ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N°2 (1978)

Version parametrique du théorème de Krein-Milman et théorèmes de densité pour les applications multivoques mesurables.

PHAN VĂN CHƯƠNG
Institut de Mathématique Hanoi

Le but de ce travail est d'établir quelques théorèmes sur l'approximation des sections mesurables des applications multivoques par des sections mesurables prenant valeurs dans l'ensemble des points extrémaux des images.

Ces questions ont une liaison étroite avec le théorème de Ljapounov de convexité des intégrales vectorielles et trouvent des applications dans les problèmes du contrôle optimal (/1/ — /4/). Des résultats de ce genre avaient été obtenus dans plusieurs travaux. Il s'agit ici notamment de la topologie d'approximation. On montrait dans ce travail qu'il existe une topologie plus forte que la topologie faible considérée dans les travaux connus, pour laquelle l'approximation a encore lieu. Dans le cas de dimension finie ce résultat a été obtenu dans /5/, en utilisant une version parametrique du théorème de Carathéodory. Dans le cas de dimension infinie, on a besoin d'un théorème analogue, version parametrique du théorème de Krein — Milman qui serait démontré dans la suite. Dans les demonstrations des théorèmes, on fait usage essentiellement de quelques résultats nouveaux de la théorie des applications multivoques mesurables dûs à V. Neumann, Ch. Castaing, M. Valadier exposés dans /6/.

0. QUELQUES NOTATIONS ET RAPPELS.

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, E un espace localement séparé, Γ une application multivoque à valeurs dans les parties nonvides de E.

Dans toute la suite, on désigne par E', l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur E ; $\mathcal{B}(E)$, la tribu borelienne dans E

$\chi_M(\cdot)$, la fonction caracteristique d'un ensemble M; ex$A$, l'ensemble de tous les points extremaux d'un ensemble compact convexe A de E,

$\ddot{\Gamma}$, l'application multivoque, définie par

$$\ddot{\Gamma} : \omega \longrightarrow \text{ex } \Gamma(\omega) \quad (\forall\, \omega \in \Omega)$$

Graph Γ, l'ensemble $\{(\omega, x) \in \Omega \times E \mid x \in \Gamma(\omega)\}$

$\mathcal{S}_\Gamma$, l'ensemble de toutes les sections mesurables de Γ

Rappellons quelques notions (cf /6/). Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. La tribu complétée $\widehat{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ est, par définition, la tribu des parties de Ω qui sont μ-mesurables pour toute mesure positive finie, μ, définie sur $\mathcal{A}$. Une tribu $\mathcal{A}$ est dite complète si $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{A}}$. En particulier, si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ est la tribu des parties mesurables pour une mesure positive, σ-finie alors $\mathcal{A}$ est complète.

Un espace topologique P est dit polonais, s'il est complet, metrisable et séparable ; un espace topologique E est dit souslinien, s'il est image d'un espace polonais par une application continue.

1. VERSION PARAMETRIQUE DU THÉORÈME DE KREIN — MILMAN.

THÉORÈME 1. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable avec* $\mathcal{A}$ *complet,* E *un espace souslinien,* Γ *une application multivoque de* Ω *à valeurs dans l'ensemble des parties compactes convexes nonvides de* E *telle que* Graph $\Gamma \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$, $\alpha(\omega)$ *une section mesurables de* Γ.

Alors, pour toute famille des voisinages absolument convexes $V(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ *du zéro dans* E *telle que l'application multivoque*

$$V : \omega \longmapsto V(\omega)$$

est de graphe dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$, *il existe une application mesurable* $\beta(\cdot)$ *de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* E *telle que*

1) $\beta(\omega) \in \alpha(\omega) + V(\omega)$

2) $\beta(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\omega)\, \beta_i(\omega)$, *où* $\lambda_i(.)$ *sont des fonctions définies sur* Ω *telles que pour chaque* $\omega \in \Omega$, *la suite* $\{\lambda_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ *ne contient qu'un nombre fini de termes nonzéros,* $\lambda_i(\omega) \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\omega) = 1$, $\beta_i(\omega)\ (i = 1, 2, \ldots) \in \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}$

