ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 3, N⁰ 1 (1978)

ФОРМУЛЫ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕТАМИ.

NGÔ VĂN LƯỢC
Институт Математики

В работах [1], [2], [3] установлены формулы суммарных представлений в прямоугольниках, полуполосах и полосах для уравнений в частных производных с переменным коэффициентом вида

$$\operatorname{div}(\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) - 2\delta\rho u = f(x, y),$$

где

$$\rho(x, y) = \omega_1^2(x) \cdot \omega_2^2(y),$$

$$\omega_\nu(t) = A_\nu t + B_\nu,$$

$$\omega_\mu(t) = A_\mu \operatorname{ch} \beta_\mu t + B_\mu \operatorname{sh} \beta_\mu t,$$

$$\omega_s(t) = A_s \cos \beta_s t + B_s \sin \beta_s t,$$

$$(\nu, \mu, s = 1,2)$$

и δ, A_1, A_2, B_1, B_2, β_1, β_2 — произвольные вещественные постоянные. В работе [4] эти формулы обобщены на случай, когда $\rho(x, y) = \omega^2(x, y)$, где $\omega(x, y)$ — циклическая функция.

Настоящая статья посвящена построению формул суммарных представлений в кольцевых секторах, кольцах и других круговых областях для уравнения с переменным коэффициентом вида

$$\operatorname{div}(r^{2\alpha} \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) - 2\delta r^{2(\alpha-1)} u = f(r, \theta), \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \tag{2}$$

где α и δ — произвольные вещественные числа. Далее, полученные формулы суммарных представлений использованы для чисгенноло решения некоторых неоднородных задач фильтрации

§ I. Построение формул суммарных представлений.

Рассмотрим сначала краевую задачу : Найти решение уравнения (1) в кольцевом секторе, удовлетворяющее краевому условию

$$u \mid_\Gamma = g(r, \theta), \tag{2}$$

где Γ — контур сектора (см. фиг.1).

Вводя обозначение

$$\rho(x,y) = r^{2\alpha} \tag{3}$$

перепишем уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{2\delta\rho}{r^2}\,u = f(r,\theta). \tag{4}$$

Заменой функции

$$v = \sqrt{\rho}\,u \tag{5}$$

приходим к уравнению

$$\Delta v - \left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{2\delta}{r^2}\right)v = \frac{f(r,\theta)}{\sqrt{\rho}}. \tag{6}$$

В рассмотренном случае легко видеть, что

$$\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\Delta\, v - 2\lambda\, r^{-2}\, v = r^{-2}\,\Phi\,(r,\,\theta), \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{2} + \delta \tag{8'}$$

и

$$\Phi\,(r,\,\theta) = \frac{f(r,\theta)}{r^{\alpha-2}}. \tag{8''}$$

Итак, заменой функции (5) мы приходим также к краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца (8) в таком же кольцевом секторе с краевым условием

$$v\,|_{\Gamma} = r^{\alpha}\,g\,(r,\theta). \tag{9}$$

Так как формулы суммарных представлений для таких задач (8) — (9) поставлены в работа [5], то отсюда мы непосредственно получаем соответственные формулы суммарных представлений для исходной задачи.

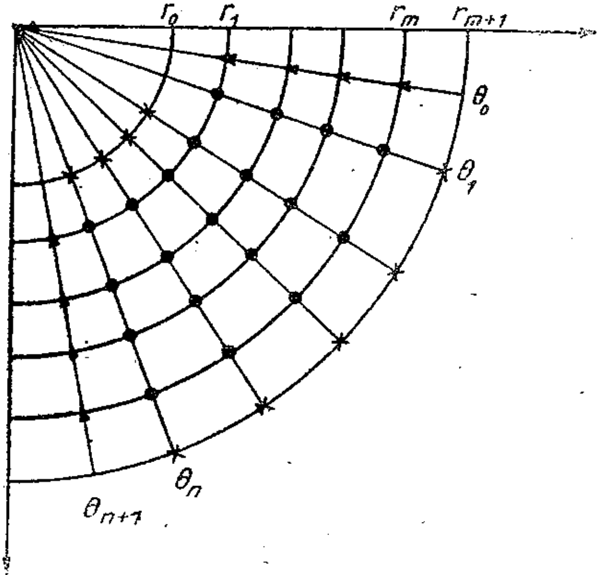
Действительно, пусть

$$\left.\begin{aligned} r_i &= r_0 + ih \\ \theta_k &= \theta_0 + kh_1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$(i = 0,1,2,\ldots,\, m+1,$

$k = 0,1,2,\ldots,\, n+1),$

$$\gamma = \frac{h}{h_1}. \tag{11}$$



фиг 1.

