ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 3, № 1 (1978)

О РО ТКАХ БЕСКОНЕЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

HÀ HUY VUI, NGUYỄN TỰ CƯỜNG, NGUYỄN SĨ MINH, NGUYỄN HỮU ĐỨC

Институт Математики

§ 0. Обозначим через $\mathcal{E}_n$ кольцо всех ростков в $0 \in \mathfrak{R}^n$ функций класса C^∞, через $\mathfrak{m}_n = (x_1, \dots, x_n)$ — максимальный идеал, порожденный $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}_n$. Для $k \leqslant \infty$ через $j^k(f)(0)$ обозначается k — струя элемента $f \in \mathcal{E}_n$. Через G обозначим группу ростков в $0 \in \mathfrak{R}^n$ бесконечно дифференцируемых локальных диффеоморфизмов

$$\varphi : (\mathfrak{R}^n; 0) \to (\mathfrak{R}^n; 0)$$

Определение 1. ([1],[2])

а) Элемент $f \in \mathcal{E}_n$ называется k — определенным относительно G, если из $g \in \mathcal{E}_n$, $j^k(f)(0) = j^k(g)(0)$ следует существование $\varphi \in G$ так, чтобы выполнилось следующее $f = g_0\varphi$.

б) Если $f \in \mathcal{E}_n$ и f является k — определенным для некоторого $k < \infty$, то оворим, что f конечно-определен относительно G.

Следуя [3], введем следующее

Определение 2.

Элемент $f \in \mathcal{E}_n$ называется бесконечно - определенным (обозначение : ∞ — определенность) относительно G, если из того, что $g \in \mathcal{E}_n$ и $j^\infty(f)(0) = j^\infty(g)(0)$, следует существование $\varphi \in G$ так, чтобы выполнилось $f = g^0\varphi$.

Известно, что

Теорема 0. ([1], след. 11, стр. 113)

а) Если $f \in \mathfrak{m}_n$ и $\mathfrak{m}_n \Delta(f) \supset \mathfrak{m}_n^k$ (i)

то f является k — определенным относительно G

б) Если f является k — определенным относительно G то

$\mathfrak{m}_n \Delta(f) \supset \mathfrak{m}_n^{k+1}$ (ii)

где через $\Delta(f)$ обозначается идеал Якобиян $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Замечание 1. Из ([2]), стр. 56) известно, что ни одно из двух условий (i), (ii) не является одновременно необходимым и достаточным условием для k — определенности ростка f.

В этой работе мы дадим различные условия, одновременно являющиеся необходимым и достаточным для ∞ — определенности. Один из них получится «сливанием» Условий (i) и (ii) при «бесконечной форме». Кроме того, будут обнаружены довольно неожидальные, на наш взгляд, связи между ∞ — определенностью и другими понятями, рассмотренными многими авторами. Далее, докажем теорему, показывающую, что класс ∞ — определенных ростков строго шире класса конечно определенных ростков.

Авторы выражают благодарность A. Chenciner и Lê Dũng Trang за обсуждение результатов этой работы.

§ 1

Определение 3. ([4], стр. 254)

а) Элемент $f \in \mathscr{E}_n$ называется v — достаточным, если росток множества $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathfrak{R}^n, 0)$ имеет одинаковый топологический тип с ростком множества $(g^{-1}(0), 0) \subset (\mathfrak{R}^n, 0$ всякий раз, когда $g \in \mathscr{E}_n$ и $j^\infty(f)(0) = j^\infty(g)(0)$

б) Если существует $k < \infty$ такое, что, если из $g \in \mathscr{E}_n$, $j^k(f)(0) = j^k(g)(0)$ следует, что ростки множеств $(f^{-1}(0), 0)$ и $(g^{-1}(0), 0)$ имеют одинаковый топологический тип, то мы говорим, что f является конечно v — достаточным.