DÉMONSTRATION: Comme Graph $\Gamma \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$ Graph $\ddot{\Gamma} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$ (/6/, th. 111, 22, th. 111, 36, cor. IV, 5) D'après le théorème de section de V. Neumann dans le cas des espaces sousliniens (/6/, th. 111, 22; /8/, /9/) il existe une suite $\{\beta_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\overline{\{\mathcal{B}_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}} \supset \ddot{\Gamma}(\omega)$. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_0^\infty$ de tous les suites de nombres réels $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$

qui ne contiennent qu'un nombre fini de termes nonzéros. Muni de la topologie, définie par le système de voisinages du zéro :

$$V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n,\dots} = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{R}_0^\infty \mid |\lambda_i| < \varepsilon(i = 1, 2, \dots)\}$$

où, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ parcourent l'ensemble de tous les suites de nombres strictement positifs, $\mathbb{R}_0^\infty$ est un espace localement convexe qui est limite inductive stricte des espaces $\mathbb{R}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, 0) \mid \lambda_i = 0 \ \forall i \geqslant n+1\}$ munis de la topologie separée de l'espace de dimension n. Donc, $\mathbb{R}_0^\infty$ est un espace souslinien (cf. /7/).

Remarquons que si F est un espace localement convexe séparable et si $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ est une suite bornée des élements de F, alors l'application linéaire

$$\lambda \longmapsto \sum_{(i)} \lambda_i Y_i$$

définie partout sur $\mathbb{R}_0^\infty$, est continue. En éffet, si U est un voisinage absolument convexe de zéros dans F et si $c > 0$ tel que $\{Y_i\}_{i=1}^\infty \subset cU$, on a $\sum_i \lambda_i Y_i \subset \subset \sum_i \lambda_i cU \subset U$ dèsque $\lambda \in V_{\frac{1}{2c}, \frac{1}{4c}, \frac{1}{8c}, \dots}$

En particulier, les fonctionnelles linéaires $\lambda \mapsto \sum_{(i)} \lambda_i$, $\lambda \mapsto \lambda_i$ $(i = 1,2,\dots)$ sont continues sur $\mathbb{R}_0^\infty$. Par suite, le «simplexe standard» dans $\mathbb{R}_0^\infty$

$$S = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{R}_0^\infty \mid \lambda_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \dots), \ \sum \lambda_i = 1\}$$

est fermé dans $\mathbb{R}_0^\infty$.

Considérons l'application multivoque ψ de $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans l'ensemble des parties de S, définie par

$$\psi(\omega) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in S \mid \sum_{(i)} \lambda_i \beta_i(\omega) - \alpha(\omega) \in V(\omega)\}$$

Comme pour tout ω, $\{\beta_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ est dense dans ex $\Gamma(\omega)$, d'après le théorème de Krein—Milman, $\psi(\omega) \neq \varnothing$

Il est évident que

$$\mathrm{Graph}\ \psi = (\Omega \times S) \cap G \tag{1}$$

où

$$G = \left\{ (\omega, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^\infty \,\middle|\, \left(\omega, \sum_i \lambda_i \beta_i(\omega) - \alpha(\omega)\right) \in \mathrm{Graph}\ V \right\} =$$

$$= \left\{ (\omega, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^\infty \,\middle|\, \left(pr_\Omega(\omega, \lambda), f(\omega, \lambda)\right) \in \mathrm{Graph}\ V \right\}$$

pr_Ω étant la projection $(\omega, \lambda) \to \omega$ de $\Omega \times \mathbb{R}_0^\infty$ sur Ω, et

$$f(\omega, \lambda) = \sum_i \lambda_i \beta_i(\omega) - \alpha(\omega).$$

Donc,

$$G = (pr_\Omega \otimes f)^{-1}(\text{Graph } V) \tag{2}$$

où $pr_\Omega \otimes f$ désigne l'application de $\Omega \times \mathbf{R}_0^\infty$ dans $\Omega \times E$, définie par la formule

$$(pr_\Omega \otimes f)(\omega, \lambda) = \big(pr_\Omega(\omega, \lambda), f(\omega, \lambda)\big)$$