Обозначаем для любой дискретной функций $u\ (r_i,\ \theta_k)$

$$u_k(r_i) = u(r_i,\ \theta_k),$$
$$\vec{u}\,(r_i) = \{u_1(r_i),\ u_2\ (r_i),\ \ldots,\ u_n(r_i)\}.$$

Тогда согласно [5] формула суммарных представлений для задачи (8) — (9) в кольцевом секторе (10) имеет вид

$$\vec{v}\,(r_i) = P\,\{\Phi(i)\ \vec{A} + \psi\,(i)\,\vec{B} + \sum_{p=1}^{i-1} G(i-p)\ P\ [h^2\,\vec{\Phi}\,(r_p) - \gamma^2\,\vec{W}\,(r_p)]\}, \tag{12}$$

где

$$\vec{W}\,(r_i) = \{v_0(r_i),\ 0,\ldots,\ 0,\ v_{n+1}(r_i)\}, \tag{13}$$

P — квадратная матрица

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\ \left[\sin\ i\,\frac{k\pi}{n+1}\right]^n_{i,\ k=1}, \tag{14}$$

$\Phi\ (i)$, $\Psi(i)$, $G(i)$—диагональные матрицы с диагональными элементами соответственно $\varphi_k(r_i)$, $\psi_k(r_i)$ и $G_k(i)$, $k = 1,\ 2,\ldots,\ n$, которые зависят по таблице I от величины

$$\eta_k = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right). \tag{15}$$

Таб. I

	$\varphi_k(r_i)$	$\psi_k(r_i)$	$G_k(i)$	
$\lvert\eta_k\rvert > 1$	μ_k^i	ν_k^i	$(\mu_k^i - \nu_k^i)\ (\mu_k - \nu k)^{-1}$	$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$
$\eta_k\rvert = 1$	μ_k^i	$i\ \mu_k^i$	$i\ \mu_k^{i-1}$	$\nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}$
$\lvert\eta_k\rvert < 1$	$\cos i\sigma k$	$\sin i\sigma k$	$\sin i\sigma_k\ (\sin\sigma_k)^{-1}$	$\sigma_k = \arccos\eta_k$

Из формул (12), (13), (5), (9) видим, что формула суммарных представлений для задачи Дирихле исходного уравнения (1) имеет вид

$$\vec{u}\,(r_i) = r_i^{-\alpha}\ P\,\{\ \Phi(i)\,\vec{A} + \psi\ (i)\ \vec{B} + \sum_{p=1}^{i-1} G\ (i-p)\,P\left[\frac{h^2\,\vec{f}\,(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} - \gamma^2\,\vec{\omega}\ (r_p)\right] \tag{16}$$

где

$$\vec{\omega}\,(r_p) = \{\ r_p u_0(r_p),\ 0,\ldots,\ 0,\ r_p^{\alpha}\ u_{n+1}(r_p)\}, \tag{17}$$

и $\vec{A}$, $\vec{B}$ — постоянные векторы, определяемые через краевые условия на границах $r = r_0$ и $r = r_{n+1}$.

Рассмотрим теперь формулу суммарных представлений для уравнения (1) в кольце

$$\left.\begin{aligned}(r_i, \theta_k),\ i = 0,1,\dots, m+1,\ k = 0,1,\dots, n+1,\\ \theta_0 = 0,\ \theta_n = 2\pi,\ \theta_{n+1} = h_1.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В данном случае мы должны считать, что

$$u(r_i, \theta_n) = u(r_i, \theta_0),\ u(r_i, \theta_{n+1}) = u(r_i, \theta_1). \tag{19}$$

В силу (5) и (18) имеем также

$$v(r_i, \theta_n) = v(r_i, \theta_0);\ v(r_i, \theta_{n+1}) = v(r_i, \theta_1). \tag{19}$$

