ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 3, № 1 (1978)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

LÊ CÔNG THÀNH И PHAN ĐÌNH DIỆU

Институт Математики
Ханой, Вьетнам

В последние годы теория графов тесно связана со многими разделами математики и служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение Изучение свойств графов, определение их параметров, как хорошо известно, являются интересной и важной задачей.

В настоящей работе рассматриваются конечные неориентированные графы с любым заданным числом вершины, даются асимптотические оценки многих параметров для таких графов, а также приводится несколько приложений полученных результатов к минимизации числа состояний для не всюду определенных конечных автоматов и к определению вычислительной сложности для широкого круга комбинаторных проблем.

I. Числа внутренней и внешней устойчивости графов.

Здесь итакже во всей работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Каждый рассматриваемый граф G задается в виде $G=(V,\widetilde{G})$ где V — конечное фиксированное множество *вершин*, а $\widetilde{G}$ — заданное множест во неупорядоченных пар различных вершин из V. Каждую пару $e=(v,w)$ вершин в $\widetilde{G}$ называют *ребром* графа G и говорят, что ребро e соединяет вершины v и w. Мы будем говорить, что v и w — *соседние вершины* графа G; вершина v и ребро e — *инцидентные элементы*, так же как w и e Если два различных ребра инцидентны одной и той же вершине, то они называются *смежными*; в противном случас они называются *несмежнымн редрами*.

Ясно, что число всех рассматриваемых графов с n вершинами равно $2^{C_n^2}$. Полагаем $p = 2^{C_n^2}$. Будем обозначать множество таких зрафов через

$$\mathcal{G}_n = \{G_1, G_2, \ldots, G_p\}.$$

Под *долей* графов из $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющих некоторому свойству, везде будем понимать отношение числа графов из $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющих этому свойству, к числу всех графов множества $\mathcal{G}_n$, т.е. к числу $2^{C_n^2}$. Мы будем говорить, что *почти все* графы из $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющие некоторому свойству, если доля графов из $\mathcal{G}_n$, удовлетворяющих этому свойству, стремится к единице при $n \to \infty$.

Пусть на множестве $\mathcal{G}_n = \{G_i / i = 1, 2, \ldots, p\}$ задан некоторый неотрицательный параметр $\pi(G_i)$. Рассмотрим его *среднее значение* $\overline{\pi(n)} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \pi(G_i)$, $p = 2^{C_n^2}$. В дальнейшем нам понадобится следующая простая

Лемма 1. *Доля графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых*

$$\pi(G) \geqslant \varphi.\, \overline{\pi(n)},$$

не превосходит $1/\varphi$.

Пусть $G = (V, \widetilde{G})$ —заданный граф. Множество $B \subseteq V$ называется *внутренне устойчивым множеством* графа G, если для любых двух вершин v и w из B граф G не имеет ребра, соединяющего v и w. Число вершин наибольшего по мощности внутренне устойчивого множества графа G называется *числом внутреннеи устоичивости* (или, *числом независиомсти*) графа G и обозначается через $\alpha\ (G)$.

Множество B называется *внешне устоичивым множеством* графа G, если каждое ребро графа инцидентно какой-нибудь вершине из B. Число вершин наименьшего по мощности внешне устойчивого множества графа G называется *числом внешнеи устончивости* графа G и обозначается через $\beta(G)$.

Для каждоло натурального числа $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$ мы будем пользоваться следующим обозначениями :

$I_k(G)$ — число внутренне устойчивых множеств k верщин графа G;
$\overline{I_k(n)}$ —среднее значение $I_k(G)$ для всех $G \in \mathcal{G}_n$.

Лемма 2. $\overline{I_k(n)} = C_n^k 2^{-C_k^2}$.

Доказательство. Пусть $|V| = n$ и $q = C_n^k$. Всевозможные подмножества, состоящие из k элементов множества V, обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_q$. Рассмотрим величину

$$d_k(G_i, B_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } B_j \text{ является внутренне устойчивым множеством графа } G_i, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{p} I_k(G_i) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} d_k(G_i, B_j) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} d_k(G_i, B_j) = \sum_{j=1}^{q} g_k(B_j),$$

где $g_k(B_j)$ — число графов из $\mathcal{G}_n$, для которых B_j является внутренне устойчивым множеством. Очевидно, что

$$g_k(B_j) = 2^{C_n^2 - C_k^2}.$$

Отсюда следует

$$\overline{I_k(n)} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} I_k(G_i) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{q} g_k(B_j) = \frac{q}{p}2^{C_n^2 - C_k^2} = C_n^k 2^{-C_k^2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть* $h = [2\log n] - 1$ Тогда при достаточно больших n, для почти всех неориентированных графов G с n вершинами, всякое внутренне устойчивое множество содержит не более h вершин; следовательно, $\alpha(G) < 2\log n$.*

Доказательство. По предыдущей лемме, $\overline{I_{h+1}(n)} = C_n^{h+1} 2^{-C_{h+1}^2}$. Применяя лемму I при $\varphi = h + 1$, получаем, что у почти всех графов G из $\mathcal{G}_n$

$$I_{h+1}(G) \leqslant (h+1)\,\overline{I_{h+1}(n)} \leqslant \frac{n^{h+1}}{2^{C_{h+1}^2}.h!} \leqslant \frac{4}{h}.$$

Последнее меньше единицы при достаточно больших n. Это означает, что $I_{h+1}(G) = 0$ Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Пусть $h = [2\log n] - 1$. Тогда при достаточно больших n для почти всех графов G с n вершинами, всякое внешне устойчивое множество содержит не менее $n - h$, вершин; следовательно,*

$$n - 2\log n < \beta(G) \leqslant n.$$

Доказательство. Заметим, что если B есть внутренне устойчивое множество графа $G = (V, \widetilde{G})$ то $V \setminus B$ является внешне устойчивым множеством этого графа. Отсюда и из теоремы I вытекает наше утверждение.

2. Числа внутренне и внешне устойчивых множеств графа.

Лемма 3. *Пусть $k \leqslant [2\log n - 5\log\log n]$. Тогда при достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $I_k(G)$ внутренне устойчивых множеств k вершин удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{C_n^k}{2^{C_k^2}}\left(1 - \frac{\log^3 n}{n}\right) < I_k(G) < \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}}\left(1 + \frac{\log^3 n}{n}\right).$$

* Под $\log$ везде понимается логарифм по основанию 2, а $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

Доказательство. Пусть $\xi_{n,k}$ —случайная величина, принимающая значение $m (0 \leqslant m \leqslant C_n^k)$ с вероятностью $P_{n,k}(m)/2^{C_n^2}$, где $P_{n,k}(m)$ — число графоъ G с n вершинами, у которых $I_k(G) = m$. Тогда $\overline{I_k(n)}$ можно рассматривать как её математическое ожидание. Итак,

$$M\xi_{n.k} = \overline{I_k(n)} = C_n^k \cdot 2^{C_k^2}.$$

Кроме того, можно убедиться, что при достаточно больших n и при любом $k \leqslant [2logn - 5loglogn]$ дисперсия $D\xi_{n,k}$ удовлетворяет

$$D\xi_{n,k} \leqslant \frac{k^5}{n^2} \left(M\xi_{n,k}\right)^2.$$

Применим теперь к $\xi_{n,k}$ нерагенство Чебышева

$$P\{|\xi_{n,k} - M\xi_{n,k}| \geqslant t\} \leqslant \frac{D\xi_{n,k}}{t^2}.$$

По определению величины $\xi_{n,k}$ вероятность в левой части неравенства равна доле графов G, для которых $\left|I_k(G) - \overline{I_k(n)}\right| \geqslant t$. Взяв $t = \frac{log^3 n}{n} M\xi_{n,k}$, получим

$$\frac{D\xi_{n,k}}{t^2} \leqslant \frac{k^5(M\xi_{n,k})^2}{n^2} \cdot \frac{n^2}{logn(M\xi_{n,k})^2} (M\zeta_{n,k})^2 < \frac{2^5}{log^6 n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тем самым доказано, что для почти всех графов G

$$\left| I_k(G) - \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} \right| < \frac{log^3 n}{n} \cdot \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}}.$$

Таким образом лемма доказана.