On va montrer que $pr_\Omega \otimes f$ est $\big(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_0^\infty), \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)\big)$-mesurable. Comme la mesurabilité de pr_Ω est évidente, il suffit de montrer que $f(.,.)$ est mesurable. Il est claire que pourtout $\lambda \in \mathbf{R}_0^\infty$, $f(\cdot, \lambda)$ est $\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E)\big)$-mesurable, et comme on l'a remarqué plus haut, pour tout $\omega \in \Omega$ $f(\omega,.)$ est continue sur $\mathbf{R}_0^\infty$, d'après un résultat de Castaing (/7/, th. 1, corollaire 1), $f(.,.)$ est $\big(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_0^\infty), \mathcal{B}(E)\big)$-mesurable.

Ainsi, $pr_\Omega \otimes f$ est mesurable. Il en résulte de (2), que G, et donc, Graph ψ est de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_0^\infty)$.

D'après le théorème de sections de V. Neumann pour les espaces sous-liniens (/6/), ψ admet une section $\lambda(\omega) = \big(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \ldots\big)$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}_0^\infty)$-mesurables.

Il est évident que pour tout n, la fonction $\omega \mapsto \lambda_n(\omega)$ est $\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^1)\big)$-mesurable, et pour tout $\omega \in \Omega$, la suite numérique $\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega), \ldots$ ne contient qu'un nombre fini de termes nonzéros. Par la construction de $\lambda(\omega)$, il est évident que l'application

$$\beta(\omega) = \sum_{(i)} \lambda_i(\omega)\, \beta_i(\omega)$$

possède des propriétés 1), 2) du théorème. Il reste à montrer que $\beta(\cdot)$ est $\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E)\big)$-mesurable.

Soient

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \lambda_i(\omega) = 0 \quad \forall i \geqslant n+1\}$$

Il est claire que pour tout $n = 1, 2, \ldots$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, et sur A_n on a

$$\beta(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\omega)\, \beta_i(\omega)$$

Comme E est souslinien, $\beta_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des limites des suites de fonctions étagées /6/, la fonction $\beta(\cdot)|_{A_n}$ est mesurable. Donc /6/

$$\text{Graph } \big(\beta(\cdot)|_{A_n}\big) \in (\mathcal{A} \cap A_n) \otimes \mathcal{B}(E) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$$

$$\text{où} \quad \mathcal{A} \cap A_n = \{A' \subset \Omega \mid A' = A \cap A_n,\ A \in \mathcal{A}\}$$

Par suite,

$$\text{Graph } \beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\text{Graph } \beta) \cap (A_n \times E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Graph}(\beta|_{A_n}) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)$$

et β est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(E))$-mesurable /6/.

COROLLAIRE. Les hypothèses et notions étant celles du théorème 1, supposons en outre que $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un espace mesurable, muni d'une mesure* $\mu \geqslant 0$, *finie, complète.*

Alors outre 1) et 2), l'application $\beta(\omega)$ *possède la propriété :*

3) Pour tout $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) < +\infty$ et pourtout $\varepsilon > 0$, il existe un sousensemble A_ε de A, $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, un entier n_ε tels que $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ et

$$\beta(\omega) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(\omega)\, \beta_i(\omega)$$

pour tout $\omega \in A_\varepsilon$

DÉMONSTRATION. Il suffit de poser

$$A_n = \{ \omega \in A \mid \lambda_i(\omega) = 0 \ \ \forall i \geqslant n+1 \}$$

et remarquer que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. UN THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES APPLICATIONS MULTIVOQUES À VALEURS DANS LES ESPACES SOUSLINIENS.

Soient $I = [0\ T) \subseteq [0\ \infty)$, μ une mesure de Radon positive définie sur I, $\mathcal{A}_\mu$ la tribu des sousensembles μ-mesurables de I, E un espace localement convexe souslinien.

