ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N° 2 (1978)

Connexions induites et classes caracteristiques(*)

par TỐNG VĂN ĐỨC
Université de Grenoble I

Soit (P, M, G) un fibré principal de groupe structural G. On rappelle les notions suivantes dues à F. KAMBER et Ph. TONDEUR[3] :

DEFINITION. *Une connexion partielle sur (P, M, G) est un sous-fibré vectoriel F de TP tel que :*

(i) $F_u \cap VP_u = 0$, $\forall u \in P$, *où VP désigne le fibré vertical de P.*

(ii) $F_{ua} = (R_a)_* F_u$, $\forall u \in P$ *et* $\forall a \in G$.

Il résulte de la condition (ii) que si l'on pose $L_x = p_* L_u$ où p est la projection de P sur M et où u est un élément de P tel que $p(u) = x$, on obtient un sous-fibré vectoriel L de TM.

Lorsque (P, M, G) est munie d'une connexion partielle, on peut définir le relèvement partiellement horizontal X^h d'un champ de vecteurs X de M.

DEFINITION. *Une connexion partielle F sur (P, M, G) est dite plate si* $\forall A, B \in F$, $[A, B] \in F$.

On remarque que si F est plate, le fibré vectoriel L est intégrable. En effet, soient X et Y deux sections de L et soient X^h et Y^h leurs relèvements partiellement horizontaux. Puisque $[X^h, Y^h] \in F$ et que $p_X[X^h, Y^h] = [X, Y]$, on a $[X, Y] \in L$.

DEFINITION.— *Une connexion sur un fibré principal (P, M, G) est dite adaptée à une connexion partielle F si quel que soit l'élément u de P, l'espace horizontal en u contient F_u.*

(*) Presented to the Vietnam Second Mathematical Congress, Hanoi, August 1977

DEFINITION. Une connexion ω sur (P, M, G) adaptée à une connexion partielle F est dite basique si $\theta_A\omega = 0$, $\forall A \in F$.

Cette condition est équivalente à $i_A\Omega = 0$, $\forall A \in F$ où Ω est la forme de courbure de ω.[3]

DEFINITION. Un fibré principal est dit feuilleté s'il est muni d'une connexion partielle plate.

PROPOSITION 1. Soit (f, h, k) un morphisme d'un fibré principal (P, M, G) dans un autre fibré principal (P', M', G') tel que h soit un difféomorphisme de M sur M' et soit F une connexion partielle sur P. Alors, il existe une connexion partielle F' sur P' telle que $f_*F_u = F'_{f(u)}$, $\forall u \in P$.

Preuve : Soit $v' \in P'$ et soit $u' \in f(P)$ tel que $p'(u') = p'(v')$, p' étant la projection de P' sur M'. On a $u' = f(u)$ avec $u \in P$. Il existe $a' \in G'$ tel que $v' = u'a' = f(u)a'$. On pose $F'_{v'} = R_{a'*} f_*(F_u)$. En utilisant le deuxième axiome d'une connexion partielle, on vérifie facilement que $F'_{v'}$ ne dépend ni de a', ni de u. Soit $b' \in G'$; on a $v'b' = f(u)a'b'$; d'où $F'_{v'b'} = (R_{a'b'})_* f_*(F_u) = R_{b'*}F'_{v'}$. D'autre part, soit $A' \in F_{u'} \cap VP'_{u'}$. Il existe $A \in F_u$ tel que $A' = R_{a'*}(f_*A)$. Par suite $0 = p'_*A' = p'_*R'_{a*}f_*(A) = p'_*f_*(A) = h_*(p_*A)$; puisque h est un difféomorphisme, on a $p_*A = 0$; A est donc vertical et égal au vecteur nul ; d'où $A' = 0$.

Si le rang de F est égal à celui de TM i.e. si F est une connexion, alors F' est une connexion sur P'. On a ainsi démontré le :

COROLLAIRE. Les hypothèses étant celles de la proposition, pour toute connexion sur P adaptée à F, son image par f est adaptée à la connexion partielle F'.

