ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
TOM 2, N°2 (1977)

Ecoulement plan des fluides visqueux en regime d'oseen

LÊ-VĂN-THIÊM
HOÀNG-ĐINH-DUNG
Institut de Mathematique
Hà-nội

L'écoulement plan des fluides visqueux en régime d'Oseen est donné, dans le plan (x, y) par les équations [1]:

$$\begin{cases} U\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \gamma\Delta u, & (1) \\ U\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \gamma\Delta v, & (2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & (3) \end{cases}$$

òu u, v sont les composantes de la vitesse de courant, U est la vitesse à l'infini, p la pression, γ le coefficient de viscosité, ρ la densité du fluide.

A cause de (3) on peut trouver une fonction de courant ψ telle que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4}$$

On a

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

En dérivant (1) par rapport à y et (2) par rapport à x, puis en soustrayant membre à membre, on trouve, à cause de (5) :

$$U\Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \Delta \Delta u,$$

ou, en appelant

$$\lambda = \frac{U}{2\gamma},$$

$$\Delta\left(\Delta - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0. \tag{7}$$

On trouve, en résolvant (7) par la méthode de démembrement,

$$\psi = G + H,$$

avec

$$\Delta G = 0, \left(\Delta - 2\lambda \frac{\partial}{\partial x}\right) H = 0. \tag{8}$$

Si l'on pose

$$H = e^{\lambda x} F,$$

on trouve, pour F, l'équation de Helmholtz

$$(\Delta - \lambda^2) F = 0. \tag{9}$$

Avec les écritures complexes

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

nous avons

$$u - iv = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2i\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

ou

$$u - iv = 2i\frac{\partial G}{\partial z} + 2ie^{\frac{\lambda}{2}(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\lambda}{2} F\right). \tag{10}$$

Les fonctions G et F sont des fonctions réelles. La fonction G est une fonction harmonique, donc la fonction $2i\frac{\partial G}{\partial z}$ est une fonction analytique $g(z)$:

$$g(z) = 2i\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Appelons

$$\varphi(z, \bar{z}) = 2\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\lambda}{2} F\right)$$

nous avons

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar z} = 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar z} + \frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \bar z}\right) = 2\left(\frac{\lambda^2 F}{4} + \frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial F}{\partial \bar z}\right)$$

$$= 2\,\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar z} + \frac{\lambda}{2}F\right) = 2\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial \bar F}{\partial \bar z} + \frac{\lambda}{2}\bar F\right) = \frac{\lambda}{2}\,\bar\psi,$$

car

$$F = \bar F.$$

Ainsi la fonction $u - iv$ peut se mettre sous la forme :

$$u - iv = g(z) + ie^{\lambda x}\,\psi(z, \bar z), \tag{11}$$

où $g(z)$ est une fonction analytique et ψ, une solution de l'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\lambda}{2}\,\bar\psi. \tag{12}$$

L'équation (12) a été étudiée par I.N.Vekua [2] dans la forme générale

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar z} = C(z, \bar z)\bar\psi\,.$$

Dans le cas concret de (12) et pour un domaine D simplement connexe, nous trouvons [5] d'après Vekua la solution générale

$$\psi(z, \bar z) = f(z) + \frac{\lambda r}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,J_1\left(\lambda ri\sqrt{1-t}\right) f(zt)\,dt +$$

$$+ \frac{\lambda \bar z}{2}\int_0^1 J_0\left(\lambda ri\sqrt{1-t}\right)\overline{f(zt)}\,dt, \tag{13}$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1, $f(z)$ une fonction analytique dans le domaine D considéré comme contenant l'origine. En remplaçant $\sqrt{1-t}$ par t, nous avons

$$\psi(z, \bar z) = f(z) - \lambda ri\int_0^1 J_1(\lambda rit)\, f\left[z(1-t^2)\right] dt +$$

$$+ \lambda\bar z\int_0^1 J_0(\lambda rit)\,\overline{f[z(1-t^2)]}\;tdt\cdot \tag{14}$$

Posons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

nous pouvons écrire

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \lambda r i \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \int_0^1 J_1(\lambda r i t)(1-t^2)^n dt +$$

$$+ \lambda \bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n \int_0^1 J_0(\lambda r i t)(1-t^2)^n t\, dt. \tag{15}$$

