ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N°2 (1978)

Gr — catégories strictes

HOÀNG XUÂN SÍNH
École Supérieure de Pédagogie de Hanoi

On se propose dans cet article de démontrer que toute *Gr*-catégorie est équivalente à une *Gr*-catégorie stricte.

1. Gr-catégories strictes

DÉFINITION 1.1. On appelle *Gr*-catégorie [1] tout groupoïde P ayant une loi, i.e un foncteur

$$\otimes : P \times P \to P;$$

une contrainte d'associativité-unité

$$a_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\sim} (X \otimes Y) \otimes Z,\ g_X : X \xrightarrow{\sim} 1 \otimes X,\ d_X : X \xrightarrow{\sim} X \otimes 1;$$

et dont tous les objets X possèdent un inverse $(X^{-1},\ t_X,\ p_X)$ où

$$t_X : X^{-1} \otimes X \xrightarrow{\sim} 1, \quad p_X : X \otimes X^{-1} \xrightarrow{\sim} 1.$$

La *Gr*-catégorie P est dite *stricte* si les isomorphismes a, g, d, t, p sont des identités.

EXEMPLE 1. 2. Soient $d : L_1 \to L_0$, $\theta : L_0 \to \mathrm{Aut}\, L_1$ deux homomorphismes de groupes vérifiant deux conditions suivantes :

(i) Le triangle

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "\mu"'] & & L_0 \arrow[dl, "\theta"] \\ & \mathrm{Aut}\, L_1 & \end{tikzcd}$$

est commutatif, μ_z désignant l'automorphisme intérieur de L_1 défini par z.

(ii) $d\big(\theta_x(z)\big) = \mu_x\big(d(z)\big)$ pour tout $x \in L_0$ et tout $z \in L_1$.

A partir de d et θ vérifiant (i) et (ii), définissons une *Gr*-catégorie stricte P de la manière suivante :

$$\mathrm{Ob}\ P = L_0$$

$$\mathrm{Hom}_P(x, y) = \{(x, y)\} \times d^{-1}(yx^{-1})$$

et pour $\big((x_1, y_1), f_1\big) : x_1 \to y_1$, $\big((x_2, y_2), f_2\big) : x_2 \to y_2$ $\qquad x_1 \otimes x_2 = x_1 x_2$

$$\big((x_1, y_1), f_1\big) \otimes \big((x_2, y_2), f_2\big) = \big((x_1 x_2, y_1 y_2), f_1\, \theta_{x_1}(f_2)\big).$$

DEFINITIONS 1.3. On appelle *S*-système tout quadrupole (L_1, L_0, d, θ) où L_1, L_0 sont des groupes et $d : L_1 \to L_0$, $\theta : L_0 \to \mathrm{Aut}\, L_1$ des homomorphismes de groupes vérifiant les condditions de 1.2. La *Gr*-catégorie stricte P définie dans 1.2 est appellée *Gr - catégorie stricte définie par un S - système.*

Soient P et P' deux *Gr*-catégories strictes définies par deux *S*-systèmes (L_1, L_0, d, θ) et $(L'_1, L'_0, d', \theta')$ respectivement. Un *Gr*-foncteur de P dans P' est donc un couple (f_1, f_0) où $f_1 : L_1 \to L'_1$, $f_0 : L_0 \to L'_0$ sont des homomorphismes de groupes vérifiant les conditions :

(i) Le carré

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f_1} & L'_1 \\ {\scriptstyle d}\downarrow & f_0 & \downarrow{\scriptstyle d'} \\ L_0 & \longrightarrow & L'_0 \end{array}$$

est commutatif.

(ii) $f_1\big(\theta(x)\, z\big) = \theta'\big(f_0(x)\big)\, f_1(z)$

pour tout $x \in L_0$ et tout $z \in L_1$.

2. Noyau d'un Gr-foncteur

2.1. Soient P, P' des *Gr*-catégories et $(F, \breve{F}) : P \to P'$ un *Gr*-foncteur [1]. On se propose de chercher un triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) K est une *Gr*-catégorie.

(ii) $(J, \breve{J}) : K \to P$ est un *Gr*-foncteur.

(iii) $\lambda : (I_{P'}, \breve{I}_{P'}) \simeq (F, \breve{F}) \circ (J, \breve{J})$ est un $\otimes$-isomorphisme fonctoriel où $(I_{P'}, \breve{I}_{P'})$ est le *Gr*-foncteur à valeur constante $I_{P'}$ de K dans P'.

