ДЕЛИМЫЙ МОДУЛЬ НАД КОЛЬЦОМ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

HOANG KY

Педагогический институт г. Виня

Многие понятия и результаты в теории полных групп, в частности в теории полных абелевых групп, перенесены многими авторами на случай модулей (например, см. в [2]). В настоящей статье построим R — модуль типа P^{∞} по некоторому идеалу Р области целостности R главных идеалов, изучим свойства R — модулей типов P^{∞} и таких R — модулей, изоморфных R — модулю поля отношений области целостности R, которые называются R — модулями типов R. Главный результат работы состоит в том, что всякий делимый модуль над обастью целостности главных идеалов разлагается в прямую сумму модулей типов P^{∞} по некоторым простым идеалам и модулей типов $\overline{R}$.

Если в нашей заметке в качестве R берётся кольцо целых чисел, то из наших предложений получим соответствующие результаты о полных абелевых группах, которые излагаются, скажем, в [3]. Другие необходимые определения и свойства групп, колец и модулей могут быть наидены ещё в [2], [4], [5].

Напомним некоторые необходимые определения

§ I. Модуль типа P^{∞}

Пусть M — левый модуль над кольцом R и N — его произвольное подмножество Множество I всех таких элементов $\rho \in R$, что $\rho N = (0)$ называется I порядком подмножества I и обозначается через ord N. Ясно, что порядок подмножества N является максимальным идеалом кольца R со свойством $IN = (0)$. Обратим внимание на два случая, когда N является подмодулем или элементом из M. Тогда получим понятие порядка подмодуля или элемента данного модуля M.

В этой статье мы предполагаем, что кольцо R содержит единицу. Идеал P кольца R называется простым если фактор — кольцо R/P является областью целостности (коммутативное, не содержащее делителя нуля кольцо). Если R — главное кольцо (так условимся называть коммутативное кольцо главных идеалов), то знаем (см. [4], скажем), что всякий простой идеал порождается неприводимым элементом, $P = (\pi)$.

Пусть A, B — два произвольных идеали кольца R. Как обычно, под произведением идеалов A, B понимаем такой идеал, все элементы которого имеют вид $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$. Отсюда определяется степень P^k любого идела P кольца R, где k — натуральное число : Это множество всех элементов вида $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i_1} \pi_{i_2}, \pi_{ik} \in P$. В частности, если P есть простой идеал главного кольца R, т.е. $P = (\pi)$, то $P^k = (\pi)^k = (\pi^k)$.

Подмодуль A данного R — модуля M называется циклическим подмодулем, порождённым элементом a, и обозначается через $\{a\}$, если $A = Ra$, т.е. A является множеством всех элементов вида ρa, для всех $\rho \in R$.

Лемма 1. *Всякий подмодуль циклического R — модуля $\{a\}$ является циклическим R — подмодулем вида $\{\rho a\}$, $\rho \in R$ тогда и только тогда, когда все левые идеалы кольца R главны*

Действительно, пусть N — подмодуль R — модуля $\{a\}$. Тогда N состоит из элементов вида ρa, где $\rho \in R' \subseteq R$. Сразу видеть, что N является подмодулем модуля $\{a\}$ тогда и только тогда, когда R' является левым идеалом из R. Тогда $N = R'a$, т.е. является циклическим R' —модулем. N также будет циклическим R — подмодулем вида $\{\rho a'\}$, $\rho' \in R'$, тогда и только тогда, когда все элементы из N имеют вид $\alpha\rho'$ a для всех $\alpha \in R$, т.е. R' является главным левым идеалом из R, порождённым элементом ρ'. Лемма доказана.

Через (α, β) обозначим идеал, порождённый элементами α и β из R, т.е. идеал состоит из элементов вида $\sum\limits_{i,j} \rho_{ij}\, \alpha^i \beta^i$, где i, j — неотрицательные целые числа, $\rho_{ij} \in R$. Коротко назовём главной областью всякую содержашую единицу область целостности главных идеалов.

Лемма 2. *Пусть $\{a\}$ является циклическим R — модулем порядка P^k, где P — простой иделал, прождённый π, R — главная область. Тогда всякий элемент вида αa где $\alpha a \in R$, $(\alpha, \pi) = R$ может быть образующим. элементом данного цикли ческого модуля.*

Действительно, рассматривая циклический R — подмодуль $\{\alpha a\}$, видим, что $\{\alpha\ a\} \subseteq \{a\}$ так как $\alpha a \in \{a\}$. Так как $(\alpha,\pi) = R = (1)$ и π неприводимый, то $(\alpha, \pi)^k = R$, поэтому наидутся такие β, γ из R, что.

$$\beta\alpha + \gamma\pi^k = 1$$

Тогда. $\beta\alpha a + \gamma\pi^k a = a$. Но $\pi^k a = 0$, поэтому $a = \beta\,(\alpha a) \in \{\alpha a\}$, т.е. $\{a\} \subseteq \{\alpha\ a\}$. Отсюда следует, что $\{a\} = \{\alpha a\}$ и лемма доказана.