Теорема 2. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами число $I(G)$ всех внутеренне устойчивых множеств удовлетворяет следующим неравенствам*

$$n^{\frac{1}{2}logn - loglogn - 1} < I(G) < n^{\frac{1}{2}logn + loglogn + 2}.$$

Доказательство. Полагаем $h = [logn]$. Тогда нижняя оценка для $I(G)$ получается с помощью леммы 3 следующим обрадом

$$I(G) > I_h(G) > \frac{C_n^h}{2^{C_h^2}} \left(1 - \frac{log^3 n}{n}\right) > n^{\frac{1}{2}logn - loglogn - 1}$$

Для вывода верхней оценки рассмотрим отношение

$$\frac{\overline{I_{k+1}(n)}}{\overline{I_k(n)}} = \frac{n-k}{2^k(k+1)}.$$

Убеждаемся, что

$$\overline{I_k(n)} < \begin{cases} (\log n)^{h-k} \cdot \overline{I_h(n)} & \text{, если } k < h \\ \left(\frac{2}{\log n}\right)^{k-h} \cdot \overline{I_h(n)} & \text{, если } k \geqslant h \end{cases}$$

Пусть $\overline{I(n)}$ — среднее значение числа $I(G)$ внутренне устойчивых множеств графа G, когда G пробегает всё множество $\mathcal{G}_n$. Тогда, при достаточно больших n, имеем

$$\overline{I(n)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{I_k(n)} < \sum_{k<h} \overline{I_k(n)} \left(\log n\right)^{h-k} + \sum_{k\geqslant h} \overline{I_h(n)} \left(\frac{2}{\log n}\right)^{k-h} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{I_h(n)} \left(\log n^{\log n} + \frac{1}{n-2/\log n}\right) \leqslant C_n^h \, 2^{-C_h^2} \left(n^{\log\log n} + 2\right) <$$

$$< n^{\frac{1}{2}\log n + 1} \left(n^{\log\log n} + 2\right) < 2n^{\frac{1}{2}\log n + \log\log n + 1}$$

Используя лемму I при $\varphi = \frac{n}{2}$, получаем, что для почти всех графов G с n вершинами

$$I(G) < \frac{n}{2} \overline{I(n)} < n^{\frac{1}{2}\log n + \log\log n + 2}.$$

Теорема доказана.

Пусть $G = (V, \widetilde{G})$ — заданный граф. Внутренне устойчивое множество $B \subseteq V$ называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком большем внутренне устойчивом множестве графа G.

Теорема 3. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $IM(G)$ максимальных внутренне устойчивых множеств удовлетворяет следующим неравенствам*

$$n^{\frac{1}{2}\log n - \log\log n - 3} < IM(G) < n^{\frac{1}{2}\log n + \log\log n + 2}$$

Доказательство. Верхняя оценка очевидна по теореме 2.

Для вывода нижней оценки положим $k = [\log n]$ и $h = [2\log n - 1]$ По теореме 1, при достаточно больших n, всякое внутренне устойчивое множество графа G содержит не более h вершин для почти всех графов G с n вершинами. Каждое максимальное внутренне устойчивое множество, имеющее не более h вершин, содержит не больше чем C_h^k внутренне устойчивых множеств k вершин. С другой стороны, каждое внутренне устойчивое множество k вершин содержится в некотором максимальном внутренне устойчивом множестве. Отсюда следует

$$IM(G) \geqslant \frac{1}{C_h^k} I_k(G) > \frac{1}{n^2} \, n^{\frac{1}{2}\log n - \log\log n - 1} = n^{\frac{1}{2}\log n - \log\log n - 1}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $G = (V, \widetilde{G})$ — заданный граф. Внешне устойчивое множество $B \subseteq V$ называется *тинималным*, если оно не содержит ни какого меньшего внешне устойчивого множества графа G. Заметим, что для каждого графа число всех (минимальных) внешне устойчивых множеств равно числу всех (максимальных) внутренне устойчивых множеств. Поэтому, по теоремам 2 и 3, имеем

Следствие. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $O(G)$ всех внешне устойчивых множест ви число $Om(G)$ минимальных внешне устойчивых множеств удвовлетворяют следующим неравенствам*

$$n^{\frac{1}{2}\log n - \log\log n - 1} < O(G) < n^{\frac{1}{2}\log n + \log\log n + 2}$$

и

$$n^{\frac{1}{2}\log n - \log\log n - 3} < Om(G) < n^{\frac{1}{2}\log n + \log\log n + 2}$$

3. Число ребер и число множеств попарно несмежных ребер графа.

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$J_k(G)$ — число множеств k попарно несмежных ребер графа G,

$\overline{J_k(n)}$ — среднее значение, $J_k(G)$ когда G пробегает G_n;

$\mathcal{C}_{n,k}$ — семейство всех различных множеств k попарно несмежных ребер соединяющих любые две вершины из V, $|V| = n$.

Нетрудно видеть, что $|\mathcal{C}_{n,k}| = \frac{(2k)!}{2^k} C_n^{2k}$.

Обозначим далее

$$\mathcal{C}_{n,k} = \{E_1, E_2, ..., E_r\}, \quad r = \frac{(2k)!}{2^k} C_n^{2k}.$$

Лемма 4. *Пусть n — достаточно большое натуральное число и k — любое натуральное число такое, что $k \leqslant \frac{n}{2}$. Тогда, для почти всех графов G с n вершинами, число $J_k(G)$ множеств k попарно несмежных ребер удовлетворяет*

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}} C_n^{2k}\left(1 - \frac{\sqrt{k}\log n}{n}\right) < J_k(G) < \frac{(2k)!}{2^{2k}} C_n^{2k}\left(1 + \frac{\sqrt{k}\log n}{n}\right).$$

Доказательство. Пусть $Q_{n,k}(m)$ — число графов G с n вершинами, у которых $J_k(G) = m$. Тогда $\overline{J_k(n)}$ можно рассматривать как метаматическое ожидание случайной величины, $\zeta_{n,k}$, принимающей значение m с вероятностью $Q_{n,k}(m)/2^{C_n^2}$. Итак, и совершенно аналогично лемме 2,

$$M\zeta_{n,k} = \overline{J_k(n)} = \frac{(2k)!}{2^{2k}} C_n^{2k}$$

и, при достаточно больших n, имеем

$$D\,\zeta_{n,k} < \frac{5k}{n^2}\left(M\zeta_{n,k}\right)^2.$$

Теперь, как и при доказательстве леммы 3, применяя к $\zeta_{n,k}$ неравенство Чебышева при $t = \frac{\sqrt{k}\log n}{n} M\,\zeta_{n,k}$, получаем: для почти всех графов G с n вершинами

$$\left|J_k(G) - \frac{(2k)!}{2^{2k}} C_n^{2k}\right| < \frac{\sqrt{k}\log n}{n} \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}} C_n^{2k},$$

что и требовалось доказать.

Полагая в этой лемме $k = 1$, получаем следующий результат

Теорема 4. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами число $e(G)$ ребер удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n^2}{4}\left(1 - \frac{2\log n}{n}\right) < e(G) < \frac{n^2}{4}\left(1 + \frac{\log n}{n}\right).$$

Теорема 5. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами число $J(G)$ всех множеств попарно несмежных ребер удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n!}{2^n} < J(G) < n^2 \frac{n!}{2^n}.$$

Доказательство. Взяв отношение

$$\frac{\overline{J_k(n)}}{\overline{J_{k+1}(n)}} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{4},\ 2 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right],$$

убеждаемся, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} \overline{J_k(n)} = \begin{cases} \overline{J_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(n)}, & \text{если } n \text{ четно} \\ \overline{J_{\left[\frac{n}{2}\right]}(n)}, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$$

$$= \frac{n!}{n_-}$$

Пусть $\overline{J(G)}$ — среднее значение числа $J(G)$ множеств попарно несмежных ребер графа G, когда G пробегает $\mathcal{G}_n$. Тогда

$$\overline{J(n)} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \overline{J_k(n)} \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \max_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} \overline{J_k(n)} \leqslant n \frac{n!}{2^n}$$

Применяя лемму 1 при $\varphi = n$, получаем: для почти всех графов G с n вершинами

$$J(G) < n\,\overline{J(n)} \leqslant n^2 \frac{n!}{2^n}.$$

Нижняя оценка для $J(G)$ получается с помощью леммы 4 следующим образом

$$J(G) > J_{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(G) + J_{\left[\frac{n}{2}\right]}(G) > \frac{n!}{2^n}.$$

Теорема доказана.

Множество попарно несмежных ребер графа называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком большем множестве попарно несмежных ребер этого графа. Заметим, что любое множество, состоящее из $\left[\frac{n}{2}\right]$ попарно несмежных ребер графа с n вершинами, является максимальными. В силу леммы 4, для почти всех графов G с n вершинами, число $J_{\left[\frac{n}{2}\right]} G$ множеств $\left[\frac{n}{2}\right]$ попарно несмежных ребер больше чем $\frac{n!}{2^{n+1}}$, если n достаточно велико. Поэтому имеет место следующая

Теорема 6. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $JM\,(G)$ максимальных множеств попарно несмежных ребер удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n!}{2^{n+1}} < JM\,(G) < n^2\,\frac{n!}{2^n}.$$

4. Реберное число независимости графов.