Определение 4. ([4], стр. 254)

а) Элемент $f \in \mathscr{E}n$ называется C^0 — достаточным, если из того, что $g \in \mathscr{E}n$ и $j^\infty(f)(0) = j^\infty(g)(0)$ следует существование локального гомеоморфизма

$$\varphi : (|\mathcal{R}n, 0) \to (|\mathcal{R}^n, 0)$$

так, чтобы $f = g^0 \varphi$

б) Если существует $k < \infty$ такое, что, если из $g \in \mathscr{E}n$, $j^k(g)(0) = j^k(f)(0)$ следует существование локального гомеоморфизма

$$\varphi : (\mathfrak{R}^n, 0) \to (\mathfrak{R}^n, 0)$$

так, чтобы $f = g^0 \varphi$

Теперь, сформулируем и докажем

Теорема 1. Если $f \in \mathcal{E}_n$, то следующие 9 условий эквивалентны

1) f — ∞ — определенный относительно G

2) f — v — достаточный

3) f — C^0 — достаточный

4) f — конечно v — достаточный

5) f — конечно C^0 — достаточный

6) Существуют окрестность U точки $0 \in \mathfrak{R}^n$ и положительные постоянные c, α, для которых выполняется неравенство

$$|\operatorname{grad} f(x)| \geqslant c\,|x|^{\alpha} \qquad \forall\, x \in U$$

7) $\mathrm{m}_n^{\infty} \subset \Delta(f)$

8) $\Delta(f + \varphi) = \Delta(f)$ для всех $p \in \mathrm{m}_n^{\infty}$

9) фактор кольцо $\mathcal{E}n/\Delta(f)$ является нетеровым где, через m_n^{∞} обозначается идеал плостких ростков из $\mathcal{E}_n$

Замечание 2. Условие 7) является аналогией условий (i) и (ii) теоремы О в «бесконечной форме».

Доказательство теоремы I.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна из определений.

Из ([4], часть В, стр. 255) имеем

2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5) $\Leftrightarrow$ 6)

Справедливость импликации 6) $\Rightarrow$ 7) вытекает из одного результа Tougeron ([5], предложение 4,3, стр. 102)

Доказательство 7) $\Rightarrow$ I)

Пусть $f \in \mathcal{E}_n$, $\mathrm{m}_n^{\infty} \subset \Delta(f)$ требуется доказать, что f ∞ — определен относительно G.

Возьмём $g \in \mathcal{E}_n$, $j^{\infty}(f)(0) = j^{\infty}(g)(0)$, должны доказать, что g принадлежит орбите элемента f под действием группы G.

Видим, что $p(x) = g - f \in \mathrm{m}_n^{\infty}$

Построим семейство ростков $f_t = f + t\,p$, $t \in [0,1]$ тогда $f_0 = f$, $f_1 = g$, докажем, что все f_t лежат на одной орбите группы G. Воспользуясь предложением 2.2. из ([2], стр. 16), для этого достаточно доказать, что $\mathrm{p} \in \mathrm{m}_n\,\Delta(f + tp)\ \forall\ t \in [0,1]$ а это, в свою очередь, будет доказано, если докажем, что

$$\mathrm{m}_n\,\Delta(f + tp) \supset \mathrm{m}_n^{\infty}. \tag{1}$$

Рассмотрим — $|\operatorname{grad}(f(x) + tp(x))|^2 = |\operatorname{grad} f(x)|^2 + 2t(\operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} p(x)) + t^2\,|\operatorname{grad} p(x)|^2$

По доказанному из $\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f)$ вытекает существование окрестность U точки $0 \in \mathcal{R}^n$ и числа $c, \alpha > 0$ такие, что

$$| \operatorname{grad} f(x) |^2 \geqslant c\, | x |^\alpha \quad \forall x \in U \tag{2}$$

С другой стороны, т.к. $p \in \mathfrak{m}_n^\infty$, то

$$\phi_1(x) = (\operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} p(x)) \in \mathfrak{m}_n^\infty$$

и

$$\phi_2(x) = | \operatorname{grad} p(x) |^2 \in \mathfrak{m}_n^\infty$$

Из свойств функций из $\mathfrak{m}_n^\infty$ вытекает существовзания окрестности U' точки $0 \in \mathcal{R}^n$, для которой справедливо следующее :

$$| \phi_1(x) | \leqslant \frac{c}{8}\, | x |^\alpha \qquad \forall x \in U' \tag{3}$$

$$| \phi_2(x) | \leqslant \frac{c}{4}\, | x |^\alpha \qquad \forall x \in U' \tag{4}$$