Лемма 3. *Порядок циклического R — модуля равен порядку его образующега элемениа*

Действительно, пусть a — образующий циклического R модуля A, т.е. $A=\{a\}$. Через $\operatorname{ord} A$ и $\operatorname{ord} a$ обозначим соответственно порядки модуля Аи элемента а. Если $\rho \in \operatorname{ord} A$, то $\rho a = 0$, т.е. $\rho \in \operatorname{ord} a$. Следовательно $\operatorname{ord} A \subseteq \operatorname{ord}\, a$ Если $\beta \in \operatorname{ord} a$, то $\beta a = 0$, следовательно $\beta(\alpha a) = \alpha(\beta a) = 0$ для всех $\alpha \in R$. Так как все элементы из A имеют вид αa, то это значит $\beta \in \operatorname{ord} A$, отсюда $\operatorname{ord} a \subseteq \operatorname{ord} A$. Объединя эти замечания, получим лемму 3.

Лемма 4. *Всякий циклический R — модуль порядка P^k имеет единственный R — подмодуль порядка P^{k-1}, где $P = (\pi)$ — простой идеал главной области R.*

Действительно, пусть $A = \{a\}$ и ввиду леммы 3, пусть $\mathrm{ord}A = \mathrm{ord}a = (\pi^k.)$ где π — неприводимый элемент из R.

Рассматриваем подмодуль B из A вида $B = \{\pi a\}$. Покажем, что $\mathrm{ord}B = \mathrm{ord}\pi a = P^{k-1} = (\pi^{k-1})$.

Берём $\rho \in P^{k-1}$, т.е. $\rho = \alpha\pi^{k-1}$, $\alpha \in R$. Мы имеем $\rho\,(a\pi) = \alpha\pi^k a = 0$, следовательно $\rho \in \mathrm{ord}\ B$. Поэтому $P^{k-1} \in \mathrm{ord}\ B$.

Обратно, если $\rho \in \mathrm{ord}\ B$, то $\rho b = 0$ для всех $b \in B$ т.е., $\rho(\alpha\pi a) = 0$ для всех $\alpha \in \mathrm{R}$, в частности $\rho\pi a = 0$, значит $\rho\pi \in \mathrm{ord}a = \mathrm{ord}A = P^k = (\pi^k)$, или $\rho\pi = \beta\pi^k$. Так как R не содержит делитедя нуля, то отсюда следует, что
$\rho = \beta\ \pi^{k-1} \in P^{k-1}$, т.е. $\mathrm{ord}\ B \subseteq P^{k-1}$.

Итак, мы видим, что в A существует циклический подмодуль $B = \{\pi a\}$ порядка P^{k-1}. Покажем, что это единственный подмодуль модуля А, который имеет порядок P^{k-1}.

Пусть N — произвольный подмодуль из A. Так как R является главной областью, то N будет циклическим подмодулем вида $N = \{\rho a\}$ по лемме I. Пусть N имеет порядок $P^{k-1} = (\pi^{k-1})$. Покажем, что $N = \{\pi a\}$.

так как $\mathrm{ord}\ N = P^{k-1} = (\pi^{k-1})$, то $\pi^{k-1}\rho a = 0$, следовательно $\rho\pi^{k-1} \in \mathrm{ord}\ a = (\pi_k)$ или $\rho\pi^{k-1} = \alpha\pi^k$ для некоторого α из R Так как R не содержит делителя нуля, то отсюда следует $\rho = \alpha\pi$. И так как порядок P^{k-1} является таким макситальным идеалом, что $P^{k-1}\ N = 0$, то отсюда следует $(\alpha,\pi) = R$ ввиду неприводимости элемента π. Применяя лемму 2, получим

$N = \{\rho a\} = \{\alpha\pi a\} = \{\pi a\}$ так как $(\alpha,\pi) = R$, и лемма 4 доказана.

Ввиду леммы 4 видим, что если R является главной областью, то для каждого данного простого идеала P и каждого n, существуют мономорфные отображения циклического R — модуля порядка P^{n-1} в циклический R — модуль порядка P^n. Для каждого n, фиксируя один из этих мономорфизмов, получим возрастающую последовательность циклических R — модулей порядков P^n, $n = 1,2,\ldots$, Объединение этой последовательности называется R — модулем типа P^∞

Ниже будут изложены некоторые свойства R — модуля типа P^∞.