Пусть G — некоторый заданный граф. Число ребер наибольшего (по мощности) множества попарно несмежных ребер графа G называется *реберным числом независимости* этого графа и обозначается через $\alpha'\,(G)$.

Теорема 7. *Пусть n — натуральное число такое, что $n \geqslant 4$. Тогда, для почти всех графов G с n вершинами, всякое максимальное множество попарно несмежных ребер имеет более $\left[\frac{n}{2} - \sqrt{n\log n}\right] + 1$ ребер; следовательно,*

$$\frac{n}{2}\left(1 - 2\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) < \alpha'\,(G) \leqslant \frac{n}{2}.$$

Доказательство. Пусть $JM_k\,(G)$ — число максимальных множеств k попарно несмежных ребер графа G, а $\overline{JM_k\,(n)}$ — среднее значение $JM_k\,(G)$ для всех $G \in \mathcal{G}_n$. Тогда, используя метод вычисления $\overline{I_k\,(n)}$ и $\overline{J_k\,(n)}$, находим

$$\overline{JM_k\,(n)} = \frac{(2k)!}{2^{C^2_{n-2k}+2k}}\,C_n^{2k}.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\overline{JM_k(n)}}{\overline{JM_{k-1}(n)}} = (n-2k+1)(n-2k+2)2^{2n-4k-1}.$$

Оно не меньше единицы при любом $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Это означает, что $\overline{JM_{k-1}(n)} \leqslant \overline{JM_k(n)}$ при $2 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

Пусть $h \doteq \left[\frac{n}{2} - \sqrt{n\log n}\right] + 1$. Тогда, применяя лемму 1 при $\varphi = n$, получаем: для почти всех графов G с n вершинами и при любом $k \leqslant h$.

$$\overline{JM_k(G)} < n\overline{JM_k(n)} \leqslant n \ \overline{JM_h(n)} = n \ \frac{(2h)!}{2^{C^2_{n-2h}+2h}} C_n^{2h} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n\log n - n + 2\log n\sqrt{n\log n} - 3\sqrt{n\log n} - 3\log n}}$$

Последнее меньше единицы при любом $n \geqslant 4$. Это означает, что для почти всех графов с n вершинами, $n \geqslant 4$, всякое максимальное множество попарно несмежных ребер содержит более h ребер. Тем самым теорема доказана.

5. Связность графа. Чикломатическое число.

Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество n вершин. *Цепью* графа называется последовательность его ребер (т.е. неупорядоченных пар различных вершин):

$$(v_{i_0}, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \ldots, (v_{i_{k-1}}, v_{i_k}) \qquad (1)$$

Будем говорить, что указанная цепь *соединяет* вершины v_{i_0} и v_{i_k}.

Граф G называется *связным*, если любая пара его вершин соединена цепью, и *несвязным* в противном случае. Максимальный связный подграф графа G называется *компонентой связности* графа G. Число всех компонент связности графа G обозначается через $\chi(G)$. Очевидно, что граф G является связным в том и только в том случае, когда $\chi(G) = 1$.

Теоерма 8. *Пусть n — любое натуральное число. Тогда почти все графы с n вершинами связаны.*

Доказательство. Пусть H_n — число несвязных графов с n вершинами. Тогда

$$H_n \leqslant C_n^1 2^{C^2_{n-1}} + C_n^2 2^{C^2_{n-2} + C^2_2} + \ldots + C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^{C^2_{n-[n/2]} + C^2_{[n/2]}}$$

Покажем, что среди слогаемых суммы в правой части неравенства первое слагаемое максимально.

Действительно, для каждого $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ рассмотрим отношение

$$\frac{C_n^1 2^{C_n^2} - 1}{C_n^k 2^{C^2_{n-k}} + C_k^2} = \frac{k(k-1)\dots 2}{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} \, 2^{nk-n-k^2+1} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{n-k+1}\right)^{k-1} 2^{(n-k-1)(k-1)} = \left(\frac{2^{n-k}}{n-k+1}\right)^{k-1}$$

Последнее выражение, очевидно, не меньше единицы при любом n и при $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$

Отсюда

$$H_n \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \max_{1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} C_n^k 2^{C^2_{n-k} + C^2_k} \leqslant n^2 2^{C^2_{n-1} - 1}.$$

Имеем

$$\frac{H_n}{2^{C_n^2}} \leqslant \frac{n^2 2^{C_n^2 - 1} - 1}{2^{C_n^2}} = \frac{n^2}{2^n}$$

Последнее стремится к нулю с ростом n.. Тем самым теорема доказана.

Напомним понятие цикла. Если в последовательности (1) $v_{i_0} = v_{i_k}$ и $k \geqslant 3$, то такая цепь называется *циклом длины* k, и обозначается через $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$. Цикл называется *элементарным*, если все его вершины (следовательно, все его ребра) различны.

Для каждого графа G с n вершинами *цикломатическим числом* называется число

$$\nu(G) = e(G) - n + \chi(G),$$

где $e(G)$ — число всех ребер графа G. Как известно (см. [I]), цикломатическое число $\nu(G)$ равно наибольшему числу попарно независимых элементарных циклов графа G.

Из определения числа $\nu(G)$ и теорем 4, 5 вытекает

Следствие. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, цикломатическое число* $\nu(G)$ *удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n^2}{4}\left(1 - \frac{3\log n}{n}\right) < \nu(G) < \frac{n^2}{4}\left(1 + \frac{\log n}{n}\right).$$

Замечание. Поскольку для каждого графа G с n вершинами $1 \leqslant \chi(G) \leqslant n$, то имеем $e(G) - n + 1 \leqslant \nu(G) \leqslant e(G)$. Поэтому полученные в следствии асимптотические оценки цикломатического числа $\nu(G)$ сразу вытекает из теоремы 4, не используя при этом теорему 8.

6. Минимальные циклы графа.

Пусть $(v_{i_1}, v_{i_i}, \ldots, v_{i_k})$ — элементарный цикл длины k графа G. Этот цикл называется *минималным циклом* графа G, если в G не существует цикла меньшей длины, всеми вершинами которого являются вершины заданного цикла.

Пусть $C_k(G)$ — число минимальных циклов длины k графа G и $\overline{C_k(n)}$ — среднее значение $C_k(G)$, когда G пробегает множество всех графов с n вершинами. Тогда находим

$$\overline{C_k(n)} = C_n^k 2^{-C_k^2} \cdot \frac{k!}{2k}.$$

Теорема 9. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, длина всякого минимального цикла в G меньше чем $2\log n + 1$.*

Доказательство. Пусть $h = [2\log n + 1]$. Тогда, используя лемму 1 при $\varphi = \sqrt{h}$, убеждаемся, что для почти всех графов G с n вершинами

$$C_{h+1}(G) < \overline{C_{h+1}(n)} \cdot \sqrt{h},$$

т.е.

$$C_{h+1}(G) < C_n^{h+1} 2^{-C_{h+1}^2} \cdot \frac{(h+1)}{2(h+1)!} \sqrt{h} \leqslant \frac{\sqrt{h}}{2(h+1)}.$$

Последнее меньше единицы, если n достаточно велико. Это означает, что $C_{h+1}(G) = 0$. Отсюда и из того, что $\overline{C_k(n)}$ — убывающая функция от k при $k > \log n$, получаем доказательство нашей теоремы.

Лемма 5. *Пусть $k = [\log n]$. Тогда при достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами число $C_k(G)$ минимальных циклов длины k удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{k!}{2k} \cdot \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} \left(1 - \frac{k^3}{n}\right) < C_k(G) < \frac{k!}{2k} \frac{C_n^k}{2^{C_n^2}} \left(1 + \frac{k^3}{n}\right).$$

Доказательство совершенно аналогично доказательствам лемм 3 и 4.

Теорема 10. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $C(G)$ минимальных циклов удовлетворяет неравенствам*

$$n^{\frac{1}{2}\log n - 2} < C(G) < n^{\frac{1}{2}\log n + 2}.$$

Доказательство. Пусть $k = [\log n]$. Тогда, по лемме 5, получаем нижнюю оценку для $C(G)$:

$$C(G) > C_k(G) > \frac{k!}{2k} \frac{C_n^k}{2^{C_k^2}} \left(1 - \frac{k^3}{n}\right) > n^{\frac{1}{2}\log n - 2}$$

Теперь находим верхнюю оценку. Взяв отношение

$$\frac{\overline{C_{h+1}(n)}}{\overline{C_h(n)}} = \frac{h(n-h)}{(h+1)\,2^h}, \ \forall\ h < n,$$

убеждаемся, что максимум величины $\overline{C_h(n)}$ достигается при $h = k = [\log n]$.