On désigne par $L^\infty_{E'}(I, \mu)$ l'espace des classes μ-équivalentes des applications scalairement mesurables $g(t)$ prenant μ-presque partout valeurs dans les parties équicontinues de E', et $L^1_E(I, \mu)$ l'espace des classes μ-équivalentes des applications μ-mesurables $f(t)$ de I dans E telles que $\langle f(t), g(t) \rangle$ soit μ-intégrable pour tout $g(\cdot) \in L^\infty_{E'}(I, \mu)$. Remarquons que comme E est souslinien, $\langle f(t), g(t) \rangle$ est toujours-mesurable /10/.

Considérons dans $L^1_E(I, \mu)$ la topologie $\mathcal{T}_I$, définie par le système fondamental de voisinages de zéro :

$$V_{\varepsilon, g_1, g_2, \ldots, g_m} = \{ f \in L^1_E(I, \mu) \mid \sup_{\substack{t', t'' \in I \\ j=1,2,\ldots,m}} \left| \int_{t'}^{t''} \langle f(t), g_j(t) \rangle d\mu \right| < \varepsilon \}$$

où $g_j(t)$ sont de $L_E^\infty(I, \mu)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, m est un entier quelconque. Il est claire que cette topologie est plus forte que la topologie faible dans $L_E^\infty(I, \mu)$.

Soit Γ une application multivoque de I à valeurs dans les parties nonvides de E. On désigne par S l'ensemble des classes μ-équivalentes de sections mesurables de Γ.

THÉORÈME 2. Supposons que

1) $\mu \geqslant 0$, *sans atomes*

2) Graph $\Gamma \in \mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$

3) *il existe une partie bornée B dans E et une fonction* $\rho(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I, \mu)$ *telles que pour tout $t \in I$, $\Gamma(t)$ est un compact convexe nonvide contenue dans $\rho(t) B$.*

Alors, $S_{\ddot{\Gamma}}$ est dense dans S_Γ pour la topologie τ_I

Afin de démontrer théorème 2, démontrons le lemme suivant quiserait utilisé également dans la démonstration du théorème 3.

LEMME. Soient $J = [0, T_1] \subset [0\ \infty)$, μ une mesure de Radon positive sans atomes sur J, $\beta_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des applications $(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}(F))$ - mesurables de J dans un espace de Banach séparable F telles que

$$\beta_i(\cdot) \in L^1_F(J, \mu) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et soit

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\, \beta_i(t)$$

avec

$$\lambda_i(t) \geqslant 0, \quad \mu\text{-mesurables et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = 1$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition de J en n sousensembles μ-mesurables M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ telle que

$$\sup_{t', t'' \in J} \left\| \int_{t'}^{t''} \Big[\beta(t) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t)\, \beta_i(t)\Big]\, d\mu \right\| < \varepsilon$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que si l'on pose

$$\|f\|_{s_J} = \sup_{t', t'' \in J} \left\| \int_{t'}^{t''} f(t)\, d\mu \right\| \ \big(\forall f \in L^1_F(J, \mu)\big),$$

$\|\cdot\|_{s_J}$ est une norme et $\|f\|_{s_J} \leqslant \|f\|_{L^1_F}$

Par la définition de $L^1_F(J, \mu)$, toute fonction de $L^1_F(J, \mu)$ peut être approchée pour la norme de $L^1_F(I, \mu)$ par des fonctions continues, par suite, par des.

fonctions μ-mesurables constantes par morceaux. Soient $\gamma_i(.)$ des fonctions μ-mesurables constantes par morceaux telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \| \beta_i(\cdot) - \gamma_i(\cdot) \|_{L_F^1} < \frac{\varepsilon}{6} \tag{3}$$

Comme μ est sans atomes, il existe une partition finie de J en intervals $J_p (p = 1, 2, ..., k)$ tels que $J_p \leqslant J_{p+1}$ (càd $t' < t'$,$\forall t' \in J_p$, $t'' \in J_{p+1}$) $(p = 1, 2, ..., k)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{J_p} \| \beta_i(t) \| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{8} \tag{4}$$

et de plus, les fonctions $\gamma_i(\cdot)$ prènnent des valeurs constantes $a_p^{(i)}$ sur chaque J_p $(p = 1, 2, ..., k)$

