ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N° 2 (1978)

Sur le feuilletage defini par une equation de Pfaff algebrique sur P_nC(*)

TRẦN HUY HOÀNG
Departement de Mathematique
Université de Strasbourg

INTRODUCTION

1. Cet article est une contribution à l'étude des équations de Pfaff algébriques sur l'espace projectif complexe P_nC. On considère les équations de la forme

$$(1) \qquad \omega = \sum_0^n \omega^i (x_0, \ldots, x_n)\, dx_i = 0$$

où ω^i sont des pylynômes homogènes premiers entre eux, de même degré, et vérifiant l'identité $\Sigma\, x_i\, \omega^i = 0$.

L'ensemble singulier S de cette équation est la partie fermée de P_nC définie par les équations $\omega^0 = \omega^1 = \ldots = \omega^n = 0$. Une solution algébrique de codimension 1 de l'équation $\omega = 0$ est par définition un polynôme homogène irréductible f tel que $\omega \wedge df = 0$ sur $f = 0$.

Lorsque ω est complètement intégrable (i.e $\omega \wedge d\omega = 0$), sur $P_nC - S$, l'équation (1) définit un feuilletage analytique $\mathcal{G}$ de codimension complexe 1.

Une feuille F de $\mathcal{G}$ est dite algébrique si F est la restriction à $P_nC - S$ d'une hypersurface algébrique de P_nC. Elle correspond biunivoquement à une solution algébrique de codimension 1 de l'équation $\omega = 0$.

Diverses questions ont été posées sur la nature du feuilletage et plus particulièrement sur ses feuilles algébriques :

(*)Presented to the Vietnam Second Mathematical Congress, Hanoi August 1977.

1) Que peut-on dire du nombre des feuilles algébriques?

2) Le feuilletage $\mathcal{F}$ admet-il des feuilles compactes (dans $P_nC - S$)?

3) Y a-t-il une relation entre la nature topologique des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ et les solutions algébriques de l'équation $\omega = 0$? Peut-on énoncer une condition suffisante pour qu'il existe des solutions algébriques?

Les réponses ont été apportées:

— à la question 1) et sur P_2C par le théorème de Darboux (voir [1] et [4]):

« ou bien il y a une infinité de solutions algébriques. Alors il existe une intégrable première qui est une fraction rationnelle et toutes les solutions sont algébriques.

ou bien il n'y a qu'un nombre fini N de solutions algébriques, $N = \dfrac{m(m-1)}{2} + 2$; m étant le degré des coefficients ω^i de ω ».

Une généralisation de ce résultat aux équations sur P_nC a été donnée par J.P. Jouanolou dans [4].

— à la question 2) par le théorème de Gérard-Jouanolou (voir [2]) qui affirme la non-existence de variétés intégrales compactes de codimension 1 dans $P_nC - S$ pour l'équation $\omega = 0$.

Une réponse à la question 3) sera donnée dans cet article.

2. L'exposé se divise en deux parties:

La première partie contient des généralités. Les définitions et propriétés y sont exposées. On considère une équation de Pfaff algébrique $\omega = 0$ sur P_nC, complètement intégrable, et de lieu singulier S. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini sur $P_nC - S$ par $\omega = 0$. Une feuille de $\mathcal{F}$ sera dite propre si elle est ouverte dans son adhérence (relativement à P_nC) et impropre sinon.

On rappelle alors la définition du bout d'une feuille et donne la classification des feuilles de $\mathcal{F}$. Cette classification, due à M. Suzuki ([7]) est légèrement plus fine que celle traditionnellement utilisée, et qui consiste à distinguer seulement les feuilles propres des feuilles impropres. Elle nous servira à caractériser les feuilles algébriques.

On rappellera ensuite les définitions et théorèmes concernant les feuilletages de Painlevé: ils sont nécessaires à la démonstration des résultats exposés dans la suite.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à l'étude des équations de Pfaff algébriques sur P_nC complètement intégrables. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini par une telle équation sur $P_nC - S$ et $E = \{\bar{F}/F \in \mathcal{G}\}$ ($\bar{F}$ étant l'adhérence de F relativement à P_nC). On démontrera que E est un ensemble inductif. (la relation d'ordre étant l'inclusion).