Пусть $\overline{C(n)}$ — среднее значение числа $C(G)$ минимальных циклов графа G, когда G пробегает множество всех графов с n вершинами. Имеем тогда

$$\overline{C(n)} = \sum_{h=3}^{n} \overline{C_h(n)} \leqslant n\,\overline{C_k(n)} \leqslant \frac{1}{\log n}\, n^{\frac{1}{2}\log n + 2}.$$

Используя лемму 1 при $\varphi = \log n$, получаем : для почти всех графов G с n вершинами

$$C(G) < \log n\ \overline{C(n)} < n^{\frac{1}{2}\log n + 2}.$$

7. Степень вершины и число вееров графа.

Пусть v — некоторая вершина графа G. Назовем k - *веером* при вершине v для графа G его подграф, состоящий из k ребер, инцидентных этой вершине. *Звездой* при вершине v для графа G назовём его максимальный веер при v, т.е. подграф, состоящий из всех ребер графа G, инцидентных вершине v. Для графа G *степень* $\delta_G(v)$ *вершины* v есть число ребер в звезде при этой вершине.

Теорема 11. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, степень $\delta_G(v)$ всякой вершины v удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n\log n} < \delta_G(v) < \frac{n}{2} + \sqrt{n\log n}.$$

Доказательство. Пусть $S_k(G)$ — число звезд с k ребрами для графа G, а $\overline{S_k(n)}$ среднее значение $S_k(G)$, когда G пробегает всё множество $\mathcal{G}_n$. Тогда, используя метод вычисления $\overline{I_k(n)}$ (см. лемму 2), находим

$$\overline{S_k(n)} = \frac{n\,C_{n-1}^k}{2^{n-1}}.$$

Полагаем $h = \left[\frac{n}{2} - \sqrt{n\log n}\right] + 1$. Тогда, применяя формулу Стирлинга для $m!$ и следующие неравенства

$$\frac{1}{e} \geqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \geqslant \frac{1}{3},$$

$$e \geqslant \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geqslant 2{,}5 = \frac{5}{2}$$

при достаточно больших n, мы имеем

$$\overline{S_h(n)} = \frac{n!}{2^{n-1}h!\,(n-h-1)!} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда, используя лемму 1 при $\varphi = \log n$ и учитывая, что $\overline{S_k(n)}$ есть возр. функция от k при $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, следует: при достаточно больших n и при любом $k \leqslant$ ля почти всех графов G с n вершинами

$$S_k(G) < \log n\ \overline{S_k(n)} \leqslant \log n\ \overline{S_h(n)} < \frac{\log n}{\sqrt{n}}.$$

Последнее меньшее единицы, если n достаточно велико. Это означает, что $S_k(G) = 0$ при любом $k \leqslant h$. Тем самым доказано, что при достаточно больших n, почти все графы с n вершинами не имеют звезд с числом ребер, меньшим чем $\left[\frac{n}{2} - \sqrt{n \log n}\right] + 1$. Отсюда получается нижняя оценка степени $\delta_G(v)$ всякой вершины для таких графов.

Верхняя оценка следует из предыдущего с учётом того, что

$$\overline{S_k(n)} = \frac{n\,C_{n-1}^k}{2^{n-1}} = \frac{n\,C_{n-1}^{n-k-1}}{2^{n-1}} = \overline{S_{n-k-1}(n)}$$

при любом $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ Таким образом теорема доказана.

Следствие. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $B(G)$ всех вееров удовлетворяет следующим неравенствам*

$$2^{\frac{n}{2}(1-\varepsilon_n)} < B(G) < 2^{\frac{n}{2}(1+\varepsilon_n)},$$

где $\varepsilon_n = 3\sqrt{\frac{\log n}{n}} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Действительно

$$B(G) = \sum_v 2^{\sigma_G(v)} > n\,2^{\frac{n}{2} - \sqrt{n \log n}} = 2^{\frac{n}{2} - \sqrt{n \log n} + \log n} > 2^{\frac{n}{2}\left(1 - 3\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)}.$$

Верхняя оценка получается аналогично.

8. Хроматическое число. Реберное и общее хроматические числа.

Как и раньше, множество всех вершин любого графа из $\mathcal{G}_n$ обозначается через V, $|V| = n$. Для каждого натурального числа k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и произвольной фиксированной вершины $v \in V$ мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$I_{k,v}(G)$ — число внутренне устойчивых множеств графа G, состоящих из k вершин и содержащих v;

$\overline{I_{k,v}(n)}$ — среднее значение $I_{k,v}(G)$ для всех $G \in \mathcal{G}_n$.

Теперь находим n — *достаточно большое натуральное число и* $k = [2\log n -$

доля графов G *из* $\mathcal{G}_n$, *для которых*

$$\left| I_{k,v}(G) - C_{n-1}^{k-1} \cdot 2^{-C_k^2} \right| \geqslant \frac{1}{k} C_{n-1}^{k-1} \cdot 2^{-C_k^3}, \qquad (2)$$

убе

не превосходит $\dfrac{2k^5}{n}$.

Доказательство. Используя метод вычисления $\overline{I_k(n)}$ (см. лемму 2), находим

$$\overline{I_{k,v}(n)} = C_{n-1}^{k-1} \cdot 2^{-C_k^2}.$$

Пусть $P_{n,k,v}(m)$ — число графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых $I_{k,v}(G) = m$. Тогда $\overline{I_{k,v}(n)}$ можно рассматривать как математическое ожидание случайной величины $\xi_{n,k,v}$, принимающей значение m с вероятностью $P_{n,k,v}(m)/2^{C^2}$. Итак,

$$M\,\xi_{n,k,v} = \overline{I_{k,v}(n)} = C_{n-1}^{k-1} \cdot 2^{-C_k^2}.$$

Далее, по формуле $D\,\xi_{n,k,v} = M\,\xi_{n,k,v}^2 - (M\,\xi_{n,k,v})^2$, имеем

$$D\xi_{n,k,v} \leqslant \frac{2k^3}{n}\left(M\,\xi_{n,k,v}\right)^2,$$

при заданных условиях для n и k.

Заметим, что вероятность $P\left(\left|\xi_{n,k,v} - M\,\xi_{n,k,v}\right| \geqslant t\right)$ равна доле графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых

$$\left| I_{k,v}(G) - C_{n-1}^{k-1} 2^{-C_k^2} \right| \geqslant t.$$

Тогда, применяя к $\xi_{n,k,v}$ неравенство Чебышева при $t = \dfrac{1}{k} C_{n-1}^{k-1} \cdot 2^{-C_k^2}$ убеждаемся в справедливости леммы.

Следствие. *Пусть* n *и* k *удовлетворяют условиям леммы 6, а* $u_k(G)$ — *число вершин* v *из* V, *для которых выполнено соотношение (2). Тогда для почти всех графов* G *из* $\mathcal{G}_n$ *число* $u_k(G)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_k(G) < k^6.$$

Доказательство. Оценим сверху среднее значение $\overline{u_k(n)}$ величины $u_k(G)$. Пусть $g_k(v)$ — число графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых выполнено (2). Тогда

$$\sum_{i=1}^{p} u_k(G_i) = \sum_{j=1}^{n} g_k(v_j),$$

где, по обозначению, $p = 2^{C_n^2} = |\mathcal{G}_n|$. Имеем далее

$$\overline{u_k(n)} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_k(Gi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_k(v_j)}{2^{C_n^2}} \leqslant 2k^5,$$

т.к., по предыдущей лемме, $\dfrac{g_k(v_j)}{2^{C_n^2}} \leqslant \dfrac{2k^5}{n}$.

Теперь, применяя лемму I при $\varphi = \frac{k}{2}$, убеждаемся, что доля графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых $u_k(G) > k^6 > \frac{k}{2}\overline{u_k(n)}$ не превосходит $2/k$. Отсюда получаем наше. утверждение.

Напомним следующее понятие. *Покрытием* множества M называется совокупность его подмножеств такая, что для любого элемента x из M найдется подмножество из этой совокупности, содержащее x.

Пусть V — множество всех n вершин всякого графа G с n вершинами, и $U \subseteq V$. Покрытие множества U, состоящее из максимальных внутренне устойчивых множеств графа G, будем называть I_G- *покрытием* множества U. I_G - покрытие называется *минимальным*, если оно имеет наименьшее число максимальных внутренне устойчивых множеств по сравнению со всеми I_G — покрытиями.

Хроматическим числом графа G (обозначается через $\chi(G)$) называется наименьшее число различных цветов, с помощью которых можно раскрасить все вершины графа так, чтобы любым двум соседним вершинам сопоставлены разные цвета.

Замечание. Для каждого графа G хроматическое число $\chi(G)$, очевидно, равно числу максимальных внутрене устойчивых множеств минимального I_G — покрытия множества всех вершин графа G.

Чтобы оценить хроматическое число графа, мы докажем ещё одну лемму о сложности покрытия конечного множества его подмножествами.