(iv) Le triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ est universel, i.e. pour tous les triples $(Q, (E, \breve{E}), \mu)$ vérifiant (i), (ii), (iii), on a un Gr-foncteur unique $(E', \breve{E}') : Q \to K$ tel que $(E, \breve{E}) = (J, \breve{J}) \circ (E', \breve{E}')$ et $\mu = \lambda * E'$.

PROPOSITION 2.2. Le triple $(K, (J, \breve{J}), \lambda)$ existe.

DÉMONSTRATION. On pose

$$Ob\, K = \{ (X, l') \mid X \in Ob\, P,\ l' : 1_{p'} \to F(X) \}$$

$$\mathrm{Hom}_K((X, l'), (Y, m')) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_p(X, Y) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} 1_{p'} & \xrightarrow{l'} & FX \\ \| & & \downarrow F(f) \\ 1_{p'} & \xrightarrow{m'} & FY \end{array} \text{ commute} \right\}.$$

La loi $\otimes$ sur les objets est

$$(X_1, l'_1) \otimes (X_2, l'_2) = (X_1 \otimes X_2, l')$$

avec l' défini par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} 1_{p'} & \xrightarrow{\quad l' \quad} & F(X_1 \otimes X_2) \\ {\scriptstyle d_{1_{p'}}}\downarrow & & \uparrow \breve{F} \\ 1_{p'} \otimes 1_{p'} & \xrightarrow{\quad l'_1 \otimes l'_2 \quad} & FX_1 \otimes FX_2 \end{array}$$

et sur les fliches

$$f_1 \otimes f_2 = f_1 \otimes f_2 \qquad \text{(dans } P\text{)}.$$

Enfin pour $(J, \breve{J})$ et λ on pose

$$J(X, l') = X, \qquad \breve{J} = id, \qquad \lambda_{(X, l')} = l'. \quad \square$$

DEFINITION 2.3. Le couple $(K, (J, \breve{J}))$ est appelé le *noyau* du Gr-foncteur $(F, \breve{F})$, on le note $\mathrm{Ker}(F, \breve{F})$.

3. Invariants d'une Gr-catégorie

3.1. Une Gr-catégorie P est déterminée à Gr-équivalence près par ses trois invariants [1] :

$\pi_0(P)$ = le groupe des classes d'isomorphie des objects de P,

$\pi_1(P) = \mathrm{Aut}\,(1)$ = le groupe abélien des automorphismes de l'objet unité qui est muni en plus d'une structure de π_0 — module,

$a(P) \in H^3(\pi_0, \pi_1)$ déterminé par la contrainte d'associativité de P.

On note par $S(\pi_0, \pi_1, \alpha)$ avec $\alpha \in a(P)$ une Gr-catégorie réduite de P. Un épinglage [1] dans P permet de construire la Gr-catégorie réduite de P et les Gr - équivalences canoniques correspondantes

$$P \underset{(H,\, \breve{H})}{\overset{(G,\, \breve{G})}{\rightleftarrows}} S(\pi_0, \pi_1, \alpha).$$

4. Cohomologie de groupes

4.1. Soient π un groupe et A un π-module. Nous considérons le complexe de cochaines

$$\xrightarrow{\delta} C^n(\pi, A) \xrightarrow{\delta} C^{n+1}(\pi, A) \xrightarrow{\delta}$$

où le groupe $C^n(\pi, A)$ de n-cochaînes est le groupe des fonctions g de n variables x_i dans π à valeurs dans A, satisfaisant les conditions de normalisation

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

L'homomorphisme de cobord $\delta : C^n(\pi, A) \longrightarrow C^{n+1}(\pi, A)$ est défini par

$$\delta g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= x_1\, g(x_2, \dots, x_{n+1}) + \Sigma\, (-1)^i g(x_1, \dots, x_i\, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} g(x_1, \dots, x_n).$$

Nous notons par $H^n(\pi, A)$ les groupes de cohomologie de ce complexe, ce sont les groupes de cohomologie du groupe π à coefficients dans le π-module A [2].

4.2. Nous savons que pour un groupe libre F, $H^n(F, A) = 0$ pour $n > 1$ [2]. Ici nous allons introduire le homomorphismes

$$S_n : C^{n+1}(F, A) \longrightarrow C^n(F, A), \quad n \geqslant 1$$

vérifiant les relations

(4.2.1) $$\delta S_{n-1} + S_n \delta = 1, \quad n \geqslant 2$$

qui redonnent le résultat $H^n(F, A) = 0$ $(n > 1)$ et dont nous avons besoin par la suite.

Pour cela introduisons le polynôme $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon - \dfrac{3}{2}$ qui donne

$$f(1) = 0$$
$$f(-1) = -1.$$

Ensuite considérons le groupe libre F qui consiste de 1 et des mots $x = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k}$ où les e_i sont des générateurs libres et les exponents $\varepsilon_i = \pm 1$.