De là, on déduira que : « *Si toutes les feuilles de $\mathcal{G}$ sont propres, alors il existe des solutions algébriques* ».

On démontrera ensuite que si $\bar{K}$ est un minimal de E, alors toute hypersurface algébrique de P_nC doit le rencontrer.

PREMIERE PARTIE

GENERALITES

§ 1. Formes ; Equations de Pfaff algebriques ; Ensemble singulier et solutions algebriques d'une equation de Pfaff algebrique sur P_nC.

DEFINITIONS :

1.1. *Une forme de Pfaff algébrique sur l'espace projectif complexe* P_nC *est une forme* $\omega = \sum_{0}^{n} \omega^i (x_0, ..., x_n) dx_i$ sur C^{n+1} à coefficients polynômiaux homogènes de même degré, vérifiant $\sum x_i \omega^i = 0$.

1.2. *Une équation de Pfaff algébrique sur* P_nC est la donnée d'une famille de formes de Pfaff algébriques sur P_nC $\{\lambda\omega\}$ où λ décrit C^* et où ω est une forme algébrique dont les coefficients polynômiaux ω^i sont premiers entre eux.

1.3. *Remarque :* L'identité $\sum x_i \omega^i = 0$, qui exprime que les droites issues de 0 dans C^{n+1} sont des variétés intégrales, permet de définir $\omega = 0$ comme équation sur P_nC.

Plus précisément :

Le champ en un point $x = (x_0, ..., x_n)$ et le champ en λx, pour tout $\lambda \in C^*$, doivent être proportionnels.

Comme ils sont respectivement

$$\sum \omega^i (\lambda x)\, d(\lambda x_i) = \sum \omega^i (\lambda x)\, (x_i\, d\lambda + \lambda dx_i)$$

et $\quad \sum \omega^i (x)\, dx_i$.

Cette condition équivaut à l'identité $\sum x_i \omega^i = 0$.

DEFINITIONS :

1.4. *L'ensemble singulier* d'une équation de Pfaff algébrique

$$\omega = \sum \omega^i\, dx_i = 0\,.$$

est la partie fermée S de P_nC d'équations homogènes

$$\omega^0 = \omega^1 = \ldots = \omega^n = 0$$

1.5. *Une solution algébrique de codimension* 1 de l'équation $\omega = 0$ est un polynôme $f(x_0, ..., x_n)$ homogène irréductible tel que $\omega \wedge df = 0$ sur $(f = 0)$.

§2. Etude topologique des feuilles du feuilletage defini par une equation de Pfaff algebrique.

On considère $\omega = \sum_0^n \omega^i \, dx_i$ $(\Sigma x_i \omega^i = 0)$ une forme de Pfaff algébrique sur $P_n C$, qu'on suppose complètement intégrable (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$).

Soit S son lieu singulier.

D'après le théorème de Frobenius, l'équation $\omega = 0$ définit dans $P_n C - S$ un feuilletage $\mathcal{G}$ de dimension complexe $n - 1$.

2.1. *DEFINITIONS.* Soit F une feuille du feuilletage $\mathcal{G}$.

1) F sera appelée une *feuille algébrique* si elle est la trace sur $P_n C - S$ d'une sous-variété algébrique F_a de $P_n C$.

2) F sera dite *propre* si elle est ouverte dans son adhérence (relative à $P_n C$), et impropre sinon.

3) On appelle *bout* de F, l'ensemble $B(F) = \overline{\overline{F} - F}$ (les adhérences étant relatives à $P_n C$).

2.2. *Propriétés de* $B(F)$:

Il résulte facilement du « théorème de continuité » que $B(F)$ est un ensemble fermé invariant (voir [7], première partie). Autrement dit, si $B(F) \cap (P_n C - S) \neq \varnothing$, alors toute feuille passant par un point de $B(F) \cap (P_n C - S)$ est contenue dans $B(F)$.