Лемма 7. *Пусть M — любое конечное множество и $\Sigma = \{C_1,\dots C_l\}$ — совокупность его подмножеств такая, что каждый элемент $x \in M$ принадлежит не менее чем γl подмножествам из Σ. Тогда существует покрытие множества M подмножествами из Σ, содержащее не более чем*

$$\frac{1}{\gamma}(ln(\gamma\,|\,M\,|\,)+1)+1$$

подмножеств.

Доказательство. Рассмотрим таблицу, в которой каждому элементу $x \in M$ соответствует строка, а каждому подмножеству C_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ — столбец, причем если $x \in C_j$, то на пересечении соответствующих строк столбца стоит 1, а если $x \notin C_j$, то стоит 0. Тогда задача состоит в том, чтобы выбрать столбцы, которые «покрывают» все строки, т.е. для каждой строки среди выбранных столбцов есть такой, который содержит 1 в этой строке.

Столбцы будем выбрать по одному с таким расчётом, чтобы очередной выбираемый столбец покрывал наибольшее число ещё не покрытых строк. Мы обозначим число строк, не покрытых первыми i выбранными столбцами, через $\lambda_i \ | M |$. Заметим, что после вычеркивания из таблицы первых $i - 1$ выбранных столбцов и всех покрытых ими строк таблица будет содержать ещё не менее $\lambda_{i-1} \ | M | \ \gamma_l$ единиц. Поэтому i й выбираемый столбец будет содержать в этой таблице не менее $\lambda_{i-2} \ | M | \ \gamma$ единиц. Отсюда имеем

$$\lambda_i \ | M | \leqslant \lambda_{i-1} \ | M | - \lambda_{i-1} \ | M | \ \gamma = \lambda_{i-1} (1-\gamma) \ | M | \leqslant \dots$$

$$\dots \leqslant (1-\gamma)^i \ | M | \leqslant e^{-\gamma i} \ | M | .$$

При любом i можно прервать процесс построения покрытия. Число входящих в него подмножеств, очевидно, не превосходит $i + \lambda_i \ | M |$. Полагая $i = \left[\frac{1}{\gamma} \ ln (\gamma \ | M |) + 1 \right]$ и учитывая, что $\lambda_i \ | M | \leqslant e^{-\lambda i} \ | M |$, получаем наше утверждение.

Теорема 12. *При достаточноб ольших n, для почти всех графов G с n вершинами, хроматическое число* $\chi (G)$ *удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{1}{2 \log n} n < \chi (G) < \frac{\log\log n}{2\log n} n.$$

Доказательство. Будем рассматривать те графы из G_n, на которые распространяются теорема I, лемма 3, лемма 6 её следствие. Очевидно, что доля остальных графов стремится к нулю с ростом n. Докажем теорему для любого рассматриваемого графа G, используя при этом предыдущее замечание.

Нижняя оценка следует из теоремы I и соотношения (см. [I]) :

$$\alpha (G) \, . \, \chi (G) \geqslant n.$$

Чтобы получить верхнюю оценку, нам достаточно доказать, что существует I_G— покрытие множества V, содержащее менее $\frac{\log\log n}{2\log n} n$ максимальных внутренне устойчивых множеств. Для этого в множестве V выделяется подмножество V_G, состоящее из тех вершин v, для которых

$$I_{k,v} (G) \geqslant \gamma \, . \, I_k (G),$$

где

$$\gamma = C_{n-1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \Big/ C_n^k \left(1 + \frac{\log^3 n}{n}\right),$$

$$k = [2 \log n - 5\log \log n],$$

а $I_k (G)$ и $I_{k,v} (G)$ удовлетворяют неравенствам в леммах 3 и 6 соответственно. Очевидно, что при таком γ для любого рассматриваемого графа G, все вершины $v \in V$, которые удовлетворяют соотношению (2), вошли в V_G. Имеем

$$|V_G| \leqslant |V| = n,$$

$$|V \setminus V_G| \leqslant u_k(G) < k^6 < 2^6 \log^6 n,$$

$$\frac{2\log n}{n}(1-\varepsilon) \leqslant \gamma \leqslant \frac{2\log n}{n},$$

где $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда, покрывая множество V_G внутренне устойчивыми множествами k вершин в соответствии с леммой 7 и учитывая, что для покрытия множества $V \setminus V_G$ требуется не более $|V \setminus V_G|$ внутренне устойчивых множеств, получаем покрытие множества V внутренне устойчивыми множествами графа G, содержащее менее $\frac{\log\log n}{2\log n} n$ множеств. Отсюда и из того, что каждое внутренне устойчивое множество содержится в некотором максимальном таком множестве, следует наше утверждение. Теорема доказана.

Реберным хроматическим числом (или, *хроматическим классом*) графа называется наименьшее число различных цветов, с помощью которых можно раскрасить все ребра графа так, чтобы любым двум смежным ребрам сопоставленны разные цвета. *Общим тотальным хроматическим числом* графа называется наименьшее число различных цветов, с помощью которых можно одновременно раскрасить все вершины и ребра графа так, чтобы никакие соседние вершины, смежные ребра или инцидентные элементы графа не окрашивались в один и тот же цвет. Реберное хроматическое число и общее хроматическоечисло графа G обозначаются соответственно через $\chi'(G)$ и $\chi_0.(G)$.

Теорема 13. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, реберное и общее хроматические числа $\chi'(G)$ и $\chi_0(G)$ удовлетворяют следующим неравенствам*

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{2\log n}{n}\right) < \chi'(G) < \frac{n}{2}\left(1+3\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$$

и

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{2\log n}{n}\right) < \chi_0(G) < \frac{n}{2}\left(1+\frac{2\log\log n}{\log n}\right).$$

Доказательство. Нижняя оценка для $\chi'(G)$ вытекает из теорем 4, 7 и следующего соотношения (см. [6]) :

$$e(G) \leqslant \chi'(G) . \alpha'(G).$$

Верхняя оценка получается с помощью теоремы 8 и следующего неравенства (см. [4]) :

$$\chi'(G) \leqslant \max_v \delta_G(v) + 1.$$

Применяя теорему 9 и соотношение

$$\chi'(G) \leqslant \chi_0(G) \leqslant \chi(G) + \chi'(G),$$

убеждаемся в справедливости теоремы относительно $\chi_0(G)$.

9. Покрытия множества вершин внутренне устойчивыми множествами графа.

В предыдущем пункте мы напомнили понятия покрытия множества, I_G — покрытия множество вершин графа G, и оценили сложность минимального I_G — покрытия для почти всех графов G с n вершинами. В этом пункте будем рассматривать так называемые неприводимые I_G — покрытия.

Пусть G — любой граф, множество всех вершин которого совпадает с заданным множеством $V(|V| = n)$ и $U \subseteq V$. *Неприводимым* I_G — *покрытием* множества U будем называть такое I_G — покрытие, что после выбрасывания любого его максимального внутренне устойчивого множества оно перестает быть покрытием для U.

Замечание. Для каждого максимального внутренне устойчивого множества B из неприводимого I_G — покрытия Σ множества U существует по крайней мере одна вершина $v \in U$, содержащаяся в B, но не содержащаяся ни в каком другом множестве из Σ. Поэтому $|\Sigma| \leqslant |U|$.

Обозначим $l_r(\Sigma) = |\Sigma|$, т.е. число максимальных внутренне устойчивых множеств из Σ, а через $l_r(G)$ обозначим максимум $l_r(\Sigma)$ по всем неприводимым I_G — покрытиям Σ множество V.

Пусть $B, W \subseteq V$. Множество B назовём *погруженным в множество* W, если все его вершины, за исключением, быть может, одной, принадлежат множеству W.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$IM_{k,v}(G,W)$ — число максимальных внутренне устойчивых множеств B мощности k для графа G, содержащих фиксированную вершину v и погруженных в W; при этом для каждого B множеству W принадлежат все вершины множества B, кроме, быть может, самой вершины v;

$\overline{IM_{k,v}(n,m)}$ — среднее значение $IM_{k,v}(G,W)$, когда (G,W) пробегает всё множество всех пар (G,W), где G — любой граф с n вершинами и W — любое подмножество m вершин множества V.

