ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N°2 (1978)

# Sur certaines relations entre les coefficients binômiaux

*LÊ VĂN THIÊM*
*Institut de Mathematiques, Hanoi*

*HỒ VĂN HÒA*
*Université de Hochiminh Ville*

Nous nous proposons d'évaluer la quantité (*)

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k}, \ n > 0.$$

Ici $n$, $k$ sont des nombres entiers positifs et les parenthèses représentent les coefficients binômiaux :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ \binom{n}{o} \equiv 1.$$

On a la relation élémentaire

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$S(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k-1} =$$

(*) Nous rencontrons de telles expression dans le calcul du mouvement des fluides visqueux en regime d'Oseen autour d'un cylindre elliptique.

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\binom{n+k}{k}=$$

$$=1+(-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{2n}+\binom{n}{1}\binom{n}{0}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right]\binom{n+k}{k}=$$

$$=1+(-1)^n\frac{(2n)!}{n!^2}+n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\binom{n+k}{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\binom{n+k}{k}.$$

Si l'on repète la même decomposition avec la dernière expressoin, on trouvera

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+2}{k+2}\binom{n+k+1}{k},$$

ce qui nous conduit à l'hypothèse

$$S(n)=S(n,m)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+m}{k+m}\binom{n+k-1+m}{k},\ n>0,\ m\geqslant 0. \quad (2)$$

C'est ce qu'on pourra vérifier par récursion. Supposons en effet la relation (2) vraie jusqu' à $m$, nous allons l'établir pour $m+1$ :

$$S(n,m)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+m}{k+m}\binom{n+k-1+m}{k+m}\binom{n+k-1+m}{k}=$$

$$=\binom{n+m}{m}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+m}{k+m}\binom{n+k+m}{k}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+m}{k+m}\binom{n+k-1+m}{k}$$

$$=\binom{n+m}{m}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+m}{k+m}\binom{n+k+m}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n+m}{k+1+m}\binom{n+k+m}{k}=$$

$$=\binom{n+m}{m}+(-1)^n\binom{n+m}{n+m}\binom{2n+m}{n}+\binom{n+m}{1+m}\binom{n+m}{0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n+m}{k+m}+\binom{n+m}{k+m+1}\right]\binom{n+k+m}{k-1}=$$

$$= \binom{n+m}{m} + (-1)^n \binom{2n+m}{n} + \binom{n+m}{1+m} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+m+1} \binom{n+k+1}{k+m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+m+1} \binom{n+k+m}{k} = S(n, m+1).$$

Donc $S(n, m)$ est indépendant de $m \geqslant 0$ et égal à $S(n)$ pour $n > 0$. Nous allons essayer avec les valeurs négatives de $m$. Pour cela, faisons la transformation

$$S(n) = \sum_{0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k} = \sum_{1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \binom{n-1}{k-1} +$$

$$+ \sum_{1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \binom{n-1}{k} + 1 + (-1)^n \binom{2n-1}{n} =$$

$$= \sum_{1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \binom{n-1}{k-1} - \sum_{2}^{n} (-1)^k \binom{n+k-2}{k-1} \binom{n-1}{k-1} +$$

$$+ 1 + (-1)^n \binom{2n-1}{n} =$$

$$= \sum_{2}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \left[ \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-2}{k-1} \right] +$$

$$+ 1 + (-1)^n \binom{2n-1}{n} - n - (-1)^n \binom{2n-2}{n-1} =$$

$$= \sum_{2}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \binom{n+k-2}{k} + 1 + (-1)^n \binom{2n-1}{n} - n - (-1)^n \binom{2n-2}{n-1} =$$

$$= \sum_{1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \binom{n+k-2}{k} + (-1)^n \left[ \binom{2n-1}{n} - \binom{2n-2}{n-1} \right] =$$

$$= \sum_{1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \binom{n+k-2}{k}.$$

Si nous répétons la transformation, nous trouverons

$$S(n) = \sum_{1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \binom{n+k-2}{k} = \sum_{2}^{n} (-1)^k \binom{n-2}{k-2} \binom{n+k-3}{k},$$

ce qui nous amène à l'hypothèse

$$S(n) = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n+k-p-1}{k}, \quad p \leqslant n-2, \quad n \geqslant 2, \tag{3}$$

que nous allons démontrer. Supposons ceci vrai pour $p$, nous montrerons que c'est aussi vrai pour $p+1$. En effet, nous avons :

$$S(n) = \sum_{p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n+k-p-1}{k} = \sum_{p+1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-p-1}{k} \left[ \binom{n-p-1}{k-p} + \right.$$

$$\left. + \binom{n-p-1}{k-p} \right] + (-1)^p \binom{n-1}{p} + (-1)^n \binom{2n-p-1}{n} =$$