Поэтому, согласно [5], формула суммарных представлений в кольце (18) для функции v имеет вид

$$\vec{v}(r_i) = p_7 \left\{ \Phi(i)\vec{A} + \Psi(i)\vec{B} + \sum_{p=1}^{i=1} G(i-p) p_7^* \vec{\Phi}(r_p) h^2 \right\}, \tag{20}$$

ткуда следует формула суммарных представлений в кольце (18) для исходного уравнения (1) : *)

$$\vec{u}(r_i) = r_i^{-\alpha} p_7 \left\{ \Phi(i)\vec{A} + \Psi(i)\vec{B} + \sum_{p=1}^{i=1} G(i-p) p_7^* \frac{\vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} h^2 \right\}. \tag{21}$$

Величины $\Phi(i)$, $\Psi(i)$, $G(i)$ в формуле (21) определяются по таблице 1, но нужно заменить η_k следующим образом

$$\eta_k = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{\lambda_k}{2}\right), \tag{15}$$

где λ_k — диагональные элементы диагональной матрицы $\Lambda = [\lambda_1\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n]$.

Матрицы Λ и P_7 в рассмотренном случае имеют вид

а) Если n — нечетное

$$\Lambda = 2\left[1,\ \cos\varphi,\ \cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \cos 2\varphi, \dots,\ \cos\frac{n-1}{2}\varphi,\ \cos\frac{n-1}{2}\varphi\right]$$

$$P_7 = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\varphi & \sin\varphi & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & \dots & \cos\frac{n-1}{2}\varphi & \sin\frac{n-1}{2}\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos 2.2\varphi & \sin 2.2\varphi & \dots & \cos 2.\frac{n-1}{2}\varphi & \sin 2.\frac{n-1}{2}\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & \cos 3.2\varphi & \sin 3.2\varphi & \dots & \cos 3.\frac{n-1}{2}\varphi & \sin 3\frac{n-1}{2}\varphi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos n\varphi & \sin n\varphi & \cos n.2\varphi & \sin n.2\varphi & \dots & \cos n\frac{n-1}{2}\varphi & \sin n.\frac{n-1}{2}\varphi \end{bmatrix}$$

*) P_7^* — Матрица, транспонированная к матрице P_7

б) Если n — четное

$$\Lambda = 2\left[1, \cos\varphi, \cos\varphi, \cos2\varphi, \cos2\varphi, \ldots, \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi, \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi, -1\right],$$

$$p_7 = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \cos2\varphi & \sin2\varphi & \ldots & \cos\frac{n-2}{2}\varphi & \sin\frac{n-2}{2}\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos2\varphi & \sin2\varphi & \cos2.2\varphi & \sin2.2\varphi & \ldots & \cos2.\frac{n-2}{2}.\varphi & \sin2.\frac{n-2}{2}\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos3\varphi & \sin3\varphi & \cos3.2\varphi & \sin3.2\varphi & \ldots & \cos3.\frac{n-2}{2}\varphi & \sin3.\frac{n-2}{2}\varphi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos n\varphi & \sin n\varphi & \cos n.2\varphi & \sin n.2\varphi & \ldots & \cos n\frac{n-2}{2}\varphi & \sin n.\frac{n-2}{2}.\varphi \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}.$$

Предполагаем теперь, что

$$\delta \geqslant -\frac{\alpha^2}{2}. \tag{22}$$

В этом случае матрица $G\,(i-p)$ имеет вид

$$G\,(i-p) = (\mu^{i-p} - \nu^{i-p})\,(\mu-\nu)^{-1}, \tag{23}$$

где μ, ν — диагональные матрицы:

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n],\ \nu = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n].$$

При условии (22), согласно работе [5] имеем формулу суммарных представлений вне сектора для уравнения (1)

$$\vec{u}(r_i) = r_i^{-\alpha} P\left\{\mu^i\vec{A} + \nu^i\vec{B} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}P\left[\frac{h^2\vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} - \gamma^2\vec{\omega}(r_p)\right]\right\}, \tag{24}$$

формулу суммарных представлений вне круга для уравнения (1)

$$\vec{u}(ri) = r_i^{-\alpha}P_7\left\{\mu^i\vec{A} + \nu^i\vec{B} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}P_7^{*}\frac{\vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}}\,h^2\right\}. \tag{25}$$