Maintenant définissons S_n. Soient $g \in C^{n+1}(F, A)$ et $x_1, \dots, x_n \in F$. Posons, pour $x_n = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ (représentation pas nécessairement réduite)

$$S_n g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^n \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}} e_i^{f(\varepsilon_i)}, e_i). \tag{4.2.2}$$

On voit immédiatement que $s_n g(x_1, \dots, x_n)$ ainsi défini ne varie pas quand on fait varier la représentation de x_n, et on vérifie aisément que $s_n g$ satisfait aux conditions de normalisation. Montrons que

$$\delta S_{n-1} + S_n \delta = 1, \; n \geqslant 2.$$

Pour cela supposons que la représentation de $x_n = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ soit réduite et raisonnons par récurrence sur la longueur de la représentation réduite de x_n. Il est clair que la relation est vérifiée pour la longueur 0, i.e pour $x_n = 1$. Supposons que la relation est vérifiée pour pour la longueur $m-1$ et montrons la pour la longueur m. Pour cela on s'apercoit qu'on a

$$\begin{aligned}
&(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) = \\
&= (\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) + \\
&\quad + \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)} e_m) - \\
&\quad - \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)}),
\end{aligned}$$

ou compte tenu de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
&(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) = \\
&= g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}}) + \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)} e_m) - \\
&\quad - \varepsilon_m g(x_1, \dots, x_{n-1}, e_1^{\varepsilon_1} \dots e_{m-1}^{\varepsilon_{m-1}} e_m^{f(\varepsilon_m)})
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour $\varepsilon_m = \pm 1$,

$$(\delta S_{n-1} g)(x_1, \dots, x_n) + (S_n \delta g)(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n). \; \square$$

5. Gr-catégorie stricte d'une Gr-catégorie

5.1. On se propose ici de démontrer que toute Gr-catégorie est Gr-équivalente à une Gr-catégorie stricte définie par un S-système. La Méthode employée ici est la méthode d'effacement.

LEMMA 5 2. Soient P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N) où M est un groupe et N un M-module [1], et $u : L_0 \to M$ un homomorphisme d'un groupe L_0 dans M. Posons $S(L_0) = S(L_0, 0, 0)$. Pour qu'il existe un Gr-foncteur $S(L_0) \to P$ compatible avec u il faut et il suffit que $a(P) \in H^3(M, N)$ s'ammule dans $H^3(L_0, N)$.

DEMONSTRATION. Soit $(E, \breve{E}) : S(L_0) \to P$ un Gr-foncteur compatible avec u. Par un épinglage dans P nous obtenons un Gr-foncteur

$$(u, \breve{u}) : S(L_0) \to S(M, N, \alpha)$$

où $\alpha \in Z^3(M, N)$, $S(M, N, \alpha)$ une Gr-catégorie réduite de P [1], u l'homomorphisme donné et $\breve{u} \in C^2(L_0, N)$. En experiment la compatibilité de $(u, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité de $S(L_0)$ et $S(M, N, \alpha)$ nous obtenons

$$u^*(\alpha) = \delta\breve{u},$$

i.e $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

Inversement supposons que $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$. D'où $u^*(\alpha)$ est un cobord $\delta\breve{u}$, i.e $(u, \breve{u})$ est un Gr-foncteur de $S(L_0)$ dans $S(M, N, \alpha)$. Par la Gr-équivalence canonique

$$S(M, N, \alpha) \to P$$

donnée par l'épinglagle et le préépinglage dans P, nous obtenons un Gr-foncteur

$$(E, \breve{E}) : S(L_0) \to P. \quad \square$$

PROPOSITION 5.3. Soient P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N) et u un épimorphisme d'un groupe. L_0 dans M. Pour qu'il existe une Gr-cartégorie stricte P_0 préépinglée par (M, N), déterminnée par un S-système $(L_1, L_0; d, \theta)$ et un Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$ compatible avec u, il faut et il suffit que $a(P) \in H^3(M, N)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

DEMONSTRATION. Supposons qu'il existe une Gr-catégorie P_0 déterminée par un S-système (L_1, L_0, d, θ) et un Gr-foncteur préépinglé $(F, \breve{F}) : P_0 \to P$ compatible avec u. Soit $(D, \breve{D}) : S(L_0) \to P_0$ le Gr-foncteur canonique. Posons

$$(E, \breve{E}) = (F, \breve{F}) \circ (D, \breve{D}) : S(L_0) \to P$$

nous avons un Gr-foncteur compatible avec u. En vertu de 5.2 $a(P) \in H^3(M, N)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$.

