant la fonction inverse de φ

En particulier :

$$e^{\alpha y^{n+1}\partial_y} f(y) = f\left(y(1-n\alpha y^n)^{-\frac{1}{n}}\right), \quad \forall n \in Z \tag{3.9}$$

Le second cas important est celui des transformations intégrales $\exp C$ où C est un opérateur quadratique en la variable y et l'opérateur ∂_y :

$$C = \alpha\partial_y^2 + \beta y\partial_y + \gamma y^2 + \delta\partial_y + \varepsilon y + \xi \tag{3.10a}$$

ou

$$C = \alpha(\partial_y^2 + \mu y^{-2}) + \beta y\partial_y + \gamma y^2 \tag{3.10b}$$

Dans l'Appendice A, nous rappellerons brièvement les résultats de Wolf[5] sur le calcul de $\exp C.\, f(y)$.

4. APPLICATION AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DE LA PHYSIQUE CLASSIQUE.

Les E.D.P. de la Physique classique sont des équations à coefficients constants et sont donc intégrables par cette méthode. Quelques exemples sont :

4.1. Equation de la chaleur.

$$(\partial_t - \partial_x^2)\, u = 0 \tag{4.1}$$

$$\Rightarrow \text{(i) } u(x,t) = e^{t\partial_x^2} u(x,0) \tag{4.2}$$

D'après (4.2), nous voyons que si $u(x,0)$ est un polynôme ou une fonction propre de ∂_x^2, à savoir $\exp\omega x$, $\cos\omega x$, $\sin\omega x$..., $u(x,t)$ s'obtient immédiatement. Sinon, on développe $u(x,0)$ en série ou intégrale de Fourier et retrouve ainsi la solution classique.

(ii) On peut aussi écrire

$$(\partial_t - \partial_x^2)\, u = (\sqrt{\partial_t} - \partial_x)(\sqrt{\partial_t} + \partial_x)\, u = 0 \tag{4.3}$$

moyennant la définition des intégrales fractionnelles[6,7]. Nous obtenons par cette décomposition

$$u = e^{-x\sqrt{\partial_t}} f(t) + e^{x\sqrt{\partial_t}} g(t), \ \forall f, g \text{ analytiques} \tag{4.4a}$$

$$= \cosh x\sqrt{\partial_t}\ u(0, t) + \frac{1}{\sqrt{\partial_t}} \sinh x\sqrt{\partial_t}\ u'_x(0, t) \tag{4.4b}$$

Un exemple classique[8] est :

$$u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad t > 0$$

$$= 0 \qquad t \leqslant 0$$

$$u'_x(0, t) = 0 \qquad \forall t$$

Par cette méthode, un obtient facilement :

$$u = \cosh x\sqrt{\partial_t}\ \frac{1}{\sqrt{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n x^{2n} \partial_t^n \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \qquad t > 0 \tag{4.5}$$

4.2. Equation de Poisson et de Laplace.

$$\Delta u = \mu(x, y, z) \tag{4.6}$$

Nous pouvons écrire comme précédemment :

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = (\partial_z + i\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2})(\partial_z - i\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}) \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow u = \Delta^{-1}\mu = e^{iz\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}} \int_z e^{-2iz\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}} \int_z e^{iz\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}} \mu(x, y, z). \tag{4.8}$$

Si $\mu(x, y, z)$ est une fonction propre de l'opérateur $(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ le calcul sera trèes simple.

Pour l'équation de Laplace, $\mu(x, y, z) = 0$ et on peut mettre la solution sous la forme

$$u = \cos z\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}\ u(x, y, 0) + \frac{\sin z\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}}{\sqrt{\partial_x^2 + \partial_y^2}}\ u'_z(x, y, 0) \tag{4.9}$$

qui appelle a fortiori à développer les conditions initiales en séries ou intégrales de Fourier car $\cos\alpha x \cos\beta y$ sont des fonctions propres de l'opérateur $(\partial_x^2 + \partial_y^2)$.

5. CONCLUSIONS ET REMERCIEMENTS

Dans ce travail, nous avons coordoné des résultats connus dans différentes domaines de l'Analyse pour décrire une méthode très concise de résolution des E.D.P. Cette méthode est pratique à appliquer dès que l'on est habitué au calcul hyperdifférentiel. Nous pensons que ce dernier est à développer non seulement pour valoriser cette méthode mais pour bien d'autres applications en Physique Théorique. La factorisation d'un opérateur est aussi un problème qui mérite d'être étudié. Dans l'appendice B, nous montrons nos premiers résultats dans ce sens, concernant les polynômes d'Hermite.

Nous remercions Mr le Prof. Lumer G. pour ses encouragements et discussions fructueuses.