Comme

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{J_p} \lambda_i(t) \, d\mu = \int_{J_p} d\mu = \mu(J_p)$$

on peut diviser chaque J_p en n sousintervals disjoints $J_{p,1}, J_{p,2}, ..., J_{p,n}$ tels que

$$\mu(J_{p,i}) = \int_{J_p} \lambda_i(t) \, d\mu$$

Posons

$$M_i = \bigcup_{p=1}^{k} J_{p,i}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$

On a

$$\int_{J_p} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \, \gamma_i(t) \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_p^{(i)} \int_{J_p} \lambda_i(t) \, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_p^{(i)} \, \mu(J_{p,i}) = \int_{J_p} \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, \gamma_i(t) \, d\mu.$$

Par suite,

$$\left\| \int_{J_p} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \beta_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, \beta_i(t) \right) d\mu \right\| \leqslant$$

$$\int_{J_p} \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \, [\beta_i(t) - \gamma_i(t)] \, \| d\mu + \int_{J_p} \| \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, [\gamma_i(t) - \beta_i(t)] \, \| d\mu$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{J_p} \| \gamma_i(t) - \beta_i(t) \| \, d\mu \tag{5}$$

Estimons l'expression

$$\Phi(t', t'') = \| \int_{t'}^{t''} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \, \beta_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, \beta_i(t) \Big) d\mu \, \|$$

$$(t' \leqslant t'')$$

Soient $J_{p'}$, $J_{p''}$ les intervals qui contiennent respectivement t' et t''. D'après (3), (4), (5), on a

$$\Phi(t', t'') \leqslant \int_{J_{p'} \cup J_{p''}} \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \, \beta_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, \beta_i(t) \, \| \, d\mu \; +$$

$$+ \sum_{p=p'+1}^{p''-1} \| \int_{J_p} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \, \beta_i(t) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(t) \, \beta_i(t) \Big) \, d\mu \, \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sum_{i=1}^{n} \int_{J} \| \gamma_i(t) - \beta_i(t) \| \, d\mu < \frac{5\varepsilon}{6}$$

Donc

$$\| \beta(\cdot) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{M_i}(\cdot) \, \beta_i(\cdot) \|_{s_J} = \sup_{t', t'' \in J} \Phi(t', t'') < \varepsilon$$

et le lemme est prouvé.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.

Remarquons d'abord que $S_\Gamma \subset L^1_E(I, \mu)$. En effet, soient $g(\cdot) \in L^\infty_{E'}(I, \mu)$ et H_g une partie équicontinue dans E' qui contient $g(t)$ pour μ-presque tout $t \in I$. Alors le polaire U dans E de H_g est un voisinage de zéro dans E et il existe donc une constante $c = c(g) > 0$ telle que B, $B \subset cU$ Si $\gamma(\cdot) \in \mathcal{S}_\Gamma$, on a donc

$$| \langle \gamma(t), \; g(t) \rangle | \leqslant c\rho(t)$$

par suite, $\gamma(\cdot) \in L^1_E(I, \mu)$

Soient $\alpha(\cdot) \in S_\Gamma$, $\varepsilon > 0$, $g_j(\cdot) \in L^\infty_{E'}(I, \mu)$ $(j = 1, 2, ..., m)$. Prenons une fonction mesurable $\varepsilon(t) > 0$

telle que
$$\int_I \varepsilon(t) \, d\mu = \varepsilon \tag{6}$$

L'application multivoque

$$V: t \mapsto V(t) = \{x \in E \| \langle x, g_j(t) \rangle | < \frac{\varepsilon(t)}{6}, j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{7}$$

est de graphe dans $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$. En effet, les fonctions $(t, x) \mapsto \langle x, g_j(t) \rangle \pm \frac{\varepsilon(t)}{6}$ étant mesurables en t pour tout x fixé, continuses en x pour tout t fixé, d'après /7/, sont $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurables. Donc Graph $V \in \mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$ D'après le théorème 1, il existe alors des fonctions μ-mesurable $\lambda_i(t) \geqslant 0$, des applications $\beta_i(t) \in \ddot{\Gamma}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ telles que pour tout $t \in I$, la suite $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ ne contient qu'un nombre fini de termes nonzéros, $\sum\limits_{(i)} \lambda_i(t) = 1$ et

$$\beta(t) \in \alpha(t) + V(t) \tag{8}$$

où l'on pose.