Тогда имеем

$$\overline{IM_{k,v}(n,m)} = \frac{C_{n-1}^{k-1}\, C_{n-k+1}^{m-k+1}}{2^{C_k^2}\, C_n^m}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}$$

и, следовательно при $k = [\log n + 5\log\log n]$,

$$\frac{C_{n-1}^{k-1}\, C_{n-k+1}^{m-k+1}}{2^{C_k^2}\, C_n^m}\left(1 - \frac{2}{k^5}\right) < \overline{IM_{k,v}(n,m)} < \frac{C_{n-1}^{k-1}\, C_{n-k+1}^{m-k+1}}{2^{C_k^2}\, C_n^m}. \qquad (3)$$

Обозначим через $T(G,W)$ множество вершин $v \in V$, удовлетворяющих следующему соотношению

$$\left| IM_{k,v}(G,W) - \overline{IM_{k,v}(n,m)} \right| > \frac{1}{k} \overline{IM_{k,v}(n,m)}. \tag{4}$$

Тогда имеем следующий результат (см. [5]) :

Лемма 8. *Пусть n — достаточно большое натуральное число и $k = [\log n + 5\log\log n]$. Тогда, для почти всех графов G с n вершинами, в множестве V всех вершисnуществет подмножество W мощности $m = \left[\frac{n}{k} + k\right]$ такое, что соответст вующее множество T (G,W) содержит не более $\frac{n}{k^2}$ вершин.*

Теорема 14. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число l_r (G) удовлетворяет следующим неравенствам*

$$n\left(1 - \frac{4}{\log n}\right) < l_r(G) \leqslant n.$$

Доказательство. Верхняя оценка немедленно вытекает из предыдущего замечания.

Будем рассматривать те графы (с n вершинами), на которые распространяются теорема I и лемма 7. Доля остальных графов, очевидно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Чтобы получить нижнюю оценку чиска l_r (G) мы докажем, что для каждого рассматриваемого графа G существует неприводимое I_G — покрытие множества V, содержащее более $n\left(1 - \frac{4}{\log n}\right)$ максимальных внутренне устойчивых множеств.

Для графа G, по лемме 8, в множестве V существует подмножество W мощности $m = \left[\frac{n}{k} + k\right]$ такое, что мощность множества $T(G,W)$ вершин из V, удовлетворяющих соотношению (4), не превосходит $\frac{n}{k^2}$. Из определений множества $T(G,W)$ и числа $IM_{k,v}(G,W)$ следует, что при достаточно больших n каждую вершину множества $V \setminus T(G,W)$ можно покрыть максимальным внутренне устойчивым множеством графа G, погруженным в W. В самом деле, для всякой вершины v из $V \setminus T(G,W)$ число $IM_{k,v}(G,W) > \left(1 - \frac{1}{k}\right) \overline{IM_{k,v}(n,m)}$, а последнее больше единицы, если n достаточно велико.

Теперь переходим к построению неприводимого I_G — покрытие множества V. Пусть Σ_1 — какой-нибудь неприводимое I_G — покрытие множества $T(G,W)$, а $[\Sigma_1]$ — множество вершин из V, покрытых множествами из Σ_1. Пусть, далее, Σ_2 — неприводимое I_G — покрытие множества $W \setminus [\Sigma_1]$, образованное максимальными внутренне устойчивыми множествами графа G, погруженными в W а $[\Sigma_2]$ —

множество вершин из V, покрытых множествами из Σ_2. Станем покрывать множества $V' \doteq V \setminus ([\Sigma_1] \cup [\Sigma_2])$ максимальными внутренне устойчивыми множествами мощности k, погруженными в W. Для покрытия вершины $v \in V'$, очевидно, имеем $IM_{k,v}(G,W)$ возможностей. Пусть Σ_3 — множество, образованное взятием для каждой вершины $v \in V'$ ровно одного из $IM_{k,v}(G,W)$ максимальных внутренне устойчивых множеств. Тогда очевидно, что множество $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ является I_G — покрытием множества V. Для получения неприводимого I_G — покрытия потребуется удалить если нужно, некоторые максимальные внутренне устойчивые множества из Σ. При этом ни одно множество из Σ_3 не будет удалено, так как в каждом множестве из Σ_3 имеется вершина (вершина множества V'), покрываемая только им одним. Поэтому число максимальных внутренне устойчивых множеств полученного I_G — покрытия множества V не меньше $|\Sigma_3|$, а это в свою очередь равно $|V'|$.

Оценим снизу $|V'|$. По теореме I, мощность всякого максимального внутренне устойчивого множества графа G не превышает $[2\log n - 1]$, то

$$|[\Sigma_1]| \leqslant [2\log n - 1] \cdot |\Sigma_1| < 2\log n\, |T(G,W)| < 2\log n \frac{n}{k^2} < \frac{2n}{\log n}.$$

Имеем ещё

$$|[\Sigma_2]| < 2\,|W| = 2\left[\frac{n}{k} + k\right] < \frac{2n}{\log n},$$

так как число множеств в неприводимом I_G — покрытии множества $W \setminus [\Sigma_1]$ не превосходит $|W|$, а каждое множество, погруженное в W, содержит не более одной вершины множества $V \setminus W$. Итак, получаем

$$l_r(G) \geqslant |\Sigma_3| = |V'| \geqslant |V| \setminus (|[\Sigma_1]| + |[\Sigma_2]|) > n - \frac{4n}{\log n},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 15. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, существует более*

$$n^{\frac{n}{2}\log n\,(1-\varepsilon_n)} \qquad (\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty)$$

неприводимых I_G — покрытий множества вершин, содержащих более $n\left(1 - \frac{4}{\log n}\right)$ максимальных внутренне устойчивых множеств.

Доказательство. Докажем теорему для тех графов G, какие мы рассматривали при доказательстве предыдущей теоремы. Мы видели, что выбор множества Σ_3 можно осуществить $\prod_{v \in V'} IM_{k,v}(G, W)$ способами, а различным множествам Σ_3 отвечают различные неприводимые I_G — покрытия множества V, удовлетворяющие условию теоремы. Используя соотношение (3) и неравенство

$$IM_{k,v}(G,W) > \left(1-\frac{1}{k}\right)\overline{IM_{k,v}(n,\ m)}$$

при $k = [\log n + 5\log\log n]$ и $m = \left[\frac{n}{k} + k\right]$, оценим число множеств Σ_3

$$\prod_{v\in V'} IM_{k,v}(G,\ W) > \prod_{v\in V'} \overline{IM_{k,v}(n,m)}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) >$$

$$> \left\{\frac{C_{n-1}^{k-1}\ C_{n-k+1}^{m-k+1}}{2^{C_k^2}\ C_n^m}\left(1-\frac{2}{k^5}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)\right\}^{n\left(1-\frac{4}{\log n}\right)} >$$

$$> n^{\frac{n}{2}\log n\,(1-\varepsilon_n)},$$

где $\varepsilon_n < \dfrac{5\log\log n}{\log n}$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 16. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $r(G)$ неприводимых I_G— покрытий множества вершин удовлетворяет неравенству*

$$r(G) < n^{\frac{n}{2}\log n\,(1+\varepsilon_n)},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство: Будем расматривать те графы G, на которые распространяются теоремы 3 и 14. Очевидно, что доля остальных графов стремится к нулю при $n \to \infty$. Ясно, что

$$r(G) \leqslant \sum_{i=1}^{l_r(G)} C^i_{IM(G)} < n\,C^n_{IM(G)} < (IM(G))^n < n^{\frac{n}{2}\log n\,(1+\varepsilon_n)},$$

где $\varepsilon_n < \dfrac{3\log\log n}{\log n}$. Теорема доказана.

Из теоремы 15 и 16 следует:

Теорема 17. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $r(G)$ неприводимых I_G— покрытий множества всех вершин удовлетворяет следующим неравенствам*

$$n^{\frac{n}{2}\log n\,(1-\varepsilon_n)} < r(G) < n^{\frac{n}{2}\log n\,(1+\varepsilon'_n)},$$

где $\lim \varepsilon_n = \lim \varepsilon_n' = 0,\ n \to \infty.$

Обозначим через $r^{l-}(G)$ число неприводимых I_G — покрытий множества всех вершин графа G, содержащих не более l максимальных внутренне устойчивых множеств.

Следствие. *Пусть* $l = n\left(1 - \frac{1}{\log\log n}\right)$. *Тогда при достаточно больших* n, *для почти всех графов* G *с* n *вершинами*

$$r^{l-}(G) = o\big(r(G)\big)$$

Доказательство. Используя метод нахождения верхней оценки дли $r(G)$, можно получить верхнюю оценку числа $r^{l-}(G)$. Тогда доказательство следствия вытекает из предыдущей теоремы.

Как мы заметили в предыдущем пункте, что для каждого графа G число максимальных внутренне устойчивых множеств во всяком минимальном I_G — покрытии множества всех вершин равно хроматическому числу $\chi(G)$, а это число, по теореме 9, почти всегда меньше чем $\frac{\log\log n}{\log n}n$. Тогда, совершенно аналогично доказательству теоремы 16, имеем

Теорема 18. *При достаточно больших* n, *для почти всех графов* G *с* n *вершинами, число* $m(G)$ *минимальных* I_G *— покрытий множества всех вершин удовлетворяет следующему неравенству*

$$m(G) < n^{\frac{n}{4}\log\log n\,(1+\varepsilon''_n)}$$

где $\varepsilon''_n \to 0$ *при* $\to \infty$.