Utilesons le développement des fonctions de Bessel [3] :

$$J_n(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k}}{2^{2k}\, k!\,(n+k)!}$$

et la formule
$$\int_0^1 t^{2k+1}(1-t^2)^n dt = \frac{1}{2} \frac{k!\, n!}{(k+n+1)!},$$

nous aurons :

$$\psi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \frac{n!\, 2^n}{(\lambda i r)^n} J_n(\lambda i r) + \lambda \bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n \frac{n!\, 2^n}{(\lambda i r)^{n+1}} J_{n+1}(\lambda i r).$$

Nous avons

$$J_n(iu) = i^n I_n(u),$$

où $I_n(u)$ sont les fonctions de Bessel à argument imaginaire. Pour simplifier l'écriture nous allons remplacer $\frac{2^n n!}{n} a_n$ par a_n qui sont aussi des coefficients indéterminés. Nous obtiendrons finalement

$$\psi(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n I_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}}. \tag{16}$$

La formule (16) représente la solution générale de l'équation (12) dans un domaine simplement connexe contenant l'origine. Mais l'écoulement en régime d'Oseen n'a de sens que si le domaine d'écoulement contient, dans son intérieur, le point à l'infini, où la vitesse est fini (égale à U). Or dans la formule (16) les fonctions $I_n(\lambda r)$ tendent vers l'infini quand $r \to \infty$, c'est pourquoi il est naturel d'essayer de remplacer les fonctions $I_n(\lambda r)$ par les fonctions $K_n(\lambda r)$, qui satisfont à la même équation différentielle et qui tendent vers 0 quand $r \to \infty$, et de chercher une expression analogue à (16) qui satisfait toujours à l'équation (12). Nous trouvons finalement la fonction

$$\varphi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}}, \tag{17}$$

qui satisfait également à l'équation (12). En effet appelons

$$A = \sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n},$$

$$B = \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}},$$

et utilisons la relation classique [3]:

$$K_{\gamma-1}(z) + K_{\gamma+1}(z) = -2K'_{\gamma}(z)$$

nous aurons, vu $\varphi = A - B$,:

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} \bar{B}, \quad \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} \bar{A} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{\lambda}{2} \bar{\varphi}.$$

Donc dans le cas d'un domaine d'écoulement contenant le point à l'infini la relation (11) donne, en prenant $\varphi(z, \bar{z})$ dans (17) au lieu de $\psi(z, z)$:

$$u - iv = g(z) + ie^{\frac{\lambda}{2}(z+\bar{z})} \left(\sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} - \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}} \right). \tag{18}$$

Les coefficients a_n doivent être tels que les séries à droite convergent dans le domaine considéré. La fonction $g(z)$ est une fonction analytique dans le même domaine.

Ecoulement autour d'un cercle (d'un cylindre)

Nous pouvons prendre le cercle centré à l'origine et son rayon égal à l'unité $R = 1$.

Nous savons que dans l'écoulement des fluides visqueux, la vitesse du courant est nulle le long du contour de l'obstacle, c-à-d. $u - iv = 0$ pour $r = 1$. Nous écrivons sur le cercle unité $z = e^{i\theta} = \zeta$, $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$. La relation (18) donne ici:

$$g(e^{i\theta}) = -ie^{\frac{\lambda}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} \left(\sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda) \zeta^n - \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda) \frac{1}{\zeta^{n+1}} \right)$$

Avec la supposition que les séries à droite convergent, nous avons au second membre une fonction analytique de la variable ζ. D'après le théorème d'unicité, g coincide avec cette fonction analytique dans tout le domaine $r \geqslant 1$:

$$g(z) = -ie^{\frac{\lambda}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\left(\sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda)\, z^n - \sum_{0}^{\infty} \bar{a}_n K_{n+1}(\lambda)\, \frac{1}{z^{n+1}}\right). \tag{19}$$

Il nous reste seulement à déterminer les cœfficients a_n. Tout d'abord en raison de la symmétrie la vitesse doit être réelle quand z est réel (sur l'axe des x). Ce qui exige d'après (17), (18) et (19) que les a_n soient imaginaires purs et par suite $\bar{a}_n = -a_n$. Nous allons remplaces a_n par $i\,U a_n$ avec a_n réel et nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} & u - iv = U g(z) + U \varphi(z, \bar{z}), \\ & \text{avec} \\ & g(z) = e^{\frac{\lambda}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\left(\sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda)\, z^n + \sum_{0}^{\infty} a_n K_{n+1}(\lambda)\, \frac{1}{z^{n+1}}\right), \\ & \varphi(z, \bar{z}) = e^{\frac{\lambda}{2}(z+\bar{z})}\left(\sum_{0}^{\infty} a_n K_n(\lambda r)\, \frac{z^n}{r^n} + \sum_{0}^{\infty} a_n K_{n+1}(\lambda)\, \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nous allons utiliser le fait que la vitesse $u + iv$ est égale à U à l'infini. Si nous réussissons à trouver un système des a_n tel que

