ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 3, № 1 (1978)

О ДВУХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

PHAN VĂN CHƯƠNG
Институт Математики, Ханой.

0. Пусть $Q = \{(x_1 x_2) \in \mathcal{R}^2, 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1,2\}$ и T^2 двумерный тор, полученный от Q склеиванием его противоположных сторон.

Рассмотрим следующие две задачи:

Задача I

Найти $$\operatorname{Inf} \int_{T^2} |w(\mathrm{x})| \, \mathrm{dx} \tag{0.1}$$

при условиях $$\left.\begin{array}{l} w(.) \in [W_1^1(T^2)]^2 \\ \operatorname{div} w = \mathrm{f} \end{array}\right\} \tag{0.2}$$

где $\mathrm{f(x)}$ заданная функция из $\mathrm{L}_1(T^2)$.

Задача II

Найти $$\operatorname{Inf} \int_{T^2} |\nabla \mathrm{u} - v^{(0)}| \, \mathrm{dx} \tag{0.3}$$

при условиях $$\mathrm{u}(.) \in \mathrm{W}_1^1(T^2) \tag{0.4}$$

где $v^{(0)}(.)$ заданная вектор-функция из $[W_1^1(T^2)]^2 \subset [L_2(Q)]^2$ Цель этой заметки — выписать двойственные задачи, значения которых совпадают со значениями исходных задач, и вычислить эти значения на некоторых примерах.

О двойственности вариационных задач имеется огромная литература, из которой отметим [1], в которой дана весьма общая схема решения вариационных задач путем перехода к ним двойственным, и [2] в которой рассматривались вариационные задачи с ограничениями, содержащими уравнения в частных производных.

Задачи I, II не входят в рамки упомянутых работ. Здесь, подобно [3], будем использовать следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть — E — нормированное пространство, L — его линейное подпространство, $v^{(0)} \in E$. Тогда*

$$\operatorname*{Inf}_{v\in L} \| v - v_{(0)} \| = \max_{a \in L^{\perp}} < a, v^{(0)} >$$

где $\| \cdot \|$ *норма в* E, $\langle a,v\rangle$ *— значение функционала* $a \in E'$ *в* v, $L^{\perp}$ *подпространство элементов из* E', *аналулирующихся на* L.

Лемма 2. *Пусть* $c = (c_1, c_2) \in [L_\infty(Q)]^2$ *такой, что*

$$\iint\limits_Q \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0$$

для всех функций $u \in C^1(Q)$, *обращающихся в нуль на границе* Q. *Тогда существует* $\varphi \in W^1_\infty(Q)$ *такой, что* $\nabla\varphi = (c_2, -c_1)$.

Наметим только доказательство леммы 2.

Из предположения леммы следует, что существует ([4]) последовательность $\left\{ c^{(n)} = c_1^{(n)}\ c_2^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \left[W_2^1(Q) \right]^2$ такая, что $\operatorname{div} c^{(n)} = 0$ и $c^{(n)} \to c$ в $[L_2(Q)]^2$.

Существует тогда $\varphi^{(n)} \in W_2^2(Q)$, что $\nabla\varphi^{(n)} = \left(c_2^n,\ c_1^n \right)$. Так как $\| \nabla\varphi \|_{[L_2(Q)]^2} \leqslant C$, можем считать, что $\| \varphi^{(n)} \|_{L_\infty} \leqslant C_1$, отсюда фоследовательность $\left\{ \varphi^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ компактна в L_2.

Можем, поэтому, считать, что $\varphi^{(n)} \to \varphi$ в $L_2(Q)$ с некоторым $\varphi \in L_2(Q)$, и при этом, $\nabla\varphi = (c_2, -c_1)$. Очевидно, что $\varphi \in W^1_\infty(Q)$.