Теорема 1. *Для каждого $m, n = 1, 2,\ldots$, R — модуль типа P^∞ имеет единственный подмодуль порядка P^m. Всякий истиный подмодуль модуля типа P^∞ является некоторым циклическим модулем порядка P^n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) По лемме 4, циклический модуль $\{a\}$ порядка P^k имеет единственный подмодуль порядка P^{k-1}, это подмодуль $\{\pi a\}$, где π — образующий из P. Продолжая те же рассуждения, мы видим, что для каждого m, меньшего k, имеется единственный циклический подмодуль порядка P^m, это подмодуль

$\{\pi^{k-m}a\}$. Следовательно для каждого $m = 1,2,...$ R — модуль типа P^∞ имеет единственный циклический подмодуль порядка P^m, это объединение цепи таких его подмодулей, порядками которых являются P, P^2,... P^{m-1}

2) Из сказанного следует, что можно считать R — модуль типа P^∞ объединением возрастающей последовательности циклических модулей вида $\{a_k\}$,$k = 1,2...$, где a_k есть элемент порядка P^k, кроме того, можно считать $a_0 = 0$ элементом порядка R.

Теперь пусть A — истиный подмодуль модуля типя P^∞ тогда он не может содержать всех a_k. Пусть a_{n+1} является первым образующим, не содержащимся в А. Тогда мы имеем $A = \{a_n\}$. Действительно, если А содержал бы какой-то элемент b, не лежащим в $\{a_n\}$, то нашлось бы такое число $k > n$, что $b \notin \{a_{k-1}\}$, $b \in \{a_k\}$.

Тогда $\{b\} \subseteq \{a_k\}$. Но всякий истиный подмодуль модуля $\{a_k\}$является циклическим подмодулем модуля $\{a_{k-1}\}$, с другой стороны $b \notin \{a_{k-1}\}$, поэтому $\{b\} = \{a_k\}$, т.е. $\{a_k\} \subseteq A$ следовательно $a_{n+} \in A$, что противоречит предположению. Этим теорема доказана.

Следствие 1. *R — Модуль типа p^∞ не является нетеровым модулем, но все его ист иные подмолулинетеровы. R — модуль типа p^∞ удовлетворяет условию минимальности (следовательно, условию обрыва убывающих цепочек), но не удовлет воряет условию обрыва возраитающих цепочек) подмодулей.*

Это сдедствие непосредственно следует из теоремы I.

Следствие 2. *Всякий циклический R — модуль порядка p, где p^m — простой идеал, $m \geqslant 1$, не может быть разложен в прямую сумму. Следовательно, всякий R — модуль типа p^∞ не может быть разложен в прямую сумму.*

Действительно, всеми ненулевыми подмодулями циклического модуля порядка P^m являются циклические подули порядков P^{m-1}, P^{m-2},.., P^2, P. Поэтому пересечение некоторых из них не может быть нулевым (так как они содержат друг друга), и они не могут быть прямо разложены. Что касается R — модуля типа P^∞, применяя теорему 1 и только что доказанное замечание, получим следствие 2.

R — модуль M называется делимым если в M всегда разрешимо уравнение $\alpha x = a$ где a — произвольный элемент из M, α — произвольный ненулевой элемент из R.

Теорема 2. Всякий R — модуль типа P^∞ является делимым модулем.

Доказательство. Сначала рассматриваем уравнение $\alpha x = a$, где $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, a — произвольный элемент модуля типа P^∞. Так как $P = (\pi)$ — простой идеал, то π — неприводимый элемент, следовательно для всех ненулевых α из R, случится только две возможности : $(\alpha,\pi) = R$ или $\alpha = \pi^k\beta$, где $(\beta, \pi) = R$. Поэтому для уравнения $\alpha x = a$, рассмотрим только два случая : $\pi^k x = a$ и $\alpha x = a$, где $(\alpha,\pi) = R$, так как случай уравнения $\pi^k\beta\, x = a$ будет приведен к выше сказанным случаям.

Так как а есть элемент R —модуля типа P^∞ , то пусть $a \in \{a_m\}$ скажем, тогда $a = \rho a_m$, где $\rho \in R$ и $\operatorname{ord} a = P^m$.

Рассмотрим уравнение $\pi^k x = a$. Оно имеет решение $x = \rho a_{m+k} \in \{a_{m+k}\}$, Действительно, имеем $\alpha x = \pi^k x = \rho \pi^k a_{m+k} = \rho a m = a$, так как по теореме I, $\pi^k a_{m+k}$ является образующим циклического подуля порядка P^m, т.е. $\pi^k a_{m+k} = a_m$.