Кроме условия (22) если предполагаем еще следующее условие

$$u\,(r_i) = 0\,(r_i^{-\alpha}),\ r_i \to \infty, \tag{26}$$

то формулы (24) и (25) соответственно имеют вид

$$\vec{u}\,(r_i) = r_i^{-\alpha}P\left\{\nu^i\vec{B} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}\,p\left[\frac{h^2\vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} - \gamma^2\vec{\omega}\,(r_p)\right]\right\}, \tag{24'}$$

$$\vec{u}\,(r_i) = r_i^{-\alpha} P_7 \left\{ \nu_i \vec{B} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} P_7^* \frac{\vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} h^2 \right\}. \qquad (25')$$

Переходим теперь к рассмотрению случая, когда на границе задана производная решения уравнения (1).

Для простоты рассмотрим полукольцо (фиг. 2):

$$\theta_0 = 0,\ \theta_{n+1} = \pi. \qquad (27)$$

Пусть задано

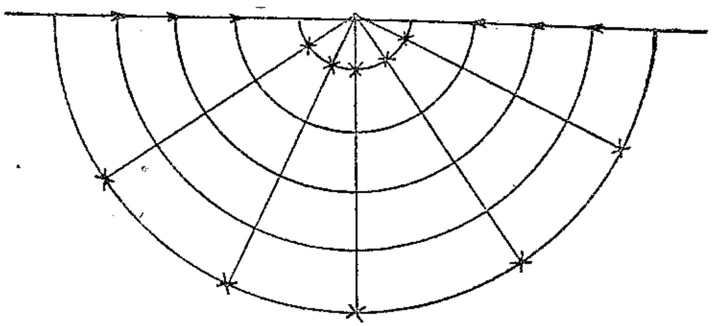
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=0} = \varphi\,(r_i);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\theta=\pi} = \psi(r_i). \qquad (28)$$

Тогда для новой функции v, имеем

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\theta=0} = r_i^{\alpha}\,\varphi(r_i);$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\theta=\pi} = r_i^{\alpha}\,\alpha\,(r_i). \qquad (29)$$



Фиг. 2.

Поэтому мы приходим к такой же краевой задаче для функции v. Согласно [5] мы получаем формулу суммарных представлений в полукольце (27) для уравнения (1):

$$\vec{u}(r_i) = r_i^{-\alpha} P_4 \left\{ \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} + \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\mu^{i-p}\nu^{i-p}}{\mu-\nu} P_4^* \left[\frac{h^2 \vec{f}(r_p)}{r_p^{\alpha-2}} - \gamma^2 \vec{\omega}_4(r_p) \right] \right\} \qquad (30)$$

При условиях (22) и (26) имеем формулу суммарных представлений вне полукруга для уравнения (1)

$$\vec{u}(r_i) = r_i^{-\alpha} p_4 \left\{ \nu^i \vec{B} - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} P_4^* \left[\frac{h^2 \vec{f}(r)_p}{r_p^{\alpha-2}} - \gamma^2 \vec{\omega}_4(r_p) \right] \right\} \qquad (31)$$

где $\vec{\omega}_4(r_p)$ — вектор с n компонентами

$$\vec{\omega}_4(r_p) = \{ r_p^{\alpha}\,\varphi(r_p), 0, \ldots\ldots, 0, r_p^{\alpha}\,\psi(r_p) \} \qquad (32)$$

а P_4 — квадратная матрица $P_4 = [P_{ik}]^n{}_{i,\,k=1}$.

$$P_{i,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & k = 1;\quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \sqrt{\dfrac{2}{n}} \left[\cos \dfrac{(2i-1)(k-1)}{2n}\pi \right] & k = 2, 3, \ldots, n \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (33)$$