2. Задача 1. Заменяя тор T^2 на квадрат Q приведем (0. 1) — (0.2) к виду

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 | w(x_1, x_2) |\, dx_1 dx_2 \to \operatorname{Inf} \tag{1.1}$$

при условиях $w(.) \in [W_1^1(Q)]^2$

$$w(x_1, 0) = w(x_1, 1)\ (\forall x_1 \in [0,1]),\ w(0, x_2) = w(1, x_2)\ (\forall x_2 \in [0\ 1]) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} w = f \tag{1.3}$$

Подмножество элементов из $[W_1^1(Q)]^2$, удовлетворяющих условиям (1.2) — (1.3) обозначим через M. Если $M = \phi$, то задача I тривиальна. Пусть $M \neq \phi$ и $w^{(0)} = (w_1^{(0)},\ w_2^{(0)}) \in M$. Положим $L = M - w^{(0)}$. Очевидно, что $L = \{ w \in [W_1^1(Q)]^2 :$ $w(.)$ удовлетворяет (1.2), $\operatorname{div} w = 0 \}$ и является линейным подпространством в $[L_1(Q)]^2$

Задача (1.1) — (1.3) примет вид:

$$\| w - w^{(0)} \|_{[L_1(Q)]^2} \to \operatorname{Inf} \tag{1.4}$$

при условиях $w \in L$ (1.5)

Применим лемму I с $E = [L_1(Q)]^2$ Опищем $L^{\perp}$. Пусть $a = (a_1, a_2) \in L^{\perp}$ Тогда $a \in [L^2_\infty(Q)]^2$ и

$$\int_0^1\int_0^1 (a_1 w_1 + a_2 w_2)\,dx_1 dx_2 = 0\;(\forall w = (w_1, w_2) \in L) \tag{1.6}$$

Так как для $w = (w_1, w_2) \in L$, $\operatorname{div} w = 0$, существует $u \in W_1^2(Q)$ такой, что $\nabla u = (w_2 - w_1)$, и (1.6) перепишется

$$\int_0^1\int_0^1 \left(-a_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_1\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0 \tag{1.7}$$

$$\forall u \in W_1^2(Q)\;(\nabla u)(x_1, 0) = (\nabla u)(x_1, 1),\;(\nabla u)(0, x_2) = (\nabla u)(1, x_2)$$

Отсюда, согласно лемме 2, существует $\varphi \in W_\infty^1(Q)$, такая, что $\nabla\varphi = (a_1, a_2)$, и имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0 \tag{1.8}$$

для всех u таких, что

$$(\nabla u)(x_1, 0) = (\nabla u)(x_1, 1),\;(\nabla u)(0, x_2) = (\nabla u)(1, x_2) \tag{1.9}$$

Покажем, что отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1, 0) = \varphi(x_1, 1) \quad (\forall x_1 \in [0, 1]) \\ &\varphi(0, x_2) = \varphi(1, x_2) \quad (\forall x_2 \in [0, 1]) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Докажем это от противного, предполагая, скажем, что $\varphi(x_1, 0) - \varphi(x_1, 1) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ для всех x_1 на некотором отрезке $\Delta \subset (0, 1)$. Возьмем гладкую функцию $\alpha(s)$, определенную на [0 1] такую, что $\alpha(s) \geqslant 0$, $\operatorname{Supp}\alpha \subset \Delta$, $\int_\Delta \alpha(s)\,ds = 1$, и положим

$u_0(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \alpha(s)ds$. Очевидно, что u_0 удовлетворяет (1.9). Однако, подставив ее на место u в левой части (1.8) и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_\Delta \alpha(s)\,[\varphi(1, s) - \varphi(0, s)]\,ds \geqslant \varepsilon_0 > 0$$

что противоречит (1.8), и (1.10) тем самым доказано, Значит,

$$L^\perp = \left\{ a = (a_1, a_2) \in [L_\infty(Q)]^2 : \exists\varphi \in W_\infty^1(Q) \quad \begin{matrix}\varphi: \text{удовлетворяет} \\ (1.10) \text{ и } \nabla\varphi = (a_1, a_2)\end{matrix} \right\}$$

Для $a \in L^\perp$, учитывая условия (1.2), (1.3) для $w^{(0)}$, имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(a_1 w_1^{(o)} + a_2^{(o)} w_2^{(o)}\right) dx_1 dx_2 = -\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot w_1^{(o)} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot w_2^{(o)}\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \varphi\left(\frac{\partial w_1^{(o)}}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2^{(o)}}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_0^1\int_0^1 f\cdot\varphi\, dx_1\, dx_2$$