REFERENCES

1. F. Trèves, *Hyperdifferential operators in complex space*, Bull. Soc. Math. France, 97 (1969) 193—223.

2. M. Miller, S. Steinberg, *Applications of hyperdifferential operators to Quantum Mechanics*, Comm. Math. Phys. 24 (1971) 40—60.

3. R. Gilmore, *Lie group, Lie algebra and some of their applications*, Wiley — Sons (1974).

4. R.M. Wilcox, *Exponential operators and parameter differentiation in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys. 8 (1967) 962—982.

5. K. B. Wolf, *Canonical transforms, separation of variables, and similaritiy solutions for a class of parabolic differential equations*, J. Math. Phys. 17 (1976) 601—613.

6. A. Erdelyi, W. Magnus. F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, New York, Mc Graw—Hill (1954).

7. K. B. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus*, New York and London, Academic Press (1974).

8. J. Bass, *Cours de Mathématiques*, Tome II, Paris, Masson et C^{ie} (1961).

Reçu Juillet 1977

APPENDICE A

L'EXPONENTIEL D'UN OPÉRATEUR QUADRATIQUE EN x, $\frac{d}{dx}$ ET LA TRANSFORMATION INTÉGRALE

Soient P et Q deux opérateurs obéissant à la relation de commutation

$$[Q, P] = i \tag{A.1}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_1 &= (P^2 - Q^2)/4 \\ I_2 &= (QP + PQ)/4 \\ I_3 &= (P^2 + Q^2)/4 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Wolf[5] montre que les opérateurs exponentiels

$$\exp(i\alpha I_1), \quad \exp(i\beta I_2), \quad \exp(i\gamma I_3), \quad \exp\left(ic\,\frac{1}{2}\,Q\right), \quad \exp\left(ib\,\frac{1}{2}\,P\right)$$

sont représentés par les matrices

$$\begin{pmatrix} \cosh\frac{\alpha}{2} & -\sinh\frac{\alpha}{2} \\ -\sinh\frac{\alpha}{2} & \cosh\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\beta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\gamma & -\sin\frac{1}{2}\gamma \\ \sin\frac{1}{2}\gamma & \cos\frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toute combinaison linéaire de I_1, I_2, I_3, P, Q est représentée par une matrice 2×2 :

$$C \simeq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et on a :

$$e^C f(q) = (2\pi b)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, e^{\frac{i}{2b}(aq'^2 - 2qq' + dq^2)}\, f(q') \tag{A.3}$$

Il nous semble que la méthode des fonctions de Green correspond à ce cas.

Exemple :

Soit à résoudre :

$$(x\partial_x + y^2 - \partial_y^2)\, u = 0 \tag{A.4}$$

Par la méthode décrite dans ce travail, on a

$$u = e^{-\ln x\,(y^2 - \partial_y^2)} \int_x e^{\ln x\,(y^2 - \partial_y^2)}\, x^{-1} 0$$

$$= e^{-\ln x\,(y^2 - \partial_y^2)} f(y), \quad \forall f \text{ analytique}$$

$$= (-2\pi \sin 2\Upsilon)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\frac{i}{2\sin\Upsilon}(\cos 2\Upsilon\, t^2 - 2yt + \cos 2\Upsilon\, y^2)} f(t)\,; \Upsilon \equiv i\ln x \tag{A.5}$$

On obtient une solution particulière en prenant $f(y) = 1$

$$u = [ch(2\ln x)]^{-\frac{1}{2}} e^{-th(2\ln x)\, y^2/2}, \quad x > 1 \tag{A.6}$$

où

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, e^{\left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right) y^2/2} \tag{A.7}$$

APPENDICE B

QUELQUES IDENTITÉS REMARQUABLES ENTRE LES OPÉRATEURS x, d/dx EN RELATION AVEC LES POLYNÔMES D'HERMITE

Posant $D = d/dx$, nous pouvons écrire les polynômes d'Hermite sous la forme :

$$H_n(x) = e^{+x^2} (-D)^n e^{-x^2} \tag{B.1}$$

Dans ce qui suit, $H_n(A)$ où A désigne un opérateur est un opérateur obtenu en remplaçant partout dans l'expression explicite de $H_n(x)$ les x^k par A^k.

Par un calcul direct, nous avons :

$$\big(D - H_1(x)\big)\big(D + H_1(x)\big) \equiv D^2 - H_2(x) \tag{B.2}$$

$$\big(D^2 - DH_1(x) + H_2(x)\big) \equiv D^3 - H_3(x) \tag{B.3}$$

Par récurrence utilisant les relations de récurrence des $H_n(x)$, nous obtenons :

$$H_n\left(\frac{x+D}{\sqrt{2}}\right) \equiv 2^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k D^{n-k} \tag{B.4}$$

$$\big(D - H_1(x)\big)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} (-)^k \binom{n}{k} H_k(x) D^{n-k} \tag{B.5}$$

$$\big(D + H_1(x)\big)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k H_{n-k}(x) \tag{B.6}$$