ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 3, N°2 (1978)

TL 121

Varietes riemanniennes admettant une fonction u telle que $\nabla^2 u + fug = 0$(*)

par ĐẶNG - VŨ - HUYẾN
Univesité de Paris VI

Résumé. On montre qu'une variété riemannienne M complète, simplement connexe, de dimension $n \geqslant 2$, munie d'une métrique g, admettant une fonction réelle u solution du système $\nabla^2 u + fug = 0$, f étant une fonction réelle non nulle sur M, est homéomorphe à une sphère S^n ou à un espace euclidien R^n.

Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension $n \geqslant 2$, munie d'une métrique g définie positive. Nous supposons que M admet une fonction réelle u satisfaisant le système:

(1) $$\nabla^2 u + fug = 0$$

où f est une fonction réelle non nulle sur M et $\nabla^2 u$ désigne le champ de tenseurs covariants d'ordre 2 défini par

$$\nabla^2 u(X, Y) = XYu + (\nabla_X Y)u$$

pour tous les champs de vecteurs X, Y de M.

Nous démontrons le

THEOREME. M est homéomorphe à la sphère S^n ou à l'espace euclidien R^n.

Notons que lorsque f est une constante positive Obata [1] a montré que M est isométrique à la sphère $S^n(f)$ de rayon $f^{-1/2}$.

DEMONSTRATION. La démonstration se fait en plusieurs étapes:

(*) Presented to the Vietnam Second Mathematical Congress, Hanoi, August 1977

1°) Soient p un point de M, γ une géodésique passant par p et paramétrée ar son arc à partir de p : $\gamma(0) = p$. Adoptons sur M un système de coordonnées e Fermi localement euclidien le long de γ de la façon suivante :

Soit m un point de M non situé sur γ. Menons de m une géodésique qui oupe γ à angle droit en un point $\gamma(s)$. L'ensemble des géodésiques perpendicu-aires à γ en $\gamma(s)$ est une variété $M_{n-1}(s)$ à $n-1$ dimensions et on a évidemment $\imath \in M_{n-1}(s)$. Soit $\dot\gamma$ le champ de vecteurs tangents à γ et $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, $n-1$ hamps de vecteurs parallèles le long de γ tels que $e_1(s)$, $e_2(s), \ldots, e_{n-1}(s)$ et $'(s)$ forment une base orthonormale de l'espace tangent à M en $\gamma(s)$. Introdui-ons sur $M_{n-1}(s)$ des coordonnées de Riemann en choisissant comme axes les géo-ésiques tangentes aux vecteurs $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_{n-1}(s)$. Les coordonnées de Fermi e M sont $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ où $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ sont des coordonnées normales de m ans $M_{n-1}(s)$ et $x^n = s$. Ces coordonnées jouissent des propriétés suivantes :

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0, \quad \Gamma^k_{ij} = 0$$

long de γ.

Par rapport à ces coordonnées de Fermi le système (1) s'écrit alors le ng de γ :

$$u'' + f(s)u = 0 \tag{2}$$

ı le signe prime désigne la dérivation par rapport à s.

2°) Posons $v = u'$.

LEMME 1. *Les champs de vecteurs ve_b, $b = 1, 2, \ldots, n-1$, sont des amps de Jacobi normaux à γ.*

En effet, soit J un champ de Jacobi normal à γ avec

$$\nabla^2_Y J + R(J, Y)Y = 0 \tag{3}$$

R est le tenseur de courbure de M. Par rapport au système de coordonnées de rmi défini dans 1°) le système (3) s'écrit :

$$J^{c''} + \sum_b R_{cnbn} J^b = 0, \quad b, c = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

(pas de sommation sur n)