где c, α такие, как в (2)

Из (2), (3), (4) имеем

$$| \operatorname{grad} [f(x) + tp(x)] |^2 \geqslant | \operatorname{grad} f(x) |^2 - 2\, | \phi_1(x) | - | \phi_2(x) |$$

Итак, $\forall x \in U_0 = U \cap U'$, $\forall t \in [0,1]$, имеем :

$$| \operatorname{grad} [f(x) + tp(x)] |^2 \geqslant c\, | x |^\alpha - \frac{c}{4}\, | x |^\alpha - \frac{c}{4}\, | x |^\alpha = \frac{c}{2}\, | x |^\alpha$$

Последнее неравенство вместе с доказанным соотношением 6) $\Leftrightarrow$ 7) влечёт за собой

$$\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f + tp) \tag{6}$$

Соотношение (6) влечёт (1), т.к. хорошо (см. [5]) известно что $\mathfrak{m}_n\ \mathfrak{m}_n^\infty = \mathfrak{m}_n^\infty$

Итак (1), и поэтому импликация 7) $\rightarrow$ 1) доказана.

Доказательство 7) $\Rightarrow$ 8)

Пусть $\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f)$, требуется доказать, что

$$\Delta(f + p) = \Delta(f) \qquad \forall p \in \mathfrak{m}_n^\infty$$

Действительно, если $p \in \mathfrak{m}_n^\infty$, то $\dfrac{\partial p}{\partial x_i} \in \mathfrak{m}_n^\infty$ $i = 1, \dots, n$

Поэтому, если $\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \in \Delta(f) \quad i = 1, \dots, n$$

Из этого следует $\Delta(f + p) \subset \Delta(f)$. Чтобы доказать обратное включение $\Delta(f) \subset \Delta(f + p)$, достаточно заметить, что если $\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f)$, то из 7) $\Leftrightarrow$ 1) следует, что

$$\mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta\ (f + p) \forall p \in \mathfrak{m}_n^\infty \text{ если } \mathfrak{m}_n^\infty \subset \Delta(f)$$

Тогда, рассуждая как выше, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \Delta(f+p) \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

т.е.

$$\Delta(f) \subset \Delta(f+p)$$

Импликация 7) $\Rightarrow$ 8) доказана.

Доказательство 8) $\Rightarrow$ 7)

Пусть $\Delta(f+p) = \Delta(f)\ \forall\ p \in m_n^\infty$, требуется доказать, что $m_n^\infty \subset \Delta(f)$

В самом деле, возьмём любое $p \in m_n^\infty$, покажем сейчас, что $p \in \Delta(f)$

Из того, что $\Delta(f + p) = \Delta(f)$
вытекает

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} \in \Delta(f)$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} \in \Delta(f) \tag{7}$$

Рассмотрим теперь идеал $\Delta(f + x_1 p)$. Т.к. $x_1 p \in m_n^\infty$ поэтому

$$\Delta(f + x_1 p) = \Delta(f)$$

Из того, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p + x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} \in \Delta(f) \tag{8}$$

из (7), (8), имеем $p \in \Delta(f)$. Импликация 8) $\Rightarrow$ 7) доказана.

Доказательство 7) $\Rightarrow$ 9)

Пусть $m_n^\infty \subset \Delta(f)$, требуется доказать, что $\mathscr{E}_n / \Delta(f)$
является нетеровым кольцом

Рассмотрим $\mathscr{E}_n / \Delta(f)$, т.к. $m_n^\infty \subset \Delta(f)$, то

$$\mathscr{E}_n / \Delta(f) = \mathscr{E}_n / m_n^\infty \Big/ \Delta(f) / m_n^\infty = \mathscr{E}_n / m_n^\infty \Big/ \Delta(f)$$

Видим, что $\mathscr{E}_n / m_n^\infty$ изоморно кольцу формальных рядов $\mathfrak{R}[[x_1, \ldots, x_2]]$, поэтому $\mathscr{E}_n / m_n^\infty$ нетерово. Тогда $\mathscr{E}_n / \Delta(f)$ нетерово как факторкольцо нетерова кольца.