Inversement supposons que $a(P)$ s'annule dans $H^3(L_0, N)$. En vertu de 5.2 il existe un Gr-foncteur $(E, \breve{E}) : S(L_0) \to P$ compatible avec u, qui par composition avec la Gr-équivalence canonique $P \to S(M, N, \alpha)$ nous donne le

Gr-foncteur $(u, \breve{u}) : S(L_0) \to S(M, N, \alpha)$ où $u^*(\alpha) = \delta \breve{u}$. Considérons la Gr-catégorie $\mathrm{Ker}(u, \breve{u})$. Nous avons

$$\mathrm{Ker}(u, \breve{u}) = S(L_1, 0, 0)$$

où $L_1 = \mathrm{Ker}\, u \times N$, la multiplication dans L_1 étant

$$(x, m)\,(y, n) = \bigl(xy,\ m + n + \breve{u}(x, y)\bigr) \tag{5.3.1}$$

d'après (2.2). Soient $y \in L_0$ et $(x, m) \in L_1$. Nous allons définir une action de y sur (x, m) notée $\theta(y)\,(x, m)$ et donnée par la formule

$$\theta(y)\,(x, m) = (yxy^{-1}, m_1)$$

avec m_1 défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
u(yxy^{-1}) & & u(y)\,u(xy^{-1}) \arrow[ll, "\breve{u}(y,\, xy^{-1})"'] & & u(y)\bigl(u(x)\,u(y^{-1})\bigr) \arrow[ll, "id \otimes \breve{u}(x,\, y^{-1})"'] \\
 & & & & u(y)\bigl(1 - u(y^{-1})\bigr) \arrow[u, "id \otimes (m \otimes id)"'] \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[uu, "m_1"] & = u(1) & = u(yy^{-1}) & & u(y)\,u(y^{-1}) \arrow[ll, "\breve{u}(y,\, y^{-1})"']
\end{tikzcd}$$

i.e

$$m_1 = u(y)\,m + u(y)\,\breve{u}(x, y^{-1}) + \breve{u}(y, xy^{-1}) - \breve{u}(y, y^{-1}). \tag{5.3.2}$$

Montrons que $\theta(y)$ est un homomorphisme de L_1 dans L_1. Il est clair que $\theta(y)\,(x, m) \in L_1$. Pour avoir l'égalité

$$\theta(y)\bigl((x, m)\,(x', m')\bigr) = \theta(y)\,(x, m)\ \theta(y)\,(x', m')$$

il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant venant de la compatibilité de $(u, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité dans $S(L_0)$ et $S(M, N, \alpha)$ [1]:

$$\begin{tikzcd}
u(yxy^{-1})\,u(yx'y^{-1}) \arrow[d, "\breve{u}(yxy^{-1},\, yx'y^{-1})"'] & \bigl(u(y)\,u(xy^{-1})\bigr)\bigl(u(y)\,u(x'y^{-1})\bigr) \arrow[l, "\breve{u}(y,\, xy^{-1}) \otimes \breve{u}(y,\, x'y^{-1})"'] \\
u(yxy^{-1}\,yx'\,y^{-1}) & \Bigl(u(y)\bigl(u(x)\,u(y^{-1})\bigr)\Bigr)\Bigl(u(y)\bigl(u(x)\,u(y^{-1})\bigr)\Bigr) \arrow[u, "\bigl(id \otimes \breve{u}(x,\, y^{-1})\bigr) \otimes \bigl(id \otimes \breve{u}(x',\, y^{-1})\bigr)"'] \arrow[d, equal] \\
u(y)\,u(xy^{-1}\,yx'\,y^{-1}) \arrow[u, "\breve{u}(y,\, xx'\,y^{-1})"] & u(y)\Bigl(\bigl(u(x)\,u(y^{-1})\bigr)\bigl(u(y)\,(u(x')\,u(y^{-1}))\bigr)\Bigr)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[d, "id \otimes \alpha\left(u(x)\,u(y^{-1}),\, u(y),\, u(x')\,u(y^{-1})\right)"] \\
u(y)\left(u(xy^{-1}yx')\,u(y^{-1})\right) \arrow[u, "id \otimes \breve{u}(xx',\, y^{-1})"] & u(y)\left(\left((u(x)\,u(y^{-1}))\,u(y)\right)\left(u(x')\,u(y^{-1})\right)\right) \arrow[d, equal] \\
u(y)\left(\left((u(xy^{-1}y)\,u(x')\right)u(y^{-1})\right) \arrow[u, "id \otimes \left(\breve{u}(x,x') \otimes id\right)"] & u(y)\left(\left(u(x)\,(u(y^{-1})\,u(y))\right)\left(u(x')\,u(y^{-1})\right)\right) \arrow[d, equal] \\
u(y)\left(\left((u(x)\,u(y^{-1}y))\,u(x')\right)u(y^{-1})\right) \arrow[u, equal] & u(y)\left(\left((u(x)\,(u(y^{-1})\,u(y))\,u(x')\right)u(y^{-1})\right) \arrow[l, "id \otimes \left(\left((id \otimes \breve{u}(y^{-1},\, y)) \otimes id\right) \otimes id\right)"']
\end{tikzcd}$$