Из теорем 17 и 18 немедленно вытекает

Следствие. *При достаточно больших* n, *для почти всех графов* G *с* n *вершинами выполняется неравенство*

$$\frac{m(G)}{r(G)} < n^{\frac{n}{3}\log n}.$$

10. Полные подграфы графа.

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соседние, т.е. соединены ребром графа. Полный подграф графа G, не содержащийся ни в каком большем полном подграфе графа G, называемся *максимальным*. Множество всех вершин (максимального) полного подграфа графа G называется *(максимальной) кликой* графа G. Очевидно, что всякий полный подграф графа G полностью определен соответствующей кликой в G.

Как и выше, каждый граф G задается в виде $G=(V, \widetilde{G})$, где V — множество вершин, а $\widetilde{G}$ — множество ребер графа. Полный граф обозначаем через $K=(V, \widetilde{K})$.

Заметим, что если подмножество $B \subset V$ есть (максимальное) внутренне устойчивое множество графа $G=(V, \widetilde{G})$ то оно является (максимальной) кликой графа $\overline{G}=(V, \widetilde{K} \setminus \widetilde{G})$ т.е. существует в графе $\overline{G}$ (максимальный) полный граф, множество вершин которого совпадает с B. Тогда по теоремам 1, 2 и 3 получим следующие результаты.

Теорема 19. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами*

1) Число вершин всякого полного подграфа в G меньше чем $2\log n$;

2) Число $K(G)$ всех полных подграфов и число $KM(G)$ максимальных полных подграфов в G удовлетворяют неравенствам

$$n^{\frac{1}{2}\log n-\log\log n-1} < K(G) < n^{\frac{1}{2}\log n+\log\log n+2},$$

$$n^{\frac{1}{2}\log n-\log\log n-3} < KM(G) < n^{\frac{1}{2}\log n+\log\log n+2}.$$

Теперь рассмотрим некоторые параметры, связанные с покрытиями множества вершин кликами графа. Покрытие множества V, образованное максимальными кликами графа G, называется K_G — *покрытием* множества V. Неприводимое (минимальное) K_G — покрытие определяется совершенно аналогично определению неприводимого (минимального) I_G — покрытия.

Пусть $G=(V, \widetilde{G})$ и $H=(V, \widetilde{K} \setminus \widetilde{G})$. Тогда нетрудно видеть, что каждое неприводимое (минимальное) I_G — покрытие множества V является неприводимым (минимальным) K_H — покрытием множества V, и наоборот. Кроме того, число неприводимых (минимальных) I_G — покрытий множества V равно числу неприводимых (минимальных) K_H — покрытий того же множества. Поэтому, полученные результаты относительно I_G — покрытий (теоремы 12, 14 — 18 и их следствия) верны и здесь относительно K_H — покрытий. В частности, справедливы следующие теоремы :

Теорема 20. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $L_m(G)$ максимальных клик в любом минимальном K_G — покрытий множества всех вершин удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{n}{2\log n} < L_m(G) < \frac{\log\log n}{2\log n}\, n,$$

а наибольшее число $L_r(G)$ максимальных клик в неприводимом K_G — покрытии удовлетворяет следующим неравенствам

$$n\left(1-\frac{4}{\log n}\right) < L_r(G) \leqslant n.$$

Теорема 21. *При достаточно больших n, для почти всех графов G с n вершинами, число $R(G)$ всех неприводимых K_G — покрытий множества вершин удовлетворяет неравенствам*

$$n^{\frac{n}{2}\log n\,(1-\varepsilon_n)} < R(G) < n^{\frac{n}{2}\log n\,(1+\varepsilon'_n)},$$

а число минимальных K_G — покрытий меньше чем

$$n^{\frac{n}{4}\log\log n\,(1+\varepsilon''_n)}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon'_n = \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon''_n = 0.$

11. Некоторые применения.

В этом последнем пункте изложены два применения полученных выше результатов Одно из них есть применение к минимизации числа состояний для не всюду определенных конечных автоматов, а другое — применение в определении вычислительной сложности для широкого круга комбинаторных проблем.

А. Первое применение. Напомним необходимые понятия из теории автоматов. *Конечный автомат* A задается следующей пятеркой

$$A = (X, Y, S, \delta, \lambda)$$

где X — конечный алфавит входных символов,

Y — конечный алфавит выходных символов,

S — конечное множество состояний,

δ — функция переходов, т.е. функция из $S \times X$ в S,

λ — функция выходов, т.е. функция из $S \times X$ в Y.

Если функции б и λ определены на всем $S \times X$, то автомат A называется *всюду определенным* ; в противном случае A называется *не всюду определенным автоматом*.

Функции б и λ можно доопределить для того случая, когда вместо $S \times X$ взято $S \times X^+$, где X^+ — множество непустых слов над алфавитом X. Именно, для $s \in S$, $x \in X$, $ux \in X^+$ определим

$$\delta(s,ux) = \delta(\delta(s,u),x),$$
$$\lambda(s,ux) = \lambda(\delta(s,u),x),$$

Два состояния $s, s' \in S$ называются *сравнимыми состояниями* автомата A, если для каждого слова $x_1x_2 \ldots x_k \in X^+$, либо оба $\lambda(s, x_1x_2 \ldots x_i)$ и $\lambda(s, x_1x_2 \ldots x_i)$ определены и, равны $\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant k$, либо хотя бы одна из них не определено при некотором $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Таким образом, на множестве S определно бинарное отношение, так называемое *отношением сравнимости состояний* для автомата A. Это отношение всегда является рефлексивным и симметричным отнощением. Оно является отнощением эквивалентности в том и только в том случае, когда A есть всюду определенный автомат.

Подмножество $C \subseteq S$ называется *сравнимым множеством* автомата A, если любые два состояния из C сравнимы. Сравнимое множество автомата A, не содержащееся ни в каком большем сравнимом множестве для A, называется *максимальным*.

Пусть $A = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ — заданный конечный автомат и $Q \subseteq S$. *Подавтоматом* A_Q автомата A называется

$$A_Q = (X, Y, Q, \delta_Q, \lambda_Q),$$

где

$$\delta_Q(s,x) = \begin{cases} \delta(s,x), \text{ если } \delta(s,x) \in Q; \\ \text{не определено, в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\lambda_Q(s,x) = \lambda(sx),$$

для всех $s \in Q$ и $x \in X$.

Мы говорим, что автомат $A' = (X, Y, S', \delta', \lambda')$ *реализует* автомат A, если для любого $s \in S$ существует такое состояние $s' \in S'$, что для каждого слова $u \in X^+$, если $\lambda(s,u)$ определно, то $\lambda'(s',u)$ тоже определено и $\lambda'(s',u) = \lambda(s,u)$.

Автомат A' называется *приведенной формой* автомата A, если A' реализует A и не имеет собственного подавтомата, реальзующего A. Автомат A' называется *минимальной формой* автомата A, если A' реализует A и не существует автомата с меньшим числом состояний, реализующего A.

Рассмотрим теперь задачу минимизации числа состояний для конечных автоматоı, т.е. задачу построения минимальной формы данного автомата. Для всюду определенных автоматов эта задача была решена простым алгоритмом. Однако, для не всюду определенных атоматов задача совсем не проста. Но этот вопрос имеет большое практическое зналение, и поэтому, занимает многих авторов. В настоящее время известно несколько алгоритмов минимизации числа состояний для не всюду определенных автоматов. Эти алгоритмы в том или ином виде имеют следующую схему :

а) С помощью функции переходов и функции выходов данного авотомата A выделяются все максимальные сравнимые множества состонияй автомата ;

б) На основе максимальных сравнимых множеств состояний строятся все приведенные формы автомата A ;

в) Находятся минимальные формы автомата A среди его приведенных форм.

Ниже мы оценим сложность таких алгоритмов, используя полученные оценки параметров конечных графов, и увидим тогда, что эти алгоритмы почти всегда не эффективны.

Пусть G — конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Тогда G единственно представим в виде $G=(V, E)$, где V — множество вершин, а E — бинарное рефлексивное симметричное отношение на множестве V такое, что для любых двух (необязательно различных) вершин v и w $v\ E\ w$ в том и только в том случае, когда в G не имеется ребро, соединяющее v и w (поскольку G не имеет петель, то $v\ E\ v$ для каждого $v \in V$). Граф G, очевидно, полностью определен отношением E на множестве своих вершин.

Таким образом, для конечного автомата функция переходов и функция выходов индукцируют на множестве состояний отношение сравнимости, а это отношение в свою очередь определяет неориентированный граф (без петель и кратных ребер), множество вершин которого совпадает со множеством состояний автомата. Следующая теорема дает нам обратное соответствие.