Dérivons maintenant (2) par rapport à s nous obtenons :

$$v'' + (fu)' = 0 \tag{5}$$

Soit maintenant A le champ de vecteurs associé à la 1-forme $\nabla u = du$ ini par $\nabla u(Y) = g(A, Y)$. Alors l'équation (1) s'écrit :

$$\nabla_Z A = -fuZ$$

D'où :

$$\nabla_Y \nabla_Z A = - \nabla_Y(fu)Z - fu \nabla_Y Z$$

On en déduit :

$$\nabla_Y \nabla_Z A - \nabla_Z \nabla_Y A - \nabla_{[Y, Z]} A =$$
$$= \nabla_Z(fu) Y - \nabla_Y(fu) Z - fu(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + fu [Y, Z]$$

On a donc :

$$R(Y, Z)A = \nabla_Z(fu) Y - \nabla_Y(fu)Z$$

Le long de γ cette équation s'écrit :

$$vR_{bnbn} = (fu)', \qquad b = 1, 2, ..., n-1$$

(pas de sommation sur b et n)

(5) s'écrit donc :

(6) $$v'' + R_{bnbn}v = 0.$$

Comparant (4) et (6) on voit que les champs de vecteurs ve_b sont des champs de Jacobi.

3°) L'équation différentielle (2) admet deux solutions linéairement indépendantes [2] :

$$u_1 = r_1 \sin \theta_1, \qquad u_2 = r_2 \cos \theta_2$$
$$v_1 = u_1' = r_1 \cos \theta_1, \qquad v_2 = u_2' = -r_2 \sin \theta_2$$

où $r_1, r_2 > 0$ et θ_1, θ_2 vérifient les systèmes :

$$r_1' = (1-f)r_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1, \qquad \theta_1' = \cos^2 \theta_1 + f\sin^2 \theta_1$$
$$r_2' = -(1-f)r_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2, \qquad \theta_2' = \sin^2 \theta_2 + f\cos^2 \theta_2$$

D'après le lemme 1, les $2n-2$ champs de vecteurs

$$U_b = v_1 e_b, \qquad V_b = v_2 e_b, \qquad b = 1, 2, ..., n-1$$

sont des champs de Jacobi le long de γ. Ils forment donc avec $\dot\gamma$ et $s\dot\gamma$ une base de l'espace vectoriel des champs de Jacobi le long de γ. En particulier les U_b et V_b forment une base de l'espace vectoriel des champs de Jacobi normaux à γ. Un champ de Jacobi normal J a donc la forme suivante :

$$J = A_1 v_1 + A_2 v_2$$

où A_1 et A_2 sont des champs de vecteurs constants, normaux à γ.

Notons que si v_1 (resp. v_2) s'annule en un point p de γ, alors $v_2 \neq 0$ (resp. $v_1 \neq 0$) en p, d'après le théorème de séparation de Sturm. Dans ce cas un champ de Jacobi qui s'annule en p a nécessairement la forme suivante :

(7) $$J = A_1 v_1 \text{ (resp. } J = A_2 v_2).$$

4°) Supposons que v s'annule au plus une fois dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Dans ce cas un champ de Jacobi le long de γ ne s'annule au plus qu'une fois sur γ. Un point p de γ n'a donc pas de point conjugué sur γ. La variété M est donc homéomorphe à l'espace euclidien R^n.

5°) Supposons que v s'annule plus d'une fois dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. Soient s_i, s_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$ deux zéros consécutifs de v et soit, pour un certain m, $s_{m+1} - s_m = s_o$ le plus petit des intervalles $s_{i+1} - s_i$. Posons $p = \gamma(s_m)$ et mesurons l'arc s à partir de p. Dans la suite nous supposons toujours que l'arc s sera mesuré de cette façon. Alors, d'après le lemme 1, $\gamma(s_o)$ est le premier point conjugué de p.

LEMME 2. Les géodésiques issues de p se recoupent en un point p' à une distance s_o de p sur chaque géodésique.