ce qui donne

$$u(y)\,\breve{u}(x,\, y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(x',\, y^{-1}) + \breve{u}(y,\, xy^{-1}) + \breve{u}(y,\, x'\, y^{-1}) + \breve{u}(yxy^{-1},\, yx'y^{-1}) =$$
$$= \breve{u}(y,\, xx'\, y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(xx',\, y^{-1}) + u(y)\,\breve{u}(x,\, x') + \breve{u}(y,\, y^{-1})$$

en remarquant que

$$\alpha\left(u(x)\,u(y^{-1}),\, u(y),\, u(x')\,u(y^{-1})\right) = \alpha\left(u(y^{-1}),\, u(y),\, u(y^{-1})\right) = u^*(\alpha)\,(y^{-1},\, y,\, y^{-1}) =$$
$$= \delta\breve{u}(y^{-1},\, y,\, y^{-1}) = u(y^{-1})\,\breve{u}(y,\, y^{-1}) - \breve{u}(y^{-1},\, y).$$

Nous avons donc une application

$$\theta : L_0 \to \mathrm{End}\,(L_1).$$

Montrons que

(5.3.3) $$\theta\,(yz)\,(x,\, m) = \theta\,(y)\,\left(\theta\,(z)\,(x,\, m)\right).$$

Pour cela considérons le diagramme commutatif ci-dessous qui vient de la compatibilite de $(u,\, \breve{u})$ avec les contraintes d'associativité en remarquant que

$$\alpha\left(u\,(z),\, u(x)\,u(z^{-1}),\, u(y^{-1})\right) = \alpha\left(u(z),\, u(z^{-1}),\, u(y^{-1})\right) = \delta\breve{u}(z,\, z^{-1},\, y^{-1}) =$$
$$= u(z)\,\breve{u}(z^{-1},\, y^{-1}) + \breve{u}(z,\, z^{-1},\, y^{-1}) - \breve{u}(z,\, z^{-1})$$

et

$$\alpha\,\left(u(y),\, u(z),\, \left(u(x)\,u(z^{-1})\right)\, u(y^{-1})\right) = \alpha\,\left(u(y),\, u(z),\, u(z^{-1}\, y^{-1})\right) =$$
$$= \delta\breve{u}(y,\, z,\, z^{-1},\, y^{-1}) = u(y)\,\breve{u}(z,\, z^{-1}\, y^{-1}) - \breve{u}(yz,\, z^{-1}\, y^{-1}) + \breve{u}(y,\, y^{-1}) - \breve{u}(y,\, z).$$

$$
\begin{tikzcd}
u(yzxz^{-1}y^{-1}) & u(y)\,u(zxz^{-1}y^{-1}) \arrow[l, "\overline{u}(y,\, zxz^{-1}y^{-1})"'] \\
u(yz)\,u(xz^{-1}y^{-1}) \arrow[u, "\overline{u}(yz,\, xz^{-1}y^{-1})"] & u(y)\big(u(zxz^{-1})\,u(y^{-1})\big) \arrow[u, "id \otimes \overline{u}(zxz^{-1},\, y^{-1})"'] \\
u(yz)\big(u(x)\,u(z^{-1}y^{-1})\big) \arrow[u, "id \otimes \overline{u}(x,\, z^{-1}y^{-1})"] & u(y)\Big(\big(u(z)\,u(xz^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[u, "id \otimes \left(\overline{u}(z,\, xz^{-1}) \otimes id\right)"'] \\
\big(u(y)\,u(z)\big)\Big(u(x)\big(u(z^{-1})\,u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[u, "\overline{u}(y{,}z) \otimes \left(id \otimes \overline{u}(y^{-1}{,}z^{-1})\right)"] \arrow[d, equal] & u(y)\Big(\big(u(z)\,u(x)\,u(z^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[u, "id \otimes \left(\left(id \otimes \overline{u}(x{,}\, z^{-1})\right) \otimes id\right)"'] \\
\big(u(y)\,u(z)\big)\Big(\big(u(x)\,u(y^{-1})\big)\,u(y^{-1})\Big) \arrow[r, "\alpha\left(u(y),\ u(z),\ u(x)\,u(z^{-1})\,u(y^{-1})\right)"'] & u(y)\Big(u(z)\big(\big(u(x)u(z^{-1})\big)\,u(y^{-1})\big)\Big) \arrow[u, "id \otimes \alpha\left(u(z){,}u(x)u(z^{-1}){,}u(y^{-1})\right)"']
\end{tikzcd}
$$