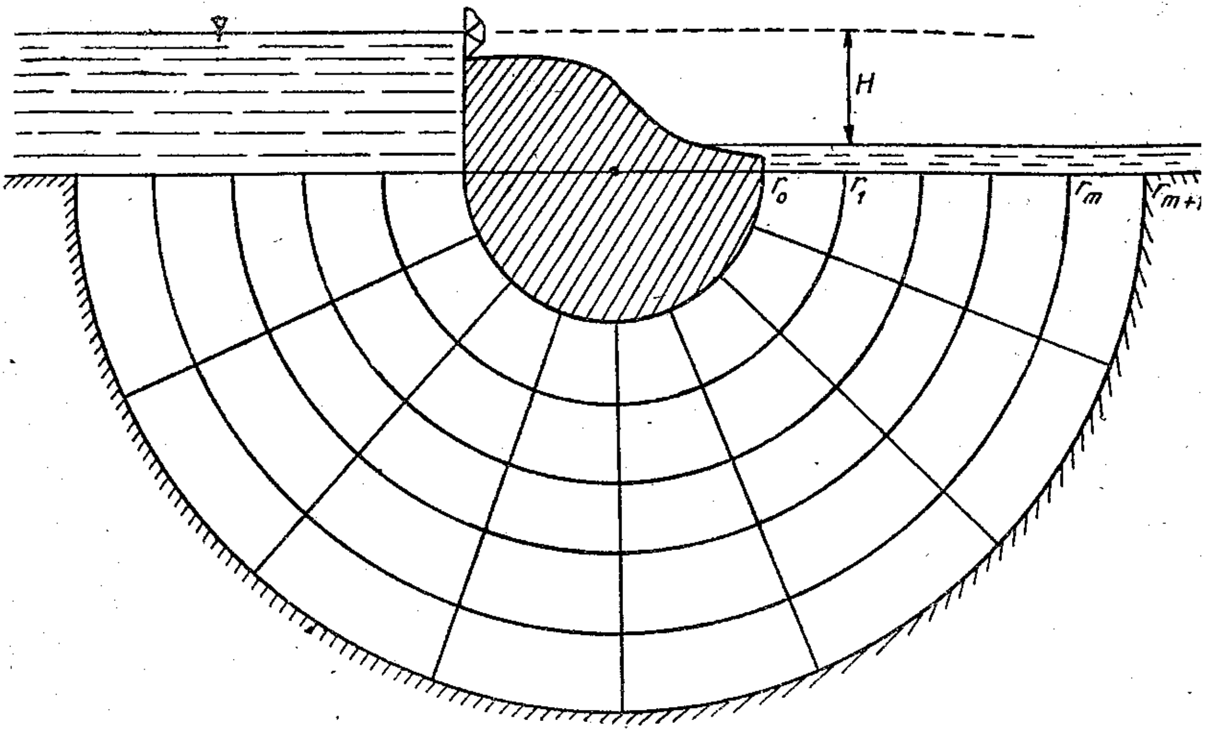
$$\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$$

$$\eta_k = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k-1}{n}\pi\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание. Как в работе [5] мы можем записать формулы суммарных представлений для уравнения (1) в случаях, когда на $\theta = \theta_0$ задано $\frac{\partial u}{\partial n}$, на $\theta = \theta_{n+1}$ задано u; наобратно на $\theta = \theta_0$ задано u, на $\theta = \theta_{n+1}$ задано $\frac{\partial u}{\partial n}$ и также формулы суммарных представлений для уравнения (1) в секторе, в круге... Но подход уже очевиден, что об этом подобно мы не останавливаемся.

§ 2. Приложение в теорию фильтрации.

Для иллюстрации придожения полученных выше формул суммарных представления уравнения (1), рассмотрим задачу напорной фильтрации об обтекании флютбета вида круга с радиусом r_0. Водоупор — круг радиуса r_{n+1}. Среда предполагается неоднородной изотропной с коэффициентом фильтрации $k(x,y) = r^{-2\alpha} = (x^2+y^2)^{-\alpha}$ где α — любое вещественное число. H — действующий на сооружении напор (фиг. 3).



фиг. 3

Как известно [6] эта задача фильтрации сводится и решению уравнения неразрывности для функции тока

$$\operatorname{div}(r^{2\alpha} \operatorname{grad} \psi) = 0 \tag{34}$$

со следующими краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\theta=0}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\theta=\pi}=0, \tag{35}$$

$$\psi\big|_{r=r_0}=Q, \quad \psi\big|_{r=r_{n+1}}=0, \tag{36}$$

где Q — фильтрационный расход.