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(z, \bar{z}) = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 1 \tag{22}$$

le problème sera résolu, vu l'unicité de la solution. Nous verrons après que les a_n trouvés d'après (22) tendent vers 0 avec $n \to \infty$ comme $\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n$. Dans ce cas la relations (21) séra satisfaite, c'est ce que nous pouvons voir immédiatement en nous appuyant sur le fait que pour $r \to \infty$ les $K_n(\lambda r)$ tendent tous vers zéro comme [3]:

$$K_n(\lambda r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda r}}\, e^{-\lambda r}\left(1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right),$$

où $0(x)$ tend vers 0 avec x.

Comme $g(z)$ est une fonction analytique, la relation (22) équivaut à la possibilité d'un développement de la forme

$$g(z) = 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

Nous avons d'autre part le développement [3] :

$$e^{\frac{\lambda}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\lambda)\, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\lambda) \frac{1}{z^n} \tag{23}$$

Nous avons donc l'égalité

$$\left[\sum_0^{\infty} I_n(\lambda)\, z^n + \sum_1^{\infty} I_n(\lambda) \frac{1}{z^n}\right] \left[\sum_0^{\infty} a_n K_n(\lambda)\, z^n + \sum_0^{\infty} a_n K_{n+1}(\lambda) \frac{1}{z^{n+1}}\right] =$$

$$= 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

En identifiant les puissances non négatives de z dans les deux membres, nous obtenons un système d'équations linéaires infini pour les a_n :

$$\left.\begin{array}{l}
(K_0 I_0 + K_1 I_1)\, a_0 + (K_1 I_1 + K_2 I_2)\, a_1 + \cdots + (K_{n-1} I_{n-1} + K_n I_n)\, a_{n-1} + \cdots = 1 \\
(K_0 I_1 + K_1 I_2)\, a_0 + (K_1 I_0 + K_2 I_3)\, a_1 + \cdots + (K_{n-1} I_{n-2} + K_n I_{n+1})\, a_{n-1} + \cdots = 0 \\
\cdot\ \cdot \\
(K_0 I_{n-1} + K_1 I_n) a_0 + (K_1 I_{n-2} + K_2 I_{n+1}) a_1 + \cdots + (K_{n-1} I_0 + K_n I_{2n-1}) a_{n-1} + \cdots = 0 \\
\cdot\ \cdot
\end{array}\right\} \tag{24}$$

Ici nous avons écrit I_n, K_n à la place de $I_n(\lambda)$, $K_n(\lambda)$.

Nous avons besoins maintenant de quelques résultats de la théorie des systèmes d'équations linéaires infini [4].

Définition : Un système d'équations linéaires infini, écrit sous la forme

$$x_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_k = b_i \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots), \tag{25}$$

---

* On écrit aussi (25) sous la forme

$$x_i = \sum_0^{\infty} c_{ik} x_k + b_i. \tag{25'}$$

Mais on peut ramener (25') à (25) par le changement de notation $c'_{ik} = - c_{ik}$. Finalement on a

$$x_i + \sum_0^{\infty} c'_{ik} x_k + b_i.$$

avec $|c'_{ik}| = |c_{ik}|$ et le théorème reste vrai pour (25').

est dit totalement régulier si la somme des valeurs absolues des cœfficients c_{ik} de chaque ligne est plus petit qu'un nombre d inférieur à 1 :

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{ik}| \leqslant d < 1, \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Sous certaines conditions, il est possible d'approcher la solution d'un tel système par la méthode dite de réduction qui consiste à résoudre d'abord le système fini

$$x_i + \sum_{k=1}^{N} c_{ik}\, x_k = b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{27}$$

Soit $\tilde{x}_1^N, \tilde{x}_2^N, \ldots, \tilde{x}_N^N$ la solution de (27), nous avons le théorème.