En vertu de (5.3.2) et (5.3.3) nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
(x,\, m) &= \theta(1)\,(x,\, m) = \theta(yy^{-1})\,(x,\, m) = \theta\big(y^{-1}y\ (x,\, m)\big) = \\
&= \theta(y)\,\big(\theta(y^{-1})\,(x,\, m)\big) = \theta(y^{-1})\,\big(\theta(y)\,(x,\, m)\big).
\end{aligned}
$$

Donc $\theta(y)$ est un automorphisme, par conséquent θ est un homomorphisme du groupe L_0 dans le groupe Aut (L_1).

Posons

$$
\begin{aligned}
d : L_1 &\to L_0 \\
(x,\, m) &\mapsto x
\end{aligned}
$$

Nous obtenons ainsi un quadrupole $(L_1,\ L_0,\ d,\ \theta)$ qui est un S-système. Soit P_0 la Gr-catégorie stricte définie par ce S-système. Définissons un Gr-foncteur $(v,\ \overline{v}) : P_0 \to S(M,\ N,\ \alpha)$ de la manière suivante. Soient $x,\ y \in Ob\ P_0$ et $(s,\ m) : x \to y$ une flèche de P_0. Posons

$$
\begin{aligned}
v(x) = u(x),\ \ v(s,\ m) &= m + \overline{u}(s,\ x) \\
\overline{v}(x,\ x') &= \overline{u}(x,\ x').
\end{aligned}
$$

Vérifions d'abord que v est un foncteur. It est clair que $v(id_x) = id_{u(x)}$.
Soient deux fliches

$$
x \xrightarrow{(s,\ m)} y \xrightarrow{(t,\ n)} z
$$

Montrons que

$$v\big((t, n)\,(s, m)\big) = v(t, n)\,v(s, m)$$

i.e

$$m + n + \breve{u}(t, s) + \breve{u}(ts, x) = m + n + \breve{u}(s, x) + \breve{u}(t, y).$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}\alpha\,\big(u(t), u(s), u(x)\big) = \alpha\,\big(1, 1, u(x)\big) = 0 = \delta\breve{u}\,(t, s, x) = \\ = \breve{u}\,(s, x) - \breve{u}\,(ts, x) + \breve{u}\,(t, sx) - \breve{u}\,(t, s)\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité voulne.

Il nous reste à vérifier que $\breve{v}\,(x, x') : v(x)v(x') \to v(xx')$ est un $\otimes$-morphisme fonctoriel, i.e le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
v(x)v(x') \arrow[r, "\breve{v}(x,\, x')"] \arrow[d, "v(s,\, m)\,\otimes\, v(s',\, m')"'] & v(xx') \arrow[d, "v\left((s,\, m)\,\otimes\,(s',\, m')\right)"] \\
v(y)v(y') \arrow[r, "\breve{v}(y,\, y')"] & v(yy')
\end{tikzcd}$$

ou en l'explicitant

$$\begin{aligned}m + \breve{u}\,(s, x) + u(x)m' + u(x)\breve{u}\,(s', x') + \breve{u}\,(y, y') = m + u(x)m' + \\ + u(x)\breve{u}\,(s', x^{-1}) + \breve{u}(x, s'x^{-1}) - \breve{u}(x, x^{-1}) + \breve{u}(s, xs'x^{-1}) + \\ + \breve{u}\,(sxs'x^{-1}, xx') + \breve{u}\,(x, x').\end{aligned}$$