F propre équivaut par définition à $B(F) = \overline{F} - F$.

2.3. *Conséquence : Classification des feuilles de* ([7], page 18) :

Puisque $B(F)$ est un fermé invariant, les trois cas suivants sont les seuls possibles :

(i) $B(F) \supset F$

La feuille F est alors impropre et $B(F) = \overline{F}$.

(ii) $B(F) \cap F = \varnothing$ et $B(F) \cap (P_n C - S) \neq \varnothing$?

La feuille F alors « s'accumule » à d'autres feuilles.

(iii) $B(F) \subset S$

(La feuille F est propre si et seulement si l'on se trouve dans un des cas ii) ou iii).)

2.4. *Cas où la codimension de S est supérieure ou égale à 2 :*

PROPOSITION. Supposons $\operatorname{codim}(S) \geqslant 2$.

Soit F une feuille de $\mathcal{F}$; $B(F)$ *son bout. Alors F est une feuille algébrique si et seulement si* $B(F) \neq \varnothing$ et $B(F) \subset S$.

Preuve. Si F est une feuille algébrique, on a $B(F) \neq \varnothing$ car $B(F) = \varnothing \Leftrightarrow \bar{F} = F \Leftrightarrow F$ est compacte.

Or, d'après un théorème de Gérard-Jouanolou ([2]), il n'existe pas de feuilles de $\mathcal{F}$ qui soient compactes. $B(F) \subset S$ car $\bar{F} \subset F_a$ implique

$$B(F) = \bar{F} - F \subset F_a - F \subset S.$$

Inversement, si $B(F) \subset S$, alors F est une feuille propre et donc un sous-ensemble analytique de $P_nC - S$.

Puisque S est un sous-ensemble analytique de P_nC, F un sous-ensemble analytique de $P_nC - S$, $\dim(F) = n-1$ et $\dim(S) \leqslant n-2$; on se trouve dans les hypothèses du théorème de Remmert-Stein ([5], page 123) qui s'énonce :

« Soit X un espace complexe, Y un sous-ensemble analytique de X, A un sous-ensemble analytique de $X - Y$. Supposons qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $\dim Y \leqslant p-1$ alors que $\dim_a A \geqslant p$ pour tout $a \in A$.

[$\dim Y \leqslant -1$ signifie $Y = \varnothing$]. Alors la fermeture $\bar{A}$ de A dans X est un sous-ensemble analytique de X ».

Par suite la fermeture $\bar{F}$ de F dans P_nC est un sous-ensemble analytique de P_nC, donc un ensemble algébrique, en vertu du théorème de Chow ([5], page 125).

§ 3. Feuilletages de Painlevé.

Les définitions et théorèmes énoncés dans ce paragraphe ont été exposés dans [3].

3.1. *DEFINITIONS.* Soit $E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration et $\mathcal{F}$ un feuilletage défini sur E. $\mathcal{F}$ est dit simple pour la fibration (E, π, B) si en tout point $m \in E$, il existe un voisinage distingué de m dans lequel la plaque de m rencontre $\pi^{-1}(\pi(m))$ au point isolé m.

$\mathcal{F}$ est dit de Painlevé de 1re espèce pour π si tout chemin $(l, [0, 1])$ dans B est relevable en tout point m de $\pi^{-1}(l(0))$ dans la feuille de m.

3.2. *THEOREME* (Gérard—Sec).

1) *Soit* $E \xrightarrow{\pi} B$ *une fibration analytique complexe localement triviale et* $\mathcal{F}$

un feuilletage sur E *analytique de dimension égale à celle de* B, *simple pour cette fibration.*

Si de plus, la fibre de (E, π, B) *est compacte, alors* $\mathcal{G}$ *est un feuilletage de Painlevé de 1re espèce pour* (E, π, B).

2) *Le résultat est encore vrai si l'on remplace « fibration localement triviale à fibre compacte » par « submersion propre ».*

3.3. *Coséquence :*

La restriction de π à toute feuille de $\mathcal{G}$ est surjective.