Итак, сопряженная к (1.1) — (1.2) задача, согласно лемме 1, имеет вид

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\ \varphi\ (x_1, x_2)\ dx_1 dx_2 \to \max \tag{1.11}$$

при условиях :

$$\begin{gathered}\varphi(\cdot) \in W^1_\infty\ (Q),\ \|\nabla\varphi\|_{[L_\infty(\overline{\overline{Q}})]^1_2}\\ \varphi(x_1,0) = \varphi(x_1,1)\ (\forall x_1 \in [0,1])\\ \varphi(0,x_2) = \varphi(1,x_2)\ (\forall x_2 \in [0,1])\end{gathered} \tag{1.12}$$

или, рассматривая φ как функцию на торе T^2, можем ее переформулировать так :

Теорема 1. *Сопряженная к (0.1) —(0.2) задача имеет вид*

$$\int_{T^2} f\cdot\varphi\, dx \to max \tag{1.13}$$

при условиях

$$\varphi \in W^1_\infty\ (T^2),\ \|\nabla\varphi\|_{[L_\infty(T^2)]^2} = 1 \tag{1.14}$$

При этом, значение задачи (0.1) —(0.2) и значение задачи (1.13) —(1.14) совпадают

2. **Задача II**. Рассматривая квадрат Q вместо тора T^2, перепишем задачу II в виде

$$\int_0^1\int_0^1 |\nabla u^0 - v^0|\ dx_1 dx_2 \to \mathrm{Inf} \tag{2.1}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &u \in W^1_1(Q)\\ &u(x_1, 0) = u(x_1,1)\ (\forall x_1 \in [0, 1])\\ &u(0, x_2) = u(1, x_2)\ (\forall x_2 \in [0, 1])\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)})$ с компонентами $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, удовлетворяющими условию (2.2).

Обозначим через N линейное подпространство всех элементов $v \in [L_1(Q)]^2$ вида $v = \nabla u$, где $u \in W_1^{(1)}(Q)$ удовлетворяют условию (2.2). Задача (2. 1) — (2.2) примет вид

$$\|v - v^{(0)}\|_{[L_1(Q)]^2} \to \inf$$
$$v \in N$$

Применим лемму 1 с $E = [L_1(Q)]^2$, $L = N$.

Опишем $N^{\perp}$. Пусть $b = (b_1, b_2) \in N^{\perp}$. Имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0 \tag{2.3}$$

для всех u, удовлетворяющих (2.2). Заметим, что в отличии от (1.8) в задаче 1, здесь соотношение (2.3) верно только для функций u, которые сами удовлетворяют (2.2) (ср. с (1.9)). Из (2.3), согласно лемме 2, существует $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_\infty(Q)$ такая, что $\nabla\psi = (-b_2, b_1)$. Стало быть, имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = 0 \tag{2.4}$$

для всех u, удовлетворяющих (2.2). Покажем, что отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\psi(x_1, 0) - \psi(x_1, 1) = \text{const} \\ &\psi(0, x_2) - \psi(1, x_2) = \text{const} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пусть это не так, тогда существуют непересекающиеся отрезки Δ_1, Δ_2 в $(0,1)$, такие, что

$$\psi(t, 1) - \psi(t, 0) > c + \frac{\varepsilon}{2} > c - \frac{\varepsilon}{2} > \psi(\tau, 1) - \psi(\tau, 0) \ (\forall t \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2)$$

где $\varepsilon > 0$, $c \in R^1$. Возьмем функцию $\beta(s)$ такую, что $\operatorname{Supp}\beta \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\beta(s) \geqslant 0$ на Δ_1, $\beta(s) \geqslant 0$ на Δ_2 и $\int_{\Delta_1} \beta(s)\,ds = -\int_{\Delta_2} \beta(s)\,ds = 1$ и положим $u_0(x_1, x_2) =$

$$= \int_0^{x_1} \beta(s)\,ds.$$

Очевидно, что $u_0(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию (2.2), тем не менее, подставив ее в левую часть (2.4) и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_{\Delta_1} \beta(s)[\psi(s,1) - \psi(s,0)]\,ds + \int_{\Delta_2} \beta(s)[\psi(s,1) - \psi(s,0)]\,ds \geqslant \varepsilon > 0$$

что противоречит (2.4), и (2.5) тем самым доказана.