or cette égalité vient de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
u(sxs'x^{-1}xx') & & u(sxs'x^{-1})\,u(xx') \arrow[ll, "\breve{u}(sxs'x^{-1},\, xx')"'] \\
u(sx)\,u(s'x^{-1}xx') \arrow[u, "\breve{u}(y,\, y')"] & & \big(u(s)\,u(xs'x^{-1})\big)\,\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "\breve{u}(s,\, xs'x^{-1})\,\otimes\,\breve{u}(x,\, x')"'] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\,\big(u(s')\,u(x^{-1}xx')\big) \arrow[u, "\breve{u}(s,\, x)\,\otimes\,\breve{u}(s',\, x')"] & & \Big(u(s)\,\big(u(x)\,u(s'x^{-1})\big)\Big)\,\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "\left(id\,\otimes\,\breve{u}(x,\, s'x^{-1})\right)\,\otimes\, id"'] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\,\Big(u(s')\,\big(u(x^{-1})\,u(xx')\big)\Big) \arrow[u, "id\,\otimes\,\left(id\,\otimes\,\breve{u}(x^{-1},\, xx')\right)"] & & \Big(u(s)\,\big(u(x)\,(u(s')\,u(x^{-1}))\big)\Big)\,\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, "\left(id\,\otimes\,\left(id\,\otimes\,\breve{u}(s',\, x^{-1})\right)\right)\,\otimes\, id"'] \\
\big(u(s)\,u(x)\big)\,\Big(\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\,u(xx')\Big) \arrow[u, equal] & & \Big(\big(u(s)\,u(x)\big)\,\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\Big)\,\big(u(x)\,u(x')\big) \arrow[u, equal] \\
& \big(u(s)\,u(x)\big)\,\Big(\big(u(s')\,u(x^{-1})\big)\,\big(u(x)\,u(x')\big)\Big) \arrow[ul, "id\,\otimes\,\left(id\,\otimes\,\breve{u}(x,\, x')\right)"] \arrow[ur, "\alpha\left(u(s)\,u(x),\, u(s')\,u(x^{-1}),\, u(x)\,u(x')\right)"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc $(v, \breve{v})$ est un $\otimes$-foncteur qui est en plus compatible avec les contraintes d'associativité dans P_0 et $S(M, N, \alpha)$. Par conséquent $(v, \breve{v})$ est un Gr-foncteur. En outre par sa construction on a

$$\pi_0(P_0) = M, \quad \pi_1(P_0) = N$$

et on peut vérifier facilement que $(v, \breve{v})$ est un Gr-foncteur préépinglé. Par composition de $(v, \breve{v})$ avec la Gr-équivalence canonique $S(M, N, \alpha) \to P$, nous obtenons un Gr-foncteur préépinglé

$$(F, \breve{F}) : P_0 \to P \,. \square$$

COROLLAIRE 5.4. Soit P une Gr-catégorie préépinglée par (M, N). Il existe une Gr-catégorie stricte P_0 préépinglée par (M, N), déterminée par un S-système (L_1, L_0, d, θ) et un Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$.

DEMONSTRATION. Il suffit de prendre pour L_0 le groupe libre ayant pour générateurs les éléments de M, car on a dans ce cas $H^3(L_0, N) = 0$, d'où l'existence de P_0 et du Gr-foncteur préépinglé $P_0 \to P$ en vertu de (5.3). Etudions d'une manière plus détaillée P_0.

Les éléments y de L_0 sont alors les mots de la forme

$$y = e_1^{\varepsilon_1} e_2^{\varepsilon_2} \dots e_m^{\varepsilon_m}$$

avec $e_i \in M$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. Soit $u : L_0 \to M$ l'épimorphisme canonique et soit $S(M, N, \alpha)$ une Gr-catégorie réduite de P. Nous avons

$$u^*(\alpha) \in Z^3(L_0, N).$$

Considérons l'homomorphisme $S_2 : C^3(L_0, N) \to C^2(L_0, N)$ (4.2) qui nous donne, en vertu de (4.2.1),

$$\delta S_2\big(u^*(\alpha)\big) = u^*(\alpha).$$

Posons

$$\breve{u} = S_2\big(u^*(\alpha)\big)$$

Le couple $(u, \breve{u})$ est le Gr-foncteur de $S(L_0)$ dans $S(M, N, \alpha)$ que nous avons considéré dans 5.3. Pour $x, y = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_m^{\varepsilon_m}$ de L_0 nous avons en vertu de (4.2.2)

$$(5.4.1)\; \breve{u}(x,y) = S_2\big(u^*(\alpha)\big)(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha\big(u(x), u(e_1)^{\varepsilon_1} \dots u(e_{i-1})^{\varepsilon_{i-1}} u(e_i)^{f(\varepsilon_i)}, u(e_i)\big)$$

ce qui nous permet de conclure que $\breve{u}(x, y) = 0$ pour $x \in \operatorname{Ker} u$. Donc $L_1 = \operatorname{Ker} u$ $x N$ avec comme multiplication

(5.4.2) $$(x, m)(y, n) = (xy, m + n)$$

d'après (5.3.1), et l'homomorphisme $\theta : L_0 \to \operatorname{Aut}(L_1)$ est défini par