SUR LE FEUILLETAGE DEFINI PAR UNE EQUATION DE PFAFF ALGEBRIQUE COMPLETEMENT INTEGRABLE SUR P_nC

§ 1. Existence de solutions algébriques d'une equation de Pfaff algébrique complètement integrable sur P_nC, lorsque toutes les feuilles du feuilletage défini par l'equation sur $P_nC - S$ sont propres.

Notations :

Dans la suite, nous noterons :

$C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n]}$: le sous-espace des $(x_1, \ldots, x_n)$ de C^n d'équation $x_i = 0$

$C_{[x_i]}$: la droite d'équation $x_j = 0$, pour tout $j \neq i$.

1.1. *LEMME. Soit* $\Omega = \sum_1^n A_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0$ *une équation de Pfaff polynôme sur* C^n, *complètement intégrable, dont un lieu singulier* Σ_1 *est de codimension supérieure ou égale à* 2. *Soit* Φ *une feuille du feuilletage défini sur* $C^n - \Sigma_1$ *par l'équation donnée.*

Alors il existe un indice i_0 *tel que la projection de* Φ *sur l'hyperplan coördonnées* $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$ *soit dense. En particulier, il n'existe aucune feuille dont l'adhérence soit compacte dans* C^n.

Preuve. Il existe un indice i_0 tel que A_{i_0} ne soit pas identiquement nul et que la feuille Φ ne soit pas contenue dans l'ensemble

$$\Sigma_2 = \Sigma_2^{i_0} = C_{[x_{i_0}]} X \left\{ (x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n) \in C^{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{le polynôme en } x_{i_0}\ A_{i_0} \\ (x_1, \ldots, x_n) \text{ est identiquement nul} \end{array} \right\}$$

= réunion des variétés intégrales (de dimension 1) d'équation

$(x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n) =$ constante.

En effet, si Φ est contenue dans Σ_2^i pour tout i, alors puisque

$$\Sigma_2^i \subset (A_i = 0),$$

Φ serait contenue dans l'ensemble singulier Σ_1, ce qui est impossible.

Montrons que la projection de Φ sur $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$ est dense. Par l'absurde, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert U dans $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]} X P_1 C$ et prolonge l'équation en une équation $\widetilde{\Omega}=0$ qui est définie par la donnée de :

— l'équation $\Omega = 0$ sur $C^{n+1} X C_{[x_{i_0}]}$

— l'équation $\Omega' = A'_1\, dx_1 + \ldots + A'_{i_0}\, dX_{i_0} + \ldots + A'_n\, dx_n = 0$ sur $C^{n-1} X C_{[X_{i_0}]}$ obtenue à partir de l'équation $\Omega = 0$ en faisant le changement de variable $X_{i_0} = \dfrac{1}{x_{i_0}}$.

Désignons par :

$\widetilde{\pi}$ la projection canonique de $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]} X P_1 C$ sur $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$

$\widetilde{\Phi}$ la feuille prolongeant Φ

$\widetilde{\Sigma}_1$ le lieu singulier de $\widetilde{\Omega}$

$\widetilde{\Sigma}_2$ = réunion des variétés intégrales de $\widetilde{\Omega} = 0$, d'équation

$$(x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, x_n) = \text{constante}$$

$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\pi}\, (\widetilde{\Sigma}_1 \cup \widetilde{\Sigma}_2)$.

Ecrivant A_{i_0} (resp. A'_{i_0}) sous la forme d'un polynôme en x_{i_0} (resp. en X_{i_0}), on voit, puisque A_{i_0} et A'_{i_0} ne sont pas identiquement nuls, que $\widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_2)$ — qui est l'ensemble des $(x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, x_n)$ qui annulent les coefficients des polynômes A_{i_0} ou A'_{i_0} — est un sous-ensemble analytique de

$C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$ et que $\dim \widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_2) \leqslant n - 2$.

Par ailleurs, puisque $\widetilde{\pi}$ est propre et que $\widetilde{\Sigma}_1$ est un sous-ensemble analytique de dimension inférieure ou égale à $n - 2$, $\widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_1)$ est aussi un sous-ensemble analytique de dimension inférieure ou égale à $n - 2$ de $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$.