$$\beta(t) = \sum_i \lambda_i(t)\, \beta_i(t) \tag{9}$$

Soient H une partie équicontinue dans E' qui contient les valeurs $g_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ pour μ presque tout $t \in I$, et $U = H$, le polaire de H dans E. Comme U est un voisinage du zéro dans E, il existe $c > 0$ tel que $B \subset cU$. Par suite, pour tout $\gamma(\cdot) \in S_\Gamma$, on a

$$|\langle \gamma(t), g_j(t) \rangle| \leqslant c\,\rho(t) \tag{10}$$

pour presque tout $t \in I$

Soit $J = [0, T_1] \subset I$ tel que

$$\int_{I \setminus J} \rho(t)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4c} \tag{11}$$

D'après le corolaire du théorème 1, il existe un entier $n > 0$, un sousensemble mesurable $K \subset J$ tels que

$$\int_{J \setminus K} \rho(t)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6c} \tag{12}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(t) = 1 \tag{13}$$

Donc
$$\beta(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(t)\, \beta_i(t) \tag{14}$$

pour tout $t \in K$

Posons

$$\widehat{\lambda_i}(t) = \begin{Bmatrix} \lambda_i(t) & \forall t \in K \\ \delta_{1i} & \forall t \in I \setminus K \end{Bmatrix} \tag{15}$$

où $\delta_{i1} = 1$ si $i = 1$, $\delta_{i1} = 0$ si $i \neq 1$,

et

$$\widehat{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \widehat{\lambda_i}(t)\, \beta_i(t) \tag{16}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \widehat{\lambda_i}(t) = 1 \ (\forall t \in I) \tag{17}$$

Il résulte de (10), (12), (15) que

$$\int_J \left| \langle \beta(t) - \widehat{\beta}(t), g_j(t) \rangle \right| d\mu = \int_{J \setminus K} \left| \langle \beta_1(t), g_i(t) \rangle \right| d\mu < \frac{\varepsilon}{6} \tag{18}$$

Posons

$$f_j^{(i)}(t) = \langle \beta_i(t), g_j(t) \rangle, \varphi_j(t) = \langle \widehat{\beta}(t), g_j(t) \rangle$$

Alors

$$f^{(i)}(\cdot) = \left(f_1^{(i)}(\cdot), f_2^{(i)}(\cdot), ..., f_m^{(i)}(\cdot) \right) : I \to \mathbb{R}^m$$
$$(i = 1, 2, ..., n_\varepsilon)$$

et il résulte de (16) que

$$\varphi(\cdot) = \left(\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), ..., \varphi_m(\cdot) \right) : I \to \mathbb{R}^m$$

Vu (17) on peut appliquer le lemme 1 avec $F = \mathbb{R}^m$, muni de la norme $\|x\| = \max_{i=1,...,m} |x_i|$ pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Il existe donc une partitron de J en n ensembles μ-mesurables M_i $(i = 1, 2, ..., n)$ telle que

$$\left\| \varphi(\cdot) - \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \chi_{M_i}(\cdot) f^{(i)}(\cdot) \right\|_{s_J} < \frac{\varepsilon}{6}$$

ou

$$\sup_{t', t'' \in J} \left\| \int_{t'}^{t''} \langle \widehat{\beta}(t) - \gamma(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right\| < \frac{\varepsilon}{6} \tag{19}$$

avec

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \chi_{M_i}(t)\, \beta_i(t)$$

Il est évident que $\gamma(\cdot) \in \mathcal{S}_\Gamma$. D'autre part d'après (6), (7), (8), (9) on a

$$\int_J \left| \langle \alpha(t) - \beta(t), g_j(t) \rangle \right| d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$$