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество всех функций $\psi(\cdot) \in W^1_\infty(Q)$, удовлетворяющих условию (2.5) и $\mathcal{Y}$ — множество всех функций $\mu(\cdot) \in W^1_\infty(Q)$, удовлетворяющих условию

$$\left.\begin{aligned} \mu(x_1, 0) &= \mu(x_1, 1) \qquad (\forall x_1 \in [0, 1]) \\ \mu(0, x_2) &= \mu(1, x_2) \qquad (\forall x_2 \in [0, 1]) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Если $\psi(\cdot) \in \mathcal{X}$, положим

$$\mu(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) - [\psi(1, 0) - \psi(0, 0)]\, x_1 - [\psi(0, 1) - \psi(0, 0)]\, x_2 \tag{2.7}$$

Очевидно, что $\mu \in \mathcal{Y}$. Воспользуясь неравенством Коши — Буняковского, легко видеть, что вектор $c = (\psi(1, 0) - \psi(0, 0),\ \psi(0, 1) - \psi(0, 0))$ принадлежит единичному шару $B \subset R^2$ и при этом очевидно, может быть любым вектором из B. Из (2.7) видно, что $\nabla\psi = \nabla\mu + c$.

Сопряженная к задаче (1.1) — (1.2), согласно лемме 1 имеет вид

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\, v_1^{(0)} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\, v_2^{(0)}\right) dx_1\, dx_2 \to \max$$

$$\psi(\cdot) \in \mathcal{X},\ \|\nabla\psi\|_{[L_\infty(Q)]^2} = 1$$

или, при замене функций $\psi(\cdot) \in \mathcal{X}$ на функции $\mu(\cdot) \in \mathcal{Y}$ и интегрировании по частям, примет вид

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial x_2}\right) \mu(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_0^1\int_0^1 (c_2 v_1^{(0)} - c_1 v_2^{(0)})\, dx_1\, dx_2 \to \max$$

$$(\mu, c) \in W^1_\infty(Q) \times B,\ \|\nabla\mu - c\|_{[L_\infty(Q)]^2} = 1 .$$

Рассматривая тор T^2 вместо квадрата Q, видим, что $\mathcal{Y} = W^1_\infty(T^2)$ и эту задачу можно переформулировать так:

Теорема 2. *Сопряженная к (0.3) —(0,4) задачи имеет вид:*

$$\int_{T^2} \operatorname{div}(v^0)^* \cdot \mu\, dx + \int_{T^2} (c \mid (v^0)^*)\, dx \to \max \tag{2.7}$$

$$(\mu, c) \in W^1_\infty(T^2) \times B,\ \|\nabla\mu - c\|_{[L_\infty(Q)]^2} = 1 \tag{2.8}$$

где $(v^0)^* = (v_2^{(0)}, -v_1^{(0)})$, $(\cdot \mid \cdot)$ *— скалярное произведение в* $\mathbb{R}^2$.

При этом значение задачи (2.7) —(2.8) и значение задачи (0.3) —(0.4) совпадают.