$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_1 \cup \widetilde{\Sigma}_2) = \widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_1) \cup \widetilde{\pi}\,(\widetilde{\Sigma}_2)$ est donc un sous-ensemble analytique de $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$; $\dim(\widetilde{\Sigma}) \leqslant n-2$ et $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]} - \widetilde{\Sigma}$ est un ouvert dense et connexe de $C^{n-1}_{[x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n]}$.

Considérons la fibration

$$(C^{n-1}_{[x_1,\dots,x_{i_0},\dots,x_n]} - \widetilde{\Sigma}) \times P_1C \xrightarrow[\widetilde{\pi}_1 = \widetilde{\pi}/(C^{n-1}-\widetilde{\Sigma})\times P_1C]{} C^{n-1}_{[x_1,\dots,\widehat{x_{i_0}},x_n]} - \widetilde{\widetilde{\Sigma}}.$$

L'équation $\widetilde{\Omega} = 0$ définit dans $(C^{n-1}_{[x_1,\dots,\widehat{x_{i_0}},x_n]} - \widetilde{\widetilde{\Sigma}}) \times P_1C$ un feuilletage simple pour $\widetilde{\pi}_1$ puisqu'on a enlevé les variétés intégrales d'équation

$$(x_1, \dots, \widehat{x_{i_0}}, \dots, x_n) = \text{constante.}$$

On a donc un feuilletage simple pour une fibration triviale à fibre compacte. D'après 1.3.2, c'est un feuilletage de Painlevé de 1re espèce pour

$$\left((C^{n-1}_{[x_1,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,x_n]} - \widetilde{\Sigma}) \times P_1C,\ \widetilde{\pi}_1,\ C^{n-1}_{[x_1,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,x_n]} - \widetilde{\widetilde{\Sigma}}\right).$$

Si aucun point de Φ ne se projette dans U, alors puisque $\widetilde{\Phi}$ se projette surjectivement sur $U_1 = U \cap (C^{n-1}_{[x_1,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,x_n]} - \widetilde{\Sigma})$, $\widetilde{\Phi}$ contiendrait U_1.

Mais alors par prolongement analytique, $\widetilde{\Phi}$ (et donc aussi la feuille Φ) serait entièrement contenue dans $(C^{n-1} - \widetilde{\widetilde{\Sigma}}) \times (X_n = 0)$. On a une contradiction car Φ est à distance finie.

1.2. Soit $\omega = \sum\limits_0^n \omega^i (x_0, \dots, x_n)\, dx_i$ $(\Sigma x_i\, \omega^i = 0)$ une équation de Pfaff algébrique sur P_nC, supposée complètement intégrable (i.e. $\omega_\wedge d\omega = 0$).

Soit $X = (\omega^0 = \dots = \omega^n = 0)$ son ensemble singulier.

L'hypothèse sur les ω^i d'être premiers entre eux implique que la sous-variété algébrique S de P_nC est de codimension supérieure ou égale à 2.

L'équation $\omega = 0$ définit sur $P_nC - S$ un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension complexe 1.

Appelons E l'ensemble $\{\overline{F}/F \in \mathcal{F}\}$.

THEOREME. E est un ensemble inductif.

Preuve. Soit $\overline{F}_1 \supset \overline{F}_2 \supset \dots$ une chaine dans E.

Cherchons en un minorant. De deux choses l'une :

— ou bien un nombre fini au plus de $\overline{F}_i$ rencontre S,

— ou bien une infinité de $\overline{F}_i$ rencontre S : alors tous les $\overline{F}_i$ rencontrent S car la suite F_i est décroissante

Dans le premier cas, on $a \cap \overline{F_i} \neq \varnothing$ (intersection d'une suite décroissante d'ensembles compacts !) et $\cap \overline{F_i} \subseteq P_nC - S$. Si $x \in \cap \overline{F_i}$, alors à cause de l'invariance des $\overline{F_i}$, la fermeture $\overline{F_x}$ de la feuille passant par x sera contenue dans tous les $\overline{F_i}$ et donc un minorant de la chaîne.