Donc, il résulte de (18), (19) que

$$\sup_{t', t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \alpha(t) - \gamma(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right| \leqslant$$

$$\sup_{t', t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \alpha(t) - \beta(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right| + \sup_{t', t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \beta(t) - \hat{\beta}(t), g_j(t) \rangle .\right.$$

$$\left. d\mu \right| + \sup_{t', t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \hat{\beta}(t) - \gamma(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin, il en résulte de (10), (11), que

$$\sup_{t', t'' \in I} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \alpha(t) - \gamma(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right| \leqslant$$

$$\sup_{t', t'' \in J} \left| \int_{t'}^{t''} \langle \alpha(t) - \gamma(t), g_j(t) \rangle \, d\mu \right| + 2c \int_{I \setminus J} \rho(t) \, d\mu < \varepsilon$$

3. CAS DES ESPACES DE BANACH

Les notations I, μ, $\mathcal{A}_\mu$ étant comme dans lès théorème 2, soit E un espacède Banach. Introduisons la norme

$$\| f \|_{s_I} = \sup_{t', t'' \in I} \left\| \int_{t'}^{t''} f(t) \, d\mu \right\| \quad \forall f \in L^1_E (I, \mu)$$

Il est claire, que

$$\| f \|_{s_I} \leqslant \| f \|_{L^1_E}$$

Soit Γ une application multivoque de I dans E

On a

THÉORÈME 3. Supposons que

1) $\mu \geqslant 0$, *sans atomes*

2) *E est un espace de Banach séparable*

3) Graph $\Gamma \in \mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$, *et il existe une fonction* $\rho(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I, \mu)$ *telle que pour tout* $t \in I$, $\Gamma(t)$ *est un compact convexe nonvide contenu dans la boule de centre* $0 \in E$ *et de rayon* $\rho(t)$

Alors, $S_\Gamma^{\cdot\cdot}$ *est dense dans* S_Γ *pour la norme* $\|\cdot\|_{s_J}$

DÉMONSTRATION. Soient $\alpha(\cdot) \in \mathcal{S}_\Gamma$ Prenons une fonction $\varepsilon(t) > 0$ μ-mesurable définie sur I telle que

$$\int_I \varepsilon(t)\, d\mu = \varepsilon \tag{20}$$

L'application multivoque V:

$$V:\ t \to V(t) = \{x \in E \mid \|x(t)\| < \varepsilon(t)\}$$

est de graphe dans $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$, car

$$\text{Graph } V = \{(t, x) \in I \times E \mid \|x\| - \varepsilon(t) < 0\}$$

et la fonction $(t, x) \mapsto \|x\| - \varepsilon(t)$ est continue en x pour t fixé et μ-mesurable en t pour x fixé, par suite, elle est $\mathcal{A}_\mu \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable.

D'après le théorème 1, il existe des fonctions $\lambda_i(t) \geqslant 0$ μ-mesurable $(i = 1, 2, \ldots)$, des applications $\beta_i(\cdot) \in \mathcal{S}_\Gamma^{\cdot\cdot}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ définies sur I, telles que pour tout $t \in I$, la suite $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ ne contient qu'un nombre fini de termes nonzéros, et

$$\sum_{(i)} \lambda_i(t) = 1$$

$$\|\beta(t) - \alpha(t)\| < \frac{\varepsilon(t)}{6} \tag{21}$$

où
$$\beta(t) = \sum_{(i)} \lambda_i(t)\, \beta_i(t)$$

Soit $J = [0, T_1) \subset I$ tel que

$$\int_{I \setminus J} \rho(t)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{22}$$

D'après le corollaire du théorème 1, il existe un entier n_ε, un sousensemble μ-mesurable $K \subset J$ tels que

$$\int_{J \setminus K} \rho(t)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6},\ \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(t) = 1 \quad (\forall t \in K) \tag{23}$$

et par suite,

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(t)\, \beta_i(t) \quad (\forall t \in K)$$

'osons

$$\widehat{\lambda}_i(t) = \begin{cases} \lambda_i(t) & \forall t \in K \\ \delta_{1i} & \forall t \in I \setminus K \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_\varepsilon)$$

t

$$\widehat{\beta}(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \widehat{\lambda}_i(t)\, \beta_i(t) \qquad (\forall t \in I)$$