Théorème: Si les termes libres b_i d'un système infini totalement régulier satisfont aux inégalités

$$|b_i| \leqslant K \tag{28}$$

avec un K fixe, le système (25) possède une solution bornée unique $|x_i| \leqslant M$, qui peut être approché par la méthode de réduction

$$x_i = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}_i^N.$$

Nous allons maintenant ramener le système (24) à la forme (25) par le changement de variable

$$a_i = \frac{x_i}{I_0 K_i}. \tag{29}$$

Le nouveau système s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l}
\left(1 + \dfrac{K_1 I_1}{I_0 K_0}\right) x_0 + \dfrac{K_1 I_1 + K_2 I_2}{I_0 K_1} x_1 + \cdots + \dfrac{K_{n-1} I_{n-1} + K_n I_n}{I_0 K_{n-1}} x_{n-1} + \cdots = 1 \\[2ex]
\dfrac{K_0 I_1 + K_1 I_2}{I_0 K_0} x_0 + \left(1 + \dfrac{K_2 I_3}{I_0 K_1}\right) x_1 + \cdots + \dfrac{K_{n-1} I_{n-2} + K_n I_{n+1}}{I_0 K_{n-1}} x_{n-1} + \cdots = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{K_0 I_{n-1} + K_1 I_n}{I_0 K_0} x_0 + \dfrac{K_1 I_{n-2} + K_2 I_{n+1}}{I_0 K_1} x_1 + \cdots + \left(1 + \dfrac{K_n I_{2n-1}}{I_0 K_{1n-}}\right) x_{n-1} + \cdots = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \tag{30}$$

La somme des $|c_{nk}| = c_{nk}$ de la n - ième ligne est

$$A_n = \frac{1}{I_0}\,(2I_1 + 2I_2 + \cdots + 2I_{n-1} + I_n + I_{n+1} + \cdots + I_{n+m} + \ldots$$

$$+ \frac{K_1}{K_0} I_n + \frac{K_2}{K_1} I_{n+1} + \cdots + \frac{K_{n+m+1}}{K_{n+m}} I_{2n+m} + \cdots)$$

En faisant $z = 1$ dans (23), nous avons

$$e^{\lambda} = I_0(\lambda) + 2I_1(\lambda) + 2I_2(\lambda) + \cdots$$

et par suite

$$A_n = \frac{e^{\lambda} - I_0(\lambda)}{I_0(\lambda)} + \frac{1}{I_0}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{K_{m+1}}{K_m} - 1\right) I_{n+m}. \tag{31}$$

Comme $I_{1+m} < I_m$ *et* $K_{m+1} > K_m$, on a

$$\ldots < A_n < A_{n-1} < \ldots < A_2 < A_1$$

Donc si nous trouvons une borne supérieure pour A_1, elle est aussi supérieure à tous les A_n. Nous avons

$$A_1 = \frac{1}{I_0}\left(I_1 + I_2 + \cdots + \frac{K_1}{K_0} I_1 + \frac{K_2}{K_1} I_2 + \ldots\right)$$

Pour λ suffisamment petit nous avons

$$\left.\begin{aligned} &I_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\Big(1 + 0(\lambda)\Big),\ K_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-n}\Big(1 + 0(\lambda)\Big)\ \text{pour } n \geqslant 1 \\ &I_0(\lambda) = 1 + 0(\lambda),\ \ K_0(\lambda) = \log\frac{1}{\lambda}\,\Big(1 + 0(\lambda)\Big)\ \text{pour } n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ici tous les $0(\lambda)$ sont positifs, ce qui donne pour A_1:

$$A_1 < \frac{1}{\log\frac{1}{\lambda}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(m+1)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+2},$$

ou

$$A_1 < \frac{1}{\log\frac{1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m + \frac{\lambda^3}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m,$$

ou

$$A_1 < \frac{1}{\log \frac{1}{\lambda}} + \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}} + \frac{\lambda^3}{4} e^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Donc pour λ suffisamment petit (on peut prendre $\lambda < e^{-2}$), tous les A_n sont plus petits qu'un nombre plus petit que 1 et le système (30) est totalement régulier. Tant qu'aux conditions (28), elles sont certainement verifiées si l'on prend $K = 1$, car dans le cas présent on a

$$b_0 = 1, \quad b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{33}$$

Donc pour λ assez petit, le système (30) possède une solution bornée unique

$$|x_i| \leqslant M,$$

que l'on peut approcher par la méthode de reduction

$$x_i = \lim_{N=\infty} \tilde{x}_i^N. \tag{34}$$

D'autre part pour λ fixe et pour n assez grand on a :