Dans la deuxième cas, on peut supposer, quitte à faire un changement projectif de coordonnées dans P_nC, que S ne contient aucun des $(n+1)$ points du repère projectif $\alpha_0 = (1, 0, ..., 0)$, $\alpha_1 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \alpha_n = (0, ..., 0, 1)$.

On choisit une métrique d sur P_nC (qui soit bien entendu compatible avec sa topologie naturelle). Alors puisque S est un fermé dans un compact, l'ensemble $\{T_{1/p}\}_{p \in N^*}$ des voisinages tubulaires de S, où

$$T_{1/p} = \left\{ z \in P_nC / d(z, S) \leqslant \frac{1}{p} \right\}$$

forme un système fondamental de voisinages de S.

Pour tout sous-espace $P_{n-1}\, C_{[x_0, ..., \widehat{x_{i_0}}, ..., x_n]} = \{(x_0, ..., x_n) \in P_nC / x_{i_0} = 0\}$ de P_nC, considérons la projection cônique

$$\pi_{i_0} : P_nC - \{\alpha_{i_0}\} \longrightarrow P_{n-1}\, C_{[x_0, ..., \widehat{x_{i_0}}, ..., x_n]}$$

qui à un point M de $P_nC - \{\alpha_{i_0}\}$, associe le point d'intersection de la droite passant par α_{i_0} et M avec la sous-variété projective $P_{n-1}\, C_{[x_0, ..., \widehat{x_{i_0}}, ..., x_n]}$

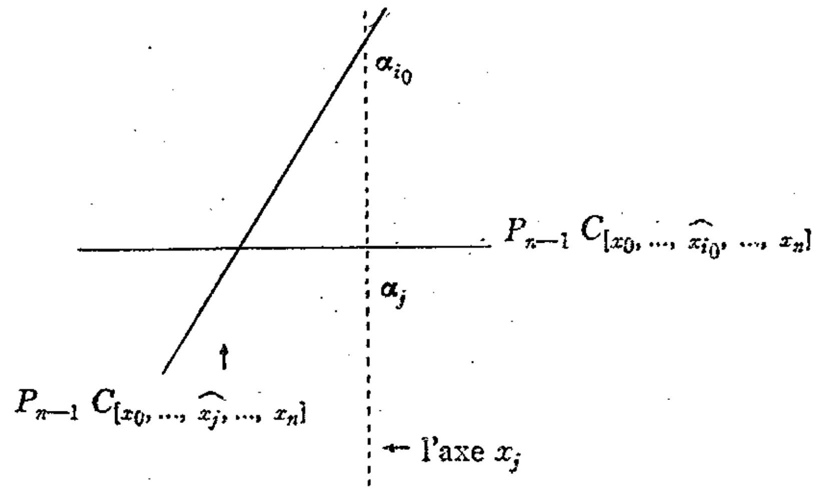
Soit $\pi_{i_0} \mid S$ la restriction de π_{i_0} à S.

L'application $\pi_{i_0} | S$ est bien définie car S ne contient pas α_{i_0}. Elle est propre et $\pi_{i_0}(S) = (\pi_{i_0}|S)(S)$ est une sous-variété algébrique de dimension inférieure ou égale à $n-2$ de $P_{n-1}\, C_{[x_0, ..., \widehat{x_{i_0}}, ..., x_n]}$.

Si z est un point de $P_{n-1} C_{[x_0, ..., \widehat{x_{i_0}}, ..., x_n]}$ et qui n'appartient pas à $\pi_{i_0}(S)$, alors $(\pi_{i_0})^{-1}(z) \cap S = \varnothing$ et l'on peut trouver un voisinage fermé $V(z)$ de z tel que $(\pi_{i_0})^{-1}(V(z))$ aura une intersection vide avec S. Comme les $T_{1/p}$ forment un système fondamental de voisinages de S, pour p assez grand, on a $T_{1/p}(\pi_{i_0})^{-1}(V(z)) = \varnothing$.