Уравнение (34) представляет собой частный случай уравнения (1), когда $\delta=0$, $f=0$. Кроме того, условия (35) имеют вид (29). Поэтому мы используем формулу сум марных представлений (30) для численного решения задачи (34) — (36). В самом деле, из (30), (34), (35) имеем

$$\vec{\psi}(r_i)=\bar{r}_i^{-\alpha} P_4 \{\mu^i \vec{A}+\nu^i \vec{B}\}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36), получаем

$$\vec{\psi}(r_0)=r_0^{-\alpha} P_4[\vec{A}+\vec{B}],$$

$$0=\mu^{m+1}\vec{A}+\nu^{m+1}\vec{B}.$$

Отсюда следует

$$\vec{A}=-r_0^{\alpha}\frac{\nu^{m+1}}{\mu^{m+1}-\nu^{m+2}} P_4^* \vec{\psi}(r_0) \tag{38}$$

$$\vec{B}=r_0^{\alpha}\frac{\mu^{m+1}}{\mu^{m+1}-\nu^{m+1}} P_4^* \vec{\mu}(r_0). \tag{39}$$

Из (38) и (37) имеем

$$\vec{\psi}(r_i)=-\left(\frac{r_0}{r^i}\right)^{\alpha} P_4 \frac{\mu^{i-m-1}\nu^{i-m\ 1}}{\mu^{m+1}-\nu^{m+1}} P_4^* \vec{\psi}(r_0). \tag{39}$$

Перепишем (39) в скалярном виде

$$\psi_k(r_i)=-\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^{\alpha} Q \sum_{j=1}^{n} P_{kj}\frac{\mu_j^{i-m-1}\nu_j^{i-m-1}}{\mu_j^{m+1}-\nu_j^{m+1}} \sum_{l=1}^{n} P_{lj} \tag{40}$$

Наконец, для определения фильтрационного расхода Q используем конечноразностный аналог условия физики задачи фильтрации [6]

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{r^{2\alpha}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial_n} d_s=-H, \tag{41}$$

где Γ — любой непрерывный контур, соединяющий дно верхнего и нижнего бьефов, s — элемент дуг кривой Γ. Если возьмем контур Γ так, как на рис. 3, то конечноразностный аналог выражения (41) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(r_1) - m\ Q = \frac{-r_1^{2\alpha} H}{\gamma}. \tag{42}$$

Из (40) и (42) получаем

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{\alpha} \frac{\mu_j^{-m} - \nu_j^{-m}}{\mu_j^{m+1} - \nu_j^{m+1}} P_{k_j} P_{l_j} + m\right] Q = \frac{r_1^{2\alpha} H}{\gamma}. \tag{43}$$

Итак, фильтрационный расход Q определяется равенством (43) и задачи фильтрации разрешена полностью.

Замечание. Этой методикой можно решить неоднородную задачу фильтрации об обтекании флютбета со шпунтами или в бесконечном слое. При сочетании с методом мажорантных областей [7] можно решить более сложные задачи фильтрации, когда водоупор представляет собой кривой.

Поступило в Редакцию 4-XII-1976 г

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛЯШКО И.И., ЗАСЬКО Ю.И., *К численному решению задачи Дирихле для уравнения $div\,(x\,grad\,u) = F$.* В кн. Линейные и нелинейные краевые задачи, Изд, Института математики АН УССР, Киев, 1971.

2. ЛЯШКО И. И. ВЕЛИКОИВАНЕНКО И. М. *Численно-аналитическое рещение краевых задач теории фильтрации.* Киев, "Наукова думка", 1965,

3. ЛЯШКО И. И., ЗАСЬКО Ю, Н. О *численно-аналитическом решении краевых задач для уравнений $div(x\,grad u) = 2\alpha u = F$.* Вычислительная и прикладная математика. Изд-во Киев. ун а, вып. 23, 1974.

4. ЛЯШКО И.И., ЗАСЬКО Ю.Н. *К решению краевых задач для уравнений с циклическими коэффиентами.* Вычислительная и прикладная математика. Изд-во Киев. ун-та, вып-27, 1975,

5. ПОЛОЖИИ Г.Н., СКОРОБАГАТЬКО А.А *Об одном классе формул суммарных представлений*, Вычислительная математка, вып. I, Изд-сгво кгу, 1965.

6. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА П., Я. *Теория движения грунтовых вод.* Изд-во гиттх, м., 1952.

7. ЛЯЩКО И.И., ВЕЛИКОИВАНЕНКО И.М., ЛАВРИК В.И., МИСТЕЦКИЙ Г.Е. *Метод мажорантных областей в теории фильтрации*, К., "Наукова думка", 1974.