3. Задачи (1.13) —(1.14) и (2.7) —(2.8) вообще говоря, решаются намного легче, чем их исходные, поскольку здесь имеем дело с максимизацией линейных непрерывных функционалов на компакте. Как показывают следующие примеры, во многих случаях удается подбирать функции, реализующие максимум и вычислить значения задач. Рассмотрим сначала одномерную задачу:

$$I(\varphi) = \int_0^1 g(x)\varphi(x)\,dx \to \max \tag{3.1}$$

при условиях

$$\varphi(.) \in W^1_\infty([0,1]),\ \|\varphi'\|_{L_\infty[0,1]} = 1 \tag{3.2}$$
$$\varphi(0) = \varphi(1)$$

где $g(x)$ кусочно-непрерывная функция, меняющая знак только в конечном числе точек $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ на $(0,1)$ и $\int_0^1 g(x)\,dx = 0$. Для определенности будем считать, что $g(x) > 0$ на $(\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1})$ $\left(i = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ (считая, что $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{m+1} = 1$) и $g(x) < 0$ в остальной части отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех непрерывных кусочно линейных функций $\lambda(x)$, графиком каждой из которых на интервале $(\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1})\left(i = 0, 1, \dots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ служат две верхние стороны прямоугольника с противоположными вершинами в точках (α_{2i}, t_{2i+1}) и $(\alpha_{2i+1}, t_{2i+1})$ (считая, что $t_0 = 0$, $t_{m+1} = 0$) и с угловыми коэффициентами сторон, равными ± 1,

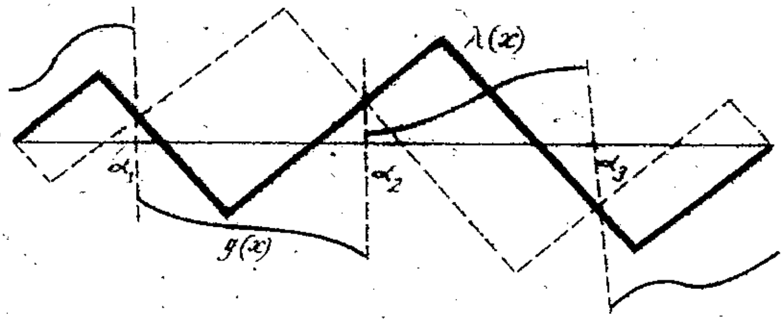

Рис 1. Вид график функций $\lambda \in \mathcal{L}$

(рис. 1) а на интервале $(\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+2})$ $\left(i = 0, 1, \dots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ — нижние стороны подобного прямоугольника. Очевидно, что функции из $\mathcal{L}$ также удовлетворяют условиам(3.2). Покажем, что в задаче (3.1)—(3.2) условие (3.2) можно заменить условием $\varphi \in \mathcal{L}$. Действительно, пусть φ удовлетворяет (3.2). Так как $\int_0^1 g(x)\,ds = 0$, можем считать, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Из условия $|\varphi'_{(x)}| \leq 1$ следует, что существует $\lambda \in \mathcal{L}$ такая, что $\lambda(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i)$ $(i = 0, 1, \dots, m+1)$ и $\varphi(x)\,g(x) \leq \lambda(x)\,g(x)$ $(\forall x \in [0,1])$ стало быть, $I(\varphi) \leq I(\lambda)$.

Легко видеть, что функции λ из $\mathcal{L}$ вполне определяются своими значениями в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, и набор чисел $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ служит значениями некоторой функции $\lambda \in \mathcal{L}$ в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ тогда и только тогда, когда

$$l \in U = \{ l \in R^m : |l_1| \leq \alpha_1, \ |l_{i+1} - l_i| \leq \alpha_{i+1} - \alpha_i, \ |l_m| \leq 1 - \alpha_m \}$$

Если обозначим через $\lambda_l = \lambda_{l_1, \dots, l_m}$ функцию из $\mathcal{L}$, принимающую значения $l_1, l_2, \dots, l_m$ соответственно в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, то задача (3.1) — (3.2) сводится к задаче

$$\mathcal{I}(l) \to \max$$

$$l \in U$$

где

$$\mathcal{I}(l) = I(\lambda_l)$$

т.е. к задаче об отыскании максимума функции от m числовых переменных на компакте $U \in R^m$. Так, если $g(x)$ такая, что $g\left(\frac{1}{2} - x\right)$ нечетная, $g(x) \geq 0$ на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, то как легко видеть, что $m = 1$ и $l_1 = 0$, а функция $\lambda_0(x)$, реализующая максимум задачу (3.1) — (3.2) имеет вид, показанный на рисунке 2. При этом, значение d этой задачи