Par ailleurs, pour tout $j \neq i_0$, lors qu'on fait $x_j = 1$, alors on se place dans la carte O_j complémentaire de $P_{n-1}C_{[x_0, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n]}$.

Dans cette carte, $P_{n-1}\ C_{[x_0,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,x_n]} \cap O_j$ donne l'hyperplan affine de coordonnées $C^{n-1}_{[x_0,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]}$ et π_{i_0} est la projection sur $C^{n-1}_{[x_0,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]}$ parallèlement à l'axe x_j



On voit ainsi que pour p suffisamment grand, la projection de $T_{1/p} \cap O_j$ sur $C^{n-1}_{[x_0,\dots,\widehat{x_{i_0}},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n]}$ n'est pas dense.

Comme on n'a qu'un nombre fini d'hyperplans affines de coordonnées, on peut donc choisir p suffisamment grand pour que le tube $T = T_{1/p}$, quand on se met dans une carte O_j, ne se projette jamais de façon dense sur tout hyperplan de coordonnées de la carte.

Soit ∂T la frontière de T.

Chaque $\bar{F}_i$ de la chaîne doit couper ∂T car $\bar{F}_i$ rencontre S et ne peut se trouver à l'intérieur de T. En effet, sinon en se plaçant dans une carte O et puis en projetant $\bar{F}_i \cap O$ sur les différents hyperplans de coordonnées de O, on aurait une contradiction avec le lemme II.1.1 : la projection de $F_i \cap O$ sur tout hyperplan de coordonnées de O, qui est contenue dans la projection de T sur le même hyperplan, ne serait jamais dense.

∂T étant compact, on a donc $\bigcap_i (\bar{F}_i \cap \partial T) \neq \emptyset$.

Si $x \in \cap (\bar{F}_i \cap \partial T)$, alors $x \notin S$ et la feuille F_x passant par x et telle que $\bar{F}_i \supset \bar{F}_x$ pour tout i, et $\bar{F}_x$ est donc un minorant de la chaîne.

C.Q.F.D.

1.3. *Application à l'étude de l'existence des solutions algébriques de l'équation lorsque toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont propres :*

THEOREME. Soit $\omega = 0$ une équation de Pfaff algébrique sur P_nC, complètement intégrable S le lieu singulier et $\mathcal{G}$ le feuilletage défini sur $P_nC - S$.

Supposons que toutes les feuilles de $\mathcal{G}$ sont propres. Alors :

1) Chaque feuille F donnée contient dans son adhérence une solution algébrique (autrement dit, ou bien F est algébrique, ou bien F « s'accumule » à une feuille algébrique).

2) En particulier, chaque feuille de $\mathcal{G}$ contient dans sa frontière une composante irréductible de dimension $n-2$ de S.

Preuve. 1) Soit F une feuille du feuilletage $\mathcal{G}$.

D'après le théorème 1.2., $E = \{\bar{F} \mid F \in \mathcal{G}\}$ est un ensemble inductif. Par Zorn, F contient donc un minimal, disons K.

Considérons le bout $B(K)$ de K (revoir I. § 2).

Puisque K est propre, on ne peut pas avoir $B(K) \supset K$ (cf. I.3.3., i).

On ne peut pas non plus avoir

$$B(K) \cap K = \varnothing \quad \text{et} \quad B(K) \cap (P_nC - S) \neq \varnothing$$

puisque $\bar{K}$ est un minimal.

Donc nécessairement $B(K) \subset S$.

Comme codim$(S) \geqslant 2$, la proposition I.2.4. implique que $\bar{K}$ est une variété algébrique.

2) La partie 2) du théorème est une conséquence immédiate de la partie 1) et du théorème I.b) de [2] : toute solution algébrique d'une équation de Pfaff algébrique contient une composante irréductible de dimension $n-2$ du lieu singulier S.

§ 2. Les minimaux de $E = \{\bar{F} \mid F \in \mathcal{G}\}$ ont une intersection non vide avec toute hypersurface algebrique de P_nC.