D'après (21) on a alors

$$\| \beta(\cdot) - \widehat{\beta}(\cdot) \|_{L^1_E(J\setminus K,\, \mu)} \leqslant \| (\lambda_1(\cdot) - 1)\, \beta_1(\cdot) + \sum_{i=2}^{n_\varepsilon} \lambda_i(\cdot)\, \beta_i(\cdot) \|_{L^1_E(J\setminus K,\, \mu)}$$

$$\leqslant \int \left| -1 + \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \lambda_i(t) \right| \rho(t)\, d\mu \leqslant \int_{J\setminus K} \rho(t)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{6} \tag{24}$$

Comme $\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \widehat{\lambda}_i(t) = 1\, (\forall t \in J)$ d'après le lemme 1, il existe une partition le J en n sousensembles mesurables $M_i\, (i = 1, 2, \dots, n)$ telle que

$$\left\| \widehat{\beta}(.) - \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \chi_{M_i}(\cdot)\, \beta_i(\cdot) \right\|_{s_J} < \frac{\varepsilon}{6} \tag{25}$$

Il est claire que l'application

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \chi_{M_i}(t)\, \beta_i(t)$$

appartient $\mathcal{S}_\Gamma$. D'après (21), (22), (24), (25) on a

$$\| \alpha(\cdot) - \gamma(\cdot) \|_{s_I} \leqslant \| \alpha(\cdot) - \gamma(\cdot) \|_{s_J} + \| \alpha(\cdot) - \gamma(\cdot) \|_{L^1(I\setminus J)} \leqslant$$

$$\leqslant \| \alpha(\cdot) - \beta(\cdot) \|_{s_J} + \| \beta(\cdot) - \widehat{\beta}(\cdot) \|_{s_J} + \| \widehat{\beta}(\cdot) - \gamma(\cdot) \|_{s_J} + \| \alpha(\cdot) - \gamma(\cdot) \|_{L^1(I\setminus J)} < \varepsilon$$

Q.E.D.

Remarque. On peut montrer sans peine que dans le cas de dimension finie la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_{s_I}$ coincide avec celle considérée dans le théorème 2. Dans le cas des espaces E de Banach séparables, on ne sait pas la relation entre ces topologies.

Je voudrais exprimer mes remerciements au prof. Ch. Castaing qui m'a proposé étudier ce thème et m'a donné de nombreux conseils précieux

RÉFÉRENCES

[1] Ljapounov, A. *Sur les fonctions — vecteurs complètement additives*. Bull. Acad. Sci. URSS. sér. Math. 4. 465 — 478 (1940)

[2] Castaing Ch. *Sur les multi — applications mesurables*. Thèse. Caen (1967)

[3] Valadier M. *Multi — applications mesurables à valeurs convexes compactes*. J. Math. Pures et Appl. 50 (1971) 265 — 297.

[4] Arkin V.I., Levin V. L. *Convexité des valeurs des intégrales vectorielles. Théorèmes de selections mesurables et problèmes variationnels.*

Ouspekhi Mat. Nauu, 27, 21 — 85 (1972)

[5] Phan văn Chương *On an approximation theorem for set-valued mappings*. Acta Math. Vietnam, 1976, T.1, N 2, p.p. 97 — 104.

[6] Castaing Ch, Valadier M. *Convex analysis and measurable multifunctions.*

Lectures Notes n° 580, Springer Verlag (1977)

[7] Castaing Ch. *Intégrales convexes duales. Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier (1973) exposé N° 6.

[8] Von Neumann, J. *On rings of operateurs. Reduction Theory*. Ann. of Math. 50 (1949) 401 — 485

[9] Sainte Beuve, M.F. *Sur la géneralisation d'un théorème de section mesurable de Von Neumann — Aumann.*

C.R.A.S. 276 (1973), 1297 — 1300.

[10] Valadier M. *Intégrandes sur les espaces localement convexes sousliniens*. C.R.A.S. S. Paris 276, 693 — 695 (1973).

Reçu le 24-1-1978