$$K_n(\lambda) = \frac{1}{2n} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n n! \left(1 + 0(n)\right)$$

de sorte que d'après (29) $\quad a_n = \frac{x_n}{I_0 K_n} < \frac{2M}{I_0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{(n-1)!},$

la relation (21) est bien satisfaite et le problème est résolu pour λ assez petit ($\lambda < e^{-2}$, ce qui ne constitue pas une restriction notable, car l'expérience montre qu'on a le régime d'Oseen seulement pour les assez petit $\lambda < \frac{1}{4} = 2^{-2}$. Nous persons du reste que cette restriction est due à la méthode de démonstration plustôt qu'à la solution elle même).

Regardons maintenant de près l'expression de la solution. Nous avons dans (34)

$$\tilde{x}_i^N = \frac{(-1)^i \tilde{\Delta}_i^N}{\tilde{\Delta}^N},$$

où $\tilde{\Delta}^N$ est le déterminant du système fini approximatif (27) et $\tilde{\Delta}_i^N$ le même déterminant où l'on a remplacé la i-ième colonne par la colonne des termes libres b_n. Mais ici tous les b_n $(n = 1,2,\ldots,)$ sont nuls sauf le premier $b_0 = 1$ (33), de sorte que le déterminant $\tilde{\Delta}_i^N$ n'est autre que le déterminant $\tilde{\Delta}^N$ où l'on a supprimé la première ligne et la i-ième colonne, multiphé par $(-1)^i$.

Appelons maintenant Δ^N et Δ_i^N les déterminants correspondants dans le système (24).

Nous avons

$$\Delta^N = I_0^N K_0 K_1 \dots K_{i-1} K_i K_{i+1} \dots K_N \tilde{\Delta}^N,$$

$$\Delta_i^N = I_0^{N-1} K_0 K_1 \dots K_{i-1} K_{i+1} \dots K_N \tilde{\Delta}_i^N,$$

et par suite
$$\frac{\Delta_i^N}{\Delta^N} = \frac{1}{I_0 K_i} \frac{\tilde{\Delta}_i^N}{\tilde{\Delta}^N}.$$

Donc d'après (29) nous avons $a_i = (-1)^i \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\Delta_i^N}{\Delta^N}$.

ou Δ^N et Δ_i^N sont les déterminants «réduits» du déterminant infini:

$$\begin{vmatrix} K_0 I_1 + K_1 I_1 & K_1 I_1 + K_2 I_2 & \dots & K_{n-1} I_{n-1} + K_n I_n & \dots \\ K_0 I_1 + K_1 I_2 & K_1 I_0 + K_2 I_3 & \dots & K_{n-1} I_{n-2} + K_n I_{n+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_0 I_{n-1} + K_1 I_n & K_1 I_{n-2} + K_2 I_{n+1} & \dots & K_{n-1} I_0 + K_n I_{2n-1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

et la solution du problème d'Oseen relatif au cercle unité est

$$u - iv = U e^{\frac{\lambda}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \left(\sum_0^\infty a_n K_n(\lambda) z^n + \sum_0^\infty a_n K_{n+1}(\lambda) \frac{1}{z^{n+1}} \right) +$$

$$+ U e^{\frac{\lambda}{2}\left(z + \bar{z}\right)} \left(\sum_0^\infty a_n K_n(\lambda r) \frac{z^n}{r^n} + \sum_0^\infty a_n K_{n+1}(\lambda r) \frac{\bar{z}^{n+1}}{r^{n+1}} \right).$$

RÉFERENCES

[1] N.V. Rose, I.A. Kibel, N.E. Kochin: *Hydrodynamique theorique*, Moscou 1937 (en Russe).

[2] I.N. VeKua: *Système d'équations linéaires du type elliphque*, Berlin 1956 (traduction allemande).

[3] D.S. Kousnessov: *Fonctions speciales*, Moscou 1956 (en Russe).

[4] L.V. Kantorovitch, V.I. Krylov. *Méthode d'approximation dans l'analyse superieure*, Berlin 1956 (traduction allemande).

[5] Lê-Văn-Thiêm: *Ecoulement plan du fluide visqueux en régime d'Oseen*: Comple Rendu de l'Institut de Mathematique 1975, Hanoi 1976 (en Vietnamien).