Comme précedemment, soit :

$\omega = 0$ une équation de Pfaff algébrique sur P_nC, complètement intégrable

S son lieu singulier (codim $S \geqslant 2$)

$\mathcal{G}$ le feuilletage défini sur $P_nC - S$

E l'ensemble inductif $\{\bar{F} \mid F \in \mathcal{G}\}$.

2.1. *PROPOSITION. Soit $f(x_0, \ldots, x_n)$ un polynôme homogène de degré $p > 0$, V la variété algébrique (de dimension n dans C^{n+1}) d'équation $f = 1$.*

Alors la forme ω_V induite par ω sur V définit sur $V-(S \cap V)$ un feuilletage de dimension complexe $n-1$ qui possède la propriété suivante :

pour toute feuille φ donnée de ce feuilletage, il existe deux indices i_0 et $j_0 (i_0 \neq j_0)$ tels que la projection de φ sur la variété coordonnées $C^{n-1}_{[x_0, \ldots, \hat{x}_{i_0}, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n]}$ soit dense.

En particulier, il n'existe pas de feuilles d'adhérence compacte.

2.2 *THEOREME. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini sur $P_nC - S$ par une équation de Pfaff algébrique $\omega = 0$ complètement intégrable, E l'ensemble inductif $E = \{\bar{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$.*

Soit $\bar{K}$ un minimal de E et $(f = 0)$ une hypersurface algébrique dans P_nC. Alors $\bar{K}$ et $(f = 0)$ ont une intersection non vide.

Preuve. Soit p le degré de f et $V \subset C^{n+1}$ la variété d'équation $f = 1$. Considérons la projection pr :

$$\begin{array}{ccc} V & \qquad & (x_0, \ldots, x_n) \mid f(x_0, \ldots, x_n) = 1 \\ \downarrow{\scriptstyle pr} & & \downarrow \\ U = P_nC - (f = 0) & & \overline{(x_0, \ldots, x_n)} \end{array}$$

Elle définit un revêtement à p feuillets. En particulier, pr est propre.

On considère sur $V - S(\omega) \cap V$ le feuilletage défini par $\omega_V = 0$ (cf. II.2.1) et sur $U - (S \cap U)$ le feuilletage induit par $\mathcal{F}$.

Si $\bar{K}$ ne rencontre pas $(f = 0)$, alors $\bar{K}$ sera un compact dans U. Par suite, puisque la projection pr est propre, $pr^{-1}(\bar{K})$ est un compact dans V.

Comme pr projette feuille dans feuille, et que $\bar{K}$ est un fermé invariant, si x est un point de $pr^{-1}(\bar{K})$ (et x n'appartenant pas à $S(\omega) \cap V$), alors la feuille passant par x sera contenue dans $pr^{-1}(\bar{K})$, donc d'adhérence compacte.

Ceci contredit le lemme II.2.1.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. DARBOUX — *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du 1er ordre et du 1er degré.* Bull. Sci. Math., 2e série, 2A, 1878.

[2] R. GERARD, J.P. JOUANOLOU — *Etude de l'existence de variétés intégrales compactes de certains systèmes de Pfaff.* C.R.A.S. Paris, t. 277 (1973), Série A-167.

[3] R. GERARD, A. SEC — *Feuilletages de Painlevé.* Bull. Soc. Math. France 100, 1972, p. 47 à 72.

[4] J.P. JOUANOLOU — 1) *Solutions algébriques d'équations différencielles algébriques* Exposé au Séminaire d'équations différentielles, Strasbourg 1973 — 74.

2) *Equations de Pfaff algébriques sur $P_n C$.* Exposé au Séminaire Dijon-Strasbourg, Strasbourg 1975.

[5] R. NARASIMHAN — *Introduction to the theory of analytic spaces.* Lecture notes in Math., Springer Verlag, Berlin 1966.

[6] G. REEB — *Feuilletages, résultats anciens et nouveaux.* Les presses de l'Université de Montreal, 1972.

[7] M. SUZUKI — *Intégration globale de certains systèmes différentiels sur une variété de Stein de dimension 2.* (Note non encore publiée).

Reçu Juillet 1977