(5.4.3) $$\theta(y)(x,m) = \big(yxy^{-1}, u(y)\,m + \breve{u}(y, x)\big)$$

en vertu de (5.3.2) en tenant compte des relations

$$\breve{u}(x, y^{-1}) = 0$$

$$\alpha\big(u(y), u(x), u(y^{-1})\big) = \alpha\big(u(y), 1, u(y^{-1})\big) = 0 = \delta\breve{u}(y, x, y^{-1})$$

$$\breve{u}(yx, y^{-1}) = \breve{u}(y, y^{-1}).$$

Définissons $d : L_1 \to L_0$ toujours comme dans (5.3), nous obtenons une Gr-catégorie stricte P_0 déterminée par le S-système (L_1, L_0, d, θ). Quant au Gr-foncteur préépinglé $(v, \breve{v}) : P_0 \to S(M, N, \alpha)$, il est donné par les formules

$$v(x) = u(x),\ v(S, m) = m,\ \breve{v}(x, x') = \breve{u}(x, x')$$

d'après (5.3) en tenant compte de

$$\breve{u}(S, x) = 0. \quad \square$$

5.5. *Application : réalisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension.*

5.5.1. On se propose d'appliquer (5.4) pour retrouver le résultat de Mac Lane sur la realisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension [2].

5.5.2. *Invariant de Mac Lane.* Soient G un groupe, $\operatorname{Aut} G$ le groupe des automorphismes de G, $\mu : G \to \operatorname{Aut} G$ l'homomorphisme qui fait correspondre à chaque $x \in G$ l'automorphisme intérieur μ_x de G, $Z(G)$ le centre de G et $\operatorname{Autext} G$ le groupe des automorphismes extérieurs de G. Le S-système $(G, \operatorname{Aut} G, \mu, id_{\operatorname{Aut} G})$ définit une Gr-catégorie stricte notée $\operatorname{Aut} G$ dont les invariants sont

$$\pi_0(\operatorname{Aut} G) = \operatorname{Autext} G, \qquad \pi_1(\operatorname{Aut} G) = Z(G),$$

$$\alpha(\operatorname{Aut} G) = \text{invariant de Mac Lane [1]}.$$

PROPOSITION 5.5.3. Soient M un groupe, N un M-module et $\bar{\alpha} \in H^3(M, N)$. Il existe un groupe L_1 ayant pour centre N et un homomorphisme $\psi : M \to \operatorname{Autext} L_1$ induisant la structure de M-module donnée sur N et tels que $\operatorname{Obs}(M, L_1, \psi) = \bar{\alpha}$ (théorème de la réalisation d'un 3-cocycle comme l'obstruction d'un problème d'extension [2]).

DEMONSTRATION. Soit $\alpha \in \bar{\alpha}$. Nous obtenons une Gr-catégorie $S(M, N, \alpha)$. Construisons le S-système (L_1, L_0, d, θ) à partir de M, N, α

comme dans 5.4. Ensuite considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{d} & L_0 & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & O \\ \mu\downarrow & & \theta\downarrow & & & & \\ \mathrm{Int}\ L_1 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\ L_0 & \longrightarrow & \mathrm{Autext}\ L_1 & & \end{array}$$

Par conséquent θ induit un homomorphisme $\psi : M \to \mathrm{Autext}\ L_1$ qui, par la définition de θ (5.4.3), définit une structure de M-module sur N qui est la même que cella donnée sur N. En outre on voit sans peine que $Z(L_1) = N$ si $M \neq \{1\}$. Enfin considérons la Gr-catégorie stricte N **Aut** L_1 **définie par** le S-système $(L_1 \xrightarrow{\mu} \mathrm{Aut}\ L_1, id_{\mathrm{Aut}\ L_1})$ et le Gr-foncteur $(id_{L_1}, \theta) : P_0 \to \mathrm{Aut}\ L_1$ (1.3) où P_0 désigne toujours la Gr-catégorie stricte définie par le S-système $(L_1 \xrightarrow{d} L, \theta)$ Ce Gr-foncteur induit l'homomorphisme

$$\psi : \pi_0(P_0) = M \to \mathrm{Autext}\ L_1 = \pi_0(\mathrm{Aut}\ L_1).$$

Par conséquent

$$\psi^*\big(a(\mathrm{Aut}\ L_1)\big) = a(P_0).$$

Or nous avons

$$\psi^*\big(a(\mathrm{Aut}\ L_1)\big) = \mathrm{Obs}(M, L_1, \psi)$$
$$a(P_0) = \bar{\alpha}$$

ce qui donne

$$\mathrm{Obs}(M, L_1, \psi) = \bar{\alpha}. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hoang Xuan Sinh : *Thèse*, Paris 1975.

[2] MacLane, S. : *Homology*. Springer Verlag 1967.