Теорема 22. *Пусть $G=(V,E)$ — коненый неориентированный граф без петель и кратных ребер. Тогда можно построить конечный автомат*

$$A=(X,\ Y,\ S,\ \delta,\ \lambda)$$

такой, что отношение E является отношением сравнимости состояний автомата A.

Доказательство. Возьмём $X=S=V$ и $Y=\{0,1\}$, а функции δ и λ определим так:

$$\delta(s,\ x)=s,$$

$$\lambda(s,x)=\begin{cases}1, \text{ если } s=x,\\ \text{о, если } s\ \overline{E}\ x \text{ (не } s\ E\ x)\\ \text{не определено в остальных случаях.}\end{cases}$$

Заметим, что состояния s и t сравнимы в том и только в том случае, когда для любого $x \in X$, либо оба $\lambda(s,\ x)$ и $\lambda(t,\ x)$ определены и равны, либо хотя бы одно из них не определено.

Предположим, что $s\ E\ t$. Если $s=t$, то, очевидно, s и t сравнимы. В случае $s \neq t$, по определению λ, для каждого $x \in X=S$ имеем:

а) если $x=s$ или $x=t$, то одно из $\lambda(t,\ x)$ и $\lambda(s,\ x)$ равно 1, а другое не определено,

б) если $x \neq s,\ t$, то каждое из $\lambda(s,\ x)$ и $\lambda(t,\ x)$ либо равно О, либо не определено.

Тем самым показано, что состояния s и t сравнимы.

Предположим теперь, что $s\ \overline{E}\ t$. Тогда $\lambda(s,\ t)=0$ и $\lambda(t,\ t)=1$. Следовательно, s и t не сравнимы. Теорема доказана.

Благодаря установленному соответствию мы предположим, что вероятность того, что отношение сравнимости состояний данного автомата совпадает с отношением E данного графа G, одинакова для всех графов G с n вершинами, т.е. равна $2^{-C_n^2}$. Это предположение оказалость весьма правдаподовным.

По определению отношения E графа $G=(V,\ E)$, каждое подмножество $V \subseteq V$ такое, что $v\ E\ w$ для любых двух вершин $v,\ w \in V$, является внутренне устойчивым графа G и обратно. Поэтому, и в силу сделенного предположения, задача нахождения всех максимальных сравнимых множеств данного автомата сводится к нахождению всех максимальных внутренне устойчивых множеств некоторого графа ; построение приведенных (минимальных) форм автомата сводится к построению неприводимых (минимальных) покрытий множества всех вершин максимальными внутренне устойчивыми множествами графа. При этом, число максимальных сравнимых множеств данного автомата равно числу максимальных внутренно устойчивых множеств соответствующего графа ; число приведенных (минимальных) форм равно числу неприводимых (минимальных) покрытий ; и, кроме того, число состояний в приведенной (минимальной) форме равно числу максимальных внутренне устойчивых множеств в соответствующем неприводимом (минимальном) покрытии.

Тогда, используя полученные выше результаты, получим следующие оценки, связанные с минимизацией числа состояний для не всюду определенных конечных автоматов.

Так как число максимальных внутренне устойчивых множеств в каждом минимальном покрытии множества вершин графа равно его хроматическому числу, то теорема 12 показывает, что *при достаточно больших n, для почти всех автоматов A с n состояниями, число $l_m(A)$ состояний в каждой минимальный форме удовлетворяет следующим неравенствам*

$$\frac{n}{2\log n} < l_m(A) < \frac{\log\log n}{2\log n}\, n.$$

Верхняя оценка важна тем, что почти всегда $l_m(A)$ имеет более низкий порядок роста чем число n (число состояний данного автомата). Именно по этой причине минимизация числа состояний для конечных автоматов и представляет интерес. Вместе с тем $l_m(A)$ достаточно велико, поэтому тривиальный алгоритм минимизации, состоящий в переборе всех автоматов с числом состояний, равным 1, 2, 3, и т.д., пока не встречится автомат, реализующий данный автомат, требует большого числа переборов. Но, в силу нижней оценки для $l_m(A)$ видно, что нам нужно перебрать только те автоматы, число состояний которых больше чем $\frac{n}{2\log n}$. Следовательно, этот алгоритм станет нетривиальным.

Из теоремы 14 следует, что у почти всех автоматов число состояний приведенной формы может оказаться асимптотически таким же, как число состояний данного автомата. Таким образом, построение приведенных форм фактически не дает упрощения. Более того, как показывает следствие теоремы 17, *подавляющая часть приведенных форм автомата имеет число состояний, асимптотически равное числу состояний данного автомата.*

Наконец, оценим сложность известных алгоритмов построения минимальных форм не всюду определенных автоматов. Теоремы 3, 17 и 18 позволяют нам утверждать, что *при достаточно больших n, для почти всех автоматов A с n состояниями, число $cm(A)$ максимальных сравнимых множеств состояний удовлетворяет неравенствам*

$$n^{\frac{1}{2}\log n-\log\log n-3} < cm(A) < n^{\frac{1}{2}\log n+\log\log n+1},$$

а число $r(A)$ приведенных форм и число $m(A)$ минимальных форм автомата A удовлетворяют следующим неравенствам

$$n^{\frac{n}{2}\log n(1-\varepsilon_n)} < r(A) < n^{\frac{n}{2}\log n(1+\varepsilon'_n)}$$

и

$$m(A) < n^{\frac{n}{4}\log\log n(1+\varepsilon''_n)},$$

где $\lim\varepsilon_n = \lim\varepsilon'_n \lim\varepsilon''_n = 0$, $n\to\infty$. В этом и заключается трудность нахождения минимальных форм автомата среди его приведенных форм. Далее, как показывает следствие теоремы 18, вероятность появления одной минимальной формы автомата с n состояниями почти всегда меньше чем $n^{-\frac{n}{3}\log n}$.

Таким образом завершается оценка сложности упомянутых выще алгоритмов минимизации числа состояний для почти всех конечных автоматов.

Б. Второе применение. Рассмотрим проблему определения вычислительной сложности для комбинаторных задач. Как известно, очень много комбинаторных задач, в том числе и задачи теории графов : нахождение максимального внутренне устойчивого множества и минимального внешне устойчивого множества, или определение хроматического числа графа, и.т.д., решается только по сложным алгоритмам. С точки зрения теории вычислительных сложностей, для решения этих задач по недавно известным алгоритмам требуется показательное время, т.е. время для решения вычисляется показательной функцией от количества данных. Известно, что несколько задач теории графов решено в полиномиальное время недетерминированными автоматами (машинами), т.е. принадлежит классу NP ; кроме того, если какая-то задача из них может решена в полиномиальное время детерминированным автоматом, то таким же будут решены и все задачи класса NP. Заметим, что задачи утверждения : имеет ли конечный граф внутренне устойчивое множество данной мощности, хроматическое число данного графа меньше данного числа или нет, и т.д., принадлежат классу NP.

В пункте 2 мы показали, что число внутренне (внешне) устойчивых множеств графа с n вершинами имеет порядок роста примерно $n^{\frac{1}{2}\log n}$ для почти всех таких графов, когда n достаточно велико. Следовательно, всякий алгоритм нахождения всех внутренне (внешне) устойчивых множеств должен выполниться во время, не меньшее чем $n^{\frac{1}{2}\log n}$ т.е. не может выполниться в полиномиальное время. Этот факт позволяет нам делать следующие предположения :

1. Каждая задача в классе NP не может решаться в полиномиальное время детерминированным автоматом. Всякий алгоритм решения такой задачи выполняется во время, не меньшее чем $n^{\alpha \log n}$, где α — некоторая положительная константа, а n — большое количество данных для данной задачи.

2. Каждая задача в классе NP может решаться во время $n^{\log^{\beta} n}$ детерминированным автоматом, где β — некоторая положительная константа. Заметим, что $n^{\log^{\beta} n}$ имеет более низкий порядок роста чем 2^n при достаточно больших n.

Поступило в Редакцию 18-VI-1977

ЛИТЕРАТУРА

1. BERGE C. *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 1967.

2. PHAN ĐINH DIEU. *On the Complexity of the Problem of State Minimization for Imcompletely Speeified Sequential Automata*, EIK 11 (1975) 1/2, 3 — 17.

3. PHAN ĐINH DIEU. *Asymptotical Estimation of Some Characteristics of Finite Graphs*, Revue Française AIRO, Section Informatique Theorique, N° 2, 1977.

4. *ВИЗИНГ. В.Г. Об оценке хроматического класса p-графа*, Сб. „Дискретный анализ", Вып. 3, Новосибирск, ИМ СО АН СССР 1964, 25 — 30

5. *ЛЕ КОНГ ТХАНЬ, Оценки некоторых параметров конечных графов и приложение.* EIK 13 (1977) 10, 505—521.

6. *ЛЕ КОНГ ТХАНЬ. Асимптотические оценки некоторых параметров конечных графов* EIK (в печати).