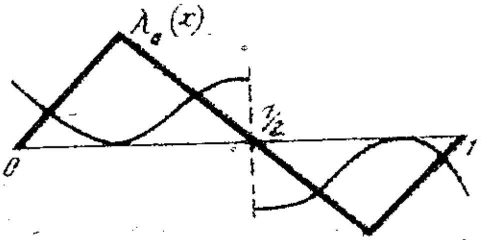

Рис 2. Графика функции $\lambda_0(x)$ (ломаная)

равно $d = 2\int_0^{\frac{1}{4}} x \left[g(x) + g\left(\frac{1}{2} - x\right)\right] dx$. Так, например, если $g(x) = \sin 2\pi x$, то $d = \frac{1}{(2\pi)^2}$, если $g(x) = 2\chi_0(x) - 1$, где $\chi_0(.)$ — характеристическая функция отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, то $d = \frac{1}{8}$.

Пусть теперь функция $f(x_1, x_2)$ в задаче (1.11) — (1.12) имеет вид $f(x_1, x_2) = g(x_1)$, где $g(x_1)$ функция только что рассмотренного вида, и пусть $\lambda_0(x_1)$ — решение задачи (3.1) — (3.2) с этой функцией $g(x_1)$. Тогда, функция $\varphi_0(x_1, x_2) = \lambda_0(x_1)$ есть решение задачи (1.11) — (1.12). Действительно, поскольку для всякой функции φ, удовлетворяющей (1.12), функция $x_1 \to \varphi(x_1, x_2)$ при каждой фиксированной $x_2 \in [0, 1]$ также удовлетворяет (3.2), имеем

$$\int_0^1 f(x_1, x_2)\,\varphi(x_1, x_2)\,dx_1 = \int_0^1 g(x_1)\,\varphi(x_1, x_2)\,dx_1$$

$$\int_0^1 g(x_1)\,\lambda_0(x_1)\,dx_1 = \int_0^1 f(x_1, x_2)\,\varphi_0(x_1, x_2)\,dx_1 = d$$

следовательно,

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\,\varphi(x_1, x_2)\,dx_1, dx_2 \quad \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\,\varphi_0(x_1, x_2)\,dx_1, dx_2 = d$$

Рассмотрим теперь один пример к задаче (2.1) — (2.2). Пусть v^0 такой, что $\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2^0}{\partial x_1}$, и компоненты v_1^0, v_2^0 удовлетворяют условию (2.2) (вообще говоря, нельзя утверждать что существует $u_0 \in W_1^1(Q)$, удовлетворяющая (2.2), такая, то $\nabla u = v^0$, поэтому, значение задачи (0.3) вообще говоря, 0). Из теоремы 2, следует, что значение d_1 этой задачи равно

$$d_1 = \max_{|c|\leqslant 1}\int_0^1\int_0^1 (c \mid (v^0)^*)\,dx = \max_{|c|\leqslant 1}(c_1 p_2 - c_2 p_1)$$

где
$$p_i = \int_0^1\int_0^1 u_i^0(x_1, x_2)\,dx_1, dx_2 \qquad (i = 1, 2)$$

Стало быть
$$d_1 = \sqrt{p_2^1 + p^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\int_0^1\int_0^1 v_1^0(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2\right)^2 + \left(\int_0^1\int_0^1 v_2^0(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2\right)^2}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. М. Тихомирову за предложение с задачами, их обсуждения и многочисленные ценные советы.

Поступило в Редакцию 25-VI-1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ИОФФЕ А. Д., ТИХОМИРОВ В. М. *Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи,* УМН 23, 6 (1968) 51 — 116.

[2] EKELAND I., TEMAM R. *Analyse convexe et problèmes variationnelles.* Dunod-Paris, 1974.

[3] МОСОЛОВ П.П. П.М.М. 1977.

[4] БЫХОВСКИЙ Э.Б., СМИРНОВ Н.В. *Об ортогональном разложени и пространства вектор-функций, квадратично-суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа.* Труды МИАН, LIX, 1960, 3-36.