Soient γ_1, γ_2 deux géodésiques issues de p. Les équations (7) montrent que les points conjugués sur chaque géodésique sont à la même distance s_o de p. Les deux géodésiques sont jointes par une famille de géodésiques γ_t tangentes en p aux vecteurs (*)

$$\cos t \, \dot{\gamma}_1(0) + \sin t \, \dot{\gamma}_2(0).$$

Les points $\gamma_t(s_o)$ décrivent une courbe c dont le vecteur tangent est égal, en $\gamma_t(s_o)$, à la valeur du champ de Jacobi attaché à la famille γ_t. Il est donc nul en tout point de c. Cette courbe est donc réduite à un point p' et $\gamma_1(s_o) = \gamma_2(s_o) = p'$.

REMARQUES. 1. On démontre de la même façon que toutes les géodésiques issues de p' se recoupent en p.

2. *Si* $s_o \to 0$, M se réduirait à un point, ce cas est donc exclu.

LEMME 3. p' est le seul point de rencontre des géodésiques issues de p.

En effet, soit γ une géodésique issue de p et soit $m = \gamma(s)$ avec $s < s_o$. Alors le champ de vecteurs A associé à la 1-forme ∇u a pour valeur en m, $A(s) = v(s) \, \dot{\gamma}(s)$. Comme $v(s) \neq 0$, si $s < s_o$, $\dot{\gamma}(s)$ est uniquement déterminé par $A(s)$. Donc γ est la seule géodésique joignant p à m.

De même, on démontre que p est le seul point de rencontre des géodésiques issues de p'.

6°) Posons maintenant :

$$B(p, s_o) = \{ m \in M \mid d(p, m) < s_o \}$$
$$B(O_p, s_o) = \{ X \in T_p(M) \mid \|X\| < s_o \}$$

où $d(p, m)$ est la distance de p à m et $T_p(M)$ est l'espace vectoriel tangent de

---

(*) Nous suivons un raisonnement de Berger, Gauduchon et Mazet [3] en l'adaptant à notre cas.

M en p. D'après le lemme 3 la restriction de $\exp_p$ à $B(O_p, s_o)$, que nous désignerons encore par $\exp_p$, est une injection donc c'est une bijection. En fait, comme $B(p, s_o)$ ne contient pas de point conjugué de p, c'est un difféomorphisme de $B(O_p, s_o)$ sur $B(p, s_o)$.

Soit $\bar{p}$ un point de la sphère S^n de rayon 1. Posons :

$$B(\bar{p}, \pi) = \{\bar{m} \in S^n \mid d(\bar{p}, \bar{m}) < \pi\}$$
$$B(O_{\bar{p}}, \pi) = \{\bar{X} \in T_{\bar{p}}(S^n) \mid \|\bar{X}\| < \pi\}$$

Soit i un isomorphisme quelconque entre les vecteurs unitaires de $T_p(M)$ et les vecteurs unitaires de $T_{\bar{p}}(S^n)$. Nous définissons un difféomorphisme D de $B(O_p, s_o)$ sur $B(O_{\bar{p}}, \pi)$ de la façon suivante :

Pour tout $X \in B(O_p, s_o)$ posons $X = xe$ où e est un vecteur unitaire et $x = \|X\|$. L'application D fait correspondre à X le vecteur $\bar{X} = \bar{x}\bar{e}$ avec $\bar{e} = i(e)$ et $\bar{x} = \pi x / s_o$. Le difféomorphisme D induit alors le difféomorphisme $h : B(p, s_o) \longrightarrow B(\bar{p}, \pi)$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
B(O_p, s_o) \arrow[r, "D"] & B(O_p, \pi) \arrow[d, "exp_{\bar{p}}"] \\
B(p, s_o) \arrow[u, "(exp_p)^{-1}"] \arrow[r, "h"] & B(\bar{p}, \pi)
\end{tikzcd}$$

Il reste à prolonger h par continuité en un homéomorphisme H de $M = B(p, s_o) \cup \{p'\}$ sur S^n en posant :

$$H(m) = h(m) \quad \text{si} \quad m \in B(p, s_o)$$
$$H(p') = \bar{p}'$$

où $\bar{p}'$ est le point diamétralement opposé à $\bar{p}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. OBATA, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), pp. 333—340.

[2] E. A. CODDINGTON et N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New-York, 1955.

[3] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

Reçu Juillet 1977