Доказательство 9) $\Rightarrow$ 7)

Пусть $\mathscr{E}_n / \Delta(f)$ нетерово, докажем, что $m_n^\infty \subset \Delta(f)$ От противного, предположим, что $m_n^\infty \not\subset \Delta(f)$. Тогда рассмотрим идеал

$$\mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)} \qquad \subset \mathscr{E}_n\Big|_{\Delta(f)}$$

Видим, что

$$\mathfrak{m}_n\left(\mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)}\right) = \mathfrak{m}_n \cdot \mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)} = \mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)} \tag{9}$$

Из нетеровости $\mathscr{E}_n\Big|_{\Delta(f)}$ следует, что $\mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)}$ конечнопорожден, тогда из леммы Накаяма и соотношения (9) вытекает

$$\mathfrak{m}_n^{\infty} + \Delta(f)\Big|_{\Delta(f)} = 0$$

что противоречит $\mathfrak{m}_n^{\infty} \overline{\subset} \Delta(f)$

Теорема I польностью доказана.

Следствие I. Если $f \in \mathfrak{m}_n^{\infty}$ ∞ — определен относительно G то f имеет $0 \in \mathbb{R}^n$ изолированной критической точкой.

Доказательство. Пусть f ∞ — определен. Тогда из теоремы I следует, что

$$|\operatorname{grad} f(x)| \geqslant c\,|x|^{\alpha} \qquad \forall\, x \in U,\, c,\, \alpha > 0$$

а это показывает, что $0 \in \mathbb{R}^n$ является изолированной критической точкой для f.

Замечание 3.

Изолированность критической точки не является достаточным условием для ∞ — определенности, что показывает следующий простой пример

Положим $f(x, y) = y^2 + k(x, y)$

$$\text{где } k(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x \neq 0 \\ o & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

Тогда f имеет в $0 \in \mathbb{R}^n$ изолированную критическую точку, но f не является бесконечно определенным т.к. можно показать, что для такой f, условие 6) теоремы I не может быть выполненым.

Однако, имеет место следующее

Следствие 2. Если $f \in \mathfrak{m}_n^{\infty}$ и является ростком аналитической функции, то f является ∞ — определенным относительно G тогда и только тогда, когда f имеет в $0 \in \mathbb{R}^n$ изолированную критическую точку.

Доказательство.

Необходимость доказана в следствии I.

Достаточность следует из неравенства Lojasiewicz для аналитической функции $|\operatorname{grad} f(x)|^2$ и условия 6) теоремы I.

Прямо из определения следует, что любой конечно определенный росток будет ∞ — определенным. Верно ли обратное? Следующая теорема дает полный ответ на этот вопрос.

Теорема 2.

i) Если $n = 1$, то любой ∞ — определенный росток из $\mathcal{E}_1$ будет конечно определенным.

Если $n \geqslant 2$, то всегда существует росток $f \in \mathcal{E}n$ являющийся ∞ — определенным, но не конечно-определенным.

Доказательство

i) $n = 1$, пусть $f \in \mathfrak{m}_1$ является ∞ — определенным. Тогда очевидно $f \notin \mathfrak{m}^\infty$, т.е. существует $k < \infty$ такое, что

$$\frac{d^k f}{dx^k}(0) \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{d^j f}{dx^j}(0) = 0 \qquad \forall j = \overline{0, k-1}$$

Тогда $f \in \mathfrak{m}_1^k$ и $f(x) \notin \mathfrak{m}_1^{k+1}$

По лемме Hadamar, $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = x^k g(x); \qquad g(0) \neq 0$$

Вычислим

$$\Delta(f) = \left(kx^{k-1} g(x) + x^k g'(x)\right) = (x^{k-1}) = \mathfrak{m}_1^{k-1}$$

(т.к. $kg(x) + xg'(x)$ обратим в $\mathcal{E}_1$)

Тогда f является k — определенным по теореме О.

ii) пусть $n \geqslant 2$

Рассмотрим росток $f \in \mathcal{E}n$, представленный функцией

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2$$

Видим, что :

$$\sum \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\right]^2 = 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^3$$

Тогда $|\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n)| \geqslant 2(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{3/2}$

Поэтому, по теореме I, f является ∞ — определенным относительно G.