On considère maintenant un fibré principal (P, M, G) et un sous-groupe fermé H de G, d'algèble de Lie $\mathfrak{h}$, tel que l'espace homogène G/H soir réductif. Soit $\mathfrak{m}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie de G, tel que :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

et

$$Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$

Soit π la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Alors, on a :

$$Ad(h) \circ \pi = \pi \circ Ad(h), \forall h \in H. \tag{1}$$

On suppose de plus que $H = H_1 \times H_2$ et on note $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ les algèbres de Lie de H_1 et de H_2 ; ce qui donne une nouvelle décomposition de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{m}.$$

La projection canonique de G/H_2 sur G/H induit une submersion de $P/H_2 = P_1$ sur $P/H = V$ et (P_1, V, H_1) est un espace fibré principal de groupe structural H_1. A la projection de G sur G/H correspond un morphisme f_1 de (P, V, H) sur (P_1, V, H_1).

Soit ω une connexion sur (P, M, G). Alors $\omega' = \pi \circ \omega$ définit une connexion sur (P, V, H) comme il est facile de le constater en utilisant la relation (1). L'image de la connexion définie par ω' par le morphisme f_1 est une connexion sur (P_1, V, H_1).

On appellera connexion induite par ω sur (P_1, V, H_1) la connexion ainsi obtenue et on désignera par ω_1 sa forme de connexion.

Soient Ω, Ω', Ω_1 les formes de courbure de ω, ω' et ω_1. Soit $\varphi = \omega - \omega'$; φ est une forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{m}$. On en déduit :

$$d\omega = d\omega' + d\varphi$$

et

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

$$= d\omega' + d\varphi + \frac{1}{2}[\omega', \omega'] + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + [\omega', \varphi]$$

$$= \Omega' + d\varphi + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] + [\omega', \varphi]$$

d'où :

$$\Omega' = \pi \circ \Omega - \frac{1}{2}\pi \circ [\varphi, \varphi].$$

Comme $f_1^* \omega_1 = p_1 \circ \omega'$ où p_1 est la projection de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}_1$, on a :

$$f_1^* \Omega_1 = p_1 \circ \Omega' = p_1 \circ \pi \circ \Omega - \frac{1}{2} p_1 \circ \pi \circ [\varphi, \varphi].$$

En désignant par π_1 la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}_1$, on obtient la formule :

$$f_1^* \Omega_1 = \pi_1 \circ \Omega - \frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi]. \tag{2}$$

Un exemple de connexion induite est fourni par l'étude des sous-variétés d'une variété riemannienne.

Soit M une sous-variété de dimension m d'une variété riemanienne (N, g) de dimension $m+n$. On notera encore g la métrique induite sur M. Soient $(O(N), N, O(m+n))$ et $(O(M), M, O(m))$ les fibrés des repères orthonormés de N et de M. L'ensemble des repères comprenant m vecteurs tangents orthonormés de N constitue un fibré principal isomorphe à $(O(N)/O(n), N, O(m))$. De même, le fibré $(O(N)/O(m) \times O(n), N)$ s'interprète comme le fibré des m-plans tangents de la variété N. Soient $(e_1, \ldots, e_{m+n})$ la base canonique de R^{m+n}. On considèrera R^m et R^n comme des sous-espaces vectoriels de R^{m+n} engendrés respectivement par $(e_1, ..., e_m)$ et $(e_{m+1}, ..., e_{m+n})$. Soit $u = (X_1, ..., X_{m+n})$ un repère orthonormé de N d'origine x, alors $f_1(u) = (X_1, ..., X_m)$. Si l'on considère u comme un isomorphisme de $\boldsymbol{R}^{m+n}$ sur $T_X N$, $f_1(u)$ sera un isomorphisme de $\boldsymbol{R}^m$ sur le m-plan tangent à N engendré par $X_1, ..., X_m$. On a un morphisme $(\mathfrak{y}, t)$ de $\big(O(M), M, O(m)\big)$ dans $\big(O(N)/O(n), O(N)/O(m) \times O(n), O(m)\big)$ qui au repère v de M au point x fait correspondre le m-repère $\mathfrak{y}(u)$ de N situé au-dessus du m-plan tangent $t(x)$ engendré par $\mathfrak{y}(u)$. D'où les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & O(N)/O(n) \arrow[d] & O(M) \arrow[l, "\mathfrak{y}"'] \arrow[d] \\
O(N) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r] & O(N)/O(m) \times O(n) & M \arrow[l, "t"'] \\
N \arrow[r, "id"] & N &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
O(N) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & O(N)/O(n) \arrow[d, "r_1"'] & O(M) \arrow[l, "\mathfrak{y}"'] \arrow[d] \\
N \arrow[r, "id"] & N & M \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Soient Θ et θ les formes canoniques de $O(N)$ et $O(M)$. Sur $O(N)/O(n)$, il existe une forme canonique Θ_1 définie par :