$$= \sum_{p+1}^{n-1} (-1)^k \binom{n+k-p-1}{k} \binom{n-p-1}{k-p-1} - \sum_{p+2}^{n} (-1)^k \binom{n+k-p-2}{k-1} +$$

$$+ (-1)^p \binom{n-1}{p} + (-1)^n \binom{2n-p-1}{n} =$$

$$= \sum_{p+2}^{n-1} (-1)^k \binom{n-p-1}{k-p-1} \left[ \binom{n+k-p-1}{k} - \binom{n+k-p-2}{k-1} \right] +$$

$$+ (-1)^p \binom{n-1}{p} + (-1)^n \binom{2n-p-1}{n} + (-1)^{p+1} \binom{n}{p+1} - (-1)^n \binom{2n-p-2}{n-1} =$$

$$= \sum_{p+2}^{n-1} (-1)^k \binom{n-p-1}{k-p-1} \binom{n+k-p-2}{k} + (-1)^{p+1} \binom{n-1}{p+1} + (-1)^p \binom{2n-p-2}{n} =$$

$$= \sum_{p+1}^{n} (-1)^k \binom{n-p-1}{k-p-1} \binom{n+k-p-2}{k}, \qquad \textit{c.q.f.d.}$$

**Maintenant, faisons** $p = n-2$ dans la formule (3), nous aurons, pour $n \geqslant 2$,

$$S(n) = (-1)^{n-2} \binom{2}{0} \binom{n-1}{n-2} + (-1)^{n-1} \binom{2}{1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{2}{2} \binom{n+1}{n} = 0,$$

et l'on vérifie facilement que $S(1) = 0$.

Ainsi nous avons, pour tout $m > 0$, :

$$S(n, m) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+m}{k+m} \binom{n+k-1+m}{k} = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \\ 0 \text{ pour } n > 0. \end{cases}$$

Pour $m = 0$, on a $S(n, 0) = S(n) = 0$ pour $n > 0$.

Si dans l'expression (3), qui est égal à 0, nous remplacons $n - p$ par $n$ et $k - p$ par $k$, nous avons la nouvelle relation $(p \geqslant 0)$ :

$$T(n, p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k+p-1}{k+p} = 0 \text{ pour } n > 0.$$

En généralisant les résultats précédents, nous obtenons les théorèmes suivants :

*THEOREME I.* L'expression

$$P(\alpha, \beta, a; m) = \sum_{k=\alpha+m}^{\beta} (-1)^k \binom{-\alpha - m + \beta}{-\alpha - m + k} \binom{a - m + k}{a - m + \alpha}$$

où $\alpha, \beta, a, m$ sont des nombres entiers satisfaisant les inégalités

$$\alpha \leqslant \beta \quad , \quad 0 \leqslant m \leqslant \min(a + \alpha, \beta - \alpha),$$

est indépendante de $m$ et égale à

$$P(\alpha, \beta, a; m) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant a + \alpha < \beta - \alpha \\ (-1)^\beta \dfrac{(a+\alpha)!}{(a - \beta + 2\alpha)!\,(\beta - \alpha)!} & \text{si } \beta - \alpha \leqslant a + \alpha \end{cases}$$

La démonstration se fait par récurrence sur $m$ : on a

$$P(\alpha, \beta, a; m) = P(\alpha, \beta, a; m + 1)$$

c'est à dire que $P$ ne dépend pas de $m$. Puis l'on prend $m = a + \alpha$ dans le premier cas, et $m = \beta - \alpha$ dans le second cas pour calculer $P$.

*THEOREME II.* L'expression

$$Q(\alpha, \beta, a, b; m) = \sum_{k=\alpha}^{\beta} (-1)^k \binom{b + m + \beta}{b + m + k} \binom{a + m + k}{a + m + \alpha}$$

où $\alpha, \beta, a, b, m$ sont les nombres entiers satisfaisant les inégalités

$$\alpha \leqslant \beta \qquad m \geqslant \max(-a - \alpha, -b - \alpha)$$

est indépendante de $m$ et égale à

$$Q(\alpha, \beta, a, b; m) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant a - b < \beta - \alpha \\ (-1)^\beta \dfrac{(a-b)!}{(a - b + \alpha - \beta)!\,(\beta - \alpha)!} & \text{si } \beta - \alpha \leqslant a - b \\ (-1)^\alpha \dfrac{(b - a + \beta - \alpha - 1)!}{(b - a - 1)!(\beta - \alpha)!} & \text{si } a - b < 0 \end{cases}$$

On montre, comme plus haut, que $Q$ est indépendante de $m$. Puis l'on prend $m = -b - \alpha$ dans les deux premiers cas, qui nous ramènent au théorème I. Pour le dernier cas on prend $m = -a - \alpha$. Ici on doit utiliser la relation

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{p-k} = \frac{n-p}{n} \binom{n}{p} : n \geqslant p$$

que l'on démontre également par récurrence.

*Reçu le 20 Décembre 1977*