Докажем теперь, росток f, определенный выше, не является k — определенным ни для одного $k < \infty$.

От противного, предположим, что существует $k < \infty$ что $f(x_1 \ldots, x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2$ является k — определенным. Тогда, из теоремы О, следует, что $\mathfrak{m}_n^k \subset \Delta(f) = \left(x_1(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \ldots, x_n(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\right) \subset (x_1^2 + \ldots + x_n^2 = Q$

Видим, что $\mathcal{E}n \big/ \mathfrak{m}_n^\infty$ является нетеровым кольцом. Идеал $Q + \mathfrak{m}_n^\infty \big/ \mathfrak{m}_n^\infty$ является главным и его порождающий элемент не является делителем нуля, тогда по теореме Krull о размерности главных идеалов :

$$\dim Q + \mathfrak{m}_n^\infty \big/ \mathfrak{m}_n^\infty = \dim \mathcal{E}n \big/ \mathfrak{m}_n^\infty - 1 = n - 1$$

С другой стороны

$$\mathfrak{m}^k \big/ \mathfrak{m}_n^\infty \subset Q + \mathfrak{m}_n^\infty \big/ \mathfrak{m}_n^\infty$$

$$\text{поэтому } \dim Q + \mathfrak{m}_n^\infty / \mathfrak{m}_n^\infty \leqslant \dim \mathfrak{m}_n^k / \mathfrak{m}_n^\infty = 0$$

т.е. $n - 1 = 0$, что противоречит $n \geqslant 2$

Теорема 2 доказана.

Закончим эту работу одним вопросом. Хорошо известно (и прямо следует из определении), что если росток $f \in \mathscr{E}_n$ является конечно-определенным относительно G, то, путем бесконечно дифференцируемой замены координат в $(\mathfrak{R}^n, 0)$ можно сделать f полиномом. Если $f \in \mathscr{E}_n$ является бесконечно-определенным относительно G, то f польностью определится своим рядом Тейлора с точностью до элементов группы G.

Вопрос: Если f ∞ — определенный росток, тогда существует ли элемент $\varphi \in G$ такой, что $f \circ \varphi$ будет аналитической функцией?

Замечание 4. Пусть $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ — открытая окрестность точки $o \in \mathfrak{R}^n$ Обозначим через $\mathscr{E}_n(\Omega)$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций на Ω. Наделим $\mathscr{E}_n(\Omega)$ топологией Whitney.

Если предыдущий вопрос имеет положительный ответ, т.е. если существует $\varphi \in G$ такое, что $f \circ \varphi$ является аналитической функцией. Тогда φ индуцирует гомеоморфизм пространства $\mathscr{E}_n(\Omega) \to \mathscr{E}_n(\Omega)$, отсюда, по теореме Lojasiewicz о замкнутом идеале, получим, что идеал, порожденный ∞ — определенной функцией f будет замкнут в $\mathscr{E}_n(\Omega)$.

Последний результат, оказывается, справедлив, и имеет независимое доказательство.

Теорема 3. Пусть $f \in \mathscr{E}_n$ — ∞ — определенный росток относительно G.

Тогда, существует окрестность Ω точки $o \in \mathfrak{R}^n$ для которого идеал $(f)\ \mathscr{E}^n(\Omega)$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Теорема 3 вытекает из теоремы I и следствия 57 из([5], стр. 11)

Поступило в Редакцию 1-VI-1977г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A — CHENCINER. *Introduction à la thoérie des singularites des applications différentiables.* Hanoi, Septembre 1974.

[2] D. SIERSMA. *Classifications and deformations of Singularities 1974* (предпринт)

[3] Г. Р. БЕЛИЦКИЙ. Математический Сборник. т. 94. 3 (7) стр. 452 — 467

[4] J. BOCHNAK; LOJASIEWICZ. *A converse of the Kuiper - Kuo theorem.* Proceedings of Liverpool Singularities symposium I.

[5] J.C. TOUGERON. *Ideaux des fonctions différentiables.* Springer — Verlag — Berlin — Heidelberg