$$\Theta_1(A) = u^{-1}\big(\beta(r_{1*}A)\big), \quad \forall A \in T_u\big(O(N)/O(n)\big)$$

où β désigne la projection orthogonale de $T_{r_{1(u)}} N$ sur le m-plan tangent défini par u. Il est évident que :

$$(3) \qquad \mathfrak{y}^*\Theta_1 = \theta \quad \text{et} \quad f_1^*\Theta = \Theta_{\boldsymbol{R}^m}$$

où $\Theta_{\boldsymbol{R}^m}$ est la $\boldsymbol{R}^m$-composante de la forme canonique

Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{o}(m+n)$ et soit $\mathfrak{m}$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{o}(m) + \mathfrak{o}(n)$ par rapport à B. On a :

$$\mathfrak{o}(m+n) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{m}$$

et

$$Ad\big(O(m) \times O(n)\big)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$

Par suite, $O(m) \times O(n)$ est réductif dans $O(m+n)$ et la connexion riemannienne ω sur $O(N)$ induit une connexion ω_1 sur $\big(O(M)/O(n)$, $O(M)/O(m) \times O(n), O(m)\big)$. La connexion ω_1 permet de retrouver la connexion riemannienne de (M, g). Soit $\tilde{\omega}$ l'image réciproque de ω par le morphisme η qui est un isomorphisme sur les fibrés.

PROPOSITION 2. $\tilde{\omega}$ est la connexion riemannienne de (M, g).

Preuve. Il suffit de vérifier que $\tilde{\omega}$ est sans torsion. On a:

$$\tilde{\omega} = \eta^* \omega_1 \quad \text{et} \quad f_1^* \omega_1 = \omega_{\eta(m)} = \pi_1 \circ \omega. \tag{4}$$

Puisque ω est sans torsion

$$d\Theta = - \omega \wedge \Theta . \tag{5}$$

Comme f_1 est surjectif, les formules (3), (4) et (5) impliquent

$$d\theta = - \tilde{\omega} \wedge \theta .$$

On revient au cas général d'un fibré principal (P, M, G) et d'un sous-groupe fermé $H = H_1 \times H_2$ de G tel que G/H soit réductif. On suppose en outre que (P, M, G) est feuilleté par une connexion partielle plate F. D'après la proposition 1, le fibré (P_1, V, H_1) est feuilleté par F_1, image de F par f_1. De plus si ω est une connexion adaptée à F, la connexion induite ω_1 est adaptée à ω_1.

Soit $f \in I^k(H_1)$, l'espace vectoriel des formes k-linéaires symétriques sur $\mathfrak{h}_1$, invariantes par $Ad(H_1)$. Puisque f_1 est surjectif, on voit, d'après la formule (2) que $f(\Omega_1^k)$ est parfaitement déterminée par:

$$f\Big((\pi_1 \circ \Omega - \frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^k\Big) = \sum_{i+j=k} f\Big((\pi_1 \circ \Omega)^i \wedge (- \frac{1}{2} \pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^j\Big).$$

Il existe une valeur j_o de j tel que $(\pi_1 \circ [\varphi, \varphi])^j \equiv 0$ pour $j > j_o$. On remarque que $j_o \leqslant \left[\frac{1}{2} \dim G/H\right]$. Si la connexion ω est basique, $(\Omega)^i \equiv 0$ pour $i > [q/2]$ et par suite $f(\Omega_1^k) \equiv 0$ pour $k > [q/2] + j_o$, où q est la codimension de F. On a donc établi le

THEOREME. Si le fibré feuilleté (P, M, G) est muni d'une connexion basique, les classes de Pontrjagin du fibré feuilleté (P_1, V, H_1) sont nulles en dimension supérieure à $[q/2] + j_o$.

REFERENCES

[1]— G. Giraud, *Connexions subordonnées et classes caractéristiques, Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, *tome XX, 8 (1975) 917—925.*

[2]— A. Goetz, *On induced connections, Fundamenta Math., LV (1964), 149—174.*

[3]— F. Kamper et Ph. Tondeur, *Folioted Bundles and Characteristic Classes, Lectures notes 493 (1975)*, Springer, Berlin.

[4]— S.Kobayashi et K. Nomizu, *Fondations of Differential Geometry, Vol. I (1963), Vol. II (1969), Interscience*, New-York.

Reçu Juillet 1977