Теперь рассмотрим $\alpha x = a$, где $(\alpha, \pi) = R$. Тогда $(\alpha, \pi^m) = R$ потому, что π неприводимый. Следовательно найдутся такие $\mu, \nu \in R$, что

$$\mu\alpha + \nu\pi^m = 1, \ (1 \in R)$$

Тогда $\mu\alpha a + \nu\pi^m a = a$ Но $\operatorname{ord} a = P^m$, следовательно $\pi^m a = 0$
и поэтому $x = \mu a$ является искомым решением данного уравнения.

Итак уравнение $\alpha x = a$, $\alpha \neq 0$, всегда разрешимо в модуле типа P^∞, или всякий R —модуль типа P^∞ делимый. Теорема доказана.

§ 2. Периодический делимый модуль

Пусть M —данный R —модуль. Множество всех элементов ненулевых порядков из M называется периодической частью модуля M. Если M совпадает его периодической частью, то он называется периодическим модулем, если его периодическая часть содержит только нулевой элемент, то M называется модулем без кручения.

Лемма 5. *Пусть $P = (\pi)$ есть простой идеал главного кольца R. Множество F_p всех элементов периодической части F, порядки которых являются степенями идеала P, составляет R — подмодуль модуля M.*

Доказательство. Пусть $a, b \in F_p$, $\operatorname{ord} a = P^m = (\pi^m)$, $\operatorname{ord} b = P^n = (\pi^n)$ и пусть $m \geqslant n$. Имеем

$$\pi^m (a - b) = \pi^m a \pm \pi^m b = 0$$

следовательно $\pi^m \in \operatorname{ord} (a \pm b)$, отсюда $(\pi^m) \subseteq \operatorname{ord} (a \pm b)$. Так как R —главное кольцо, то $\operatorname{ord} (a \pm b) = (\alpha^k)$ скажем, тогда $\pi^m \in (\alpha^k)$, и так как π неприводимый, то откуда следует $\alpha = \pi$ и $k \leqslant m$, т.е. $\operatorname{ord} (a \pm b) = (\pi^k)$, $k \leqslant m$ или, $a \pm b \in F_p$

Беря произвольный элемент ρ из R, мы имеем

$$\pi^m (\rho a) = \rho (\pi^m a) = 0$$

следовательно $\pi^m \in \operatorname{ord} \rho a$, или $(\pi^m) \supseteq \operatorname{ord} \rho a$. Так как R — главное кольцо и π неприводимый, то $\operatorname{ord} \rho a = (\pi^k)$, $k \leqslant m$, т.е. $\rho a \in F_p$. Этим лемма 5 доказана.

Только что построенный подмодуль F_p называется примарным модулем, соответствующим простому идеалу P.

Лемма 6. *Пусть* $\{b_1\}$ *и* $\{b_2\}$ R — *подмодули циклического модуля* $\{a\}$, *и пусть* (β_1), (β_2) — *их порядки соответственно. Если* $(\beta_1, \beta_2) = R$ *то сумма подмодулей* $\{b_1\} + \{b_2\}$ *будет прямой и её порядком будет* (β_1, β_2).

Доказательство. Сначала докажем, что сумма $\{b_1\} + \{b_2\}$ будет прямой. Для этого, берём $c \in \{b_1\} \cap \{b_2\}$, и пусть $\operatorname{ord} c = (\gamma)$. Тогда $(\gamma) \supseteq (\beta_1)$, $(\gamma) \supseteq (\beta_2)$, следовательно $(\gamma) \supseteq (\beta_1, \beta_2) = R$, т.е. $(\gamma) = R$, поэтому $c = 0$, значит эта сумма будет прямой.

Теперь рассмотрим порядок этой прямой суммы. Пусть $\{b_1\} + \{b_2\} = \{d\}$ и пусть $\operatorname{ord} = (\delta)$. Мы имеем $\beta_1 \beta_2 d = \beta_1 \beta_2 (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) = 0$, следовательно $\beta_1 \beta_2 \in \operatorname{ord} d$, т.е. $(\beta_1, \beta_2) \supseteq (\sigma)$

С другой стороны, имеем $b_1 \in \{d\}$, $b_2 \in \{d\}$, следовательно $\delta b_1 = 0$, $\delta b_2 = 0$, т.е.

$\delta \in (\beta_1) \cap (\beta_2)$ или $(\delta) \subseteq (\beta_1) \cap (\beta_2)$

Отсюда следует

$$(\beta_1, \beta_2) \subseteq \delta \subseteq (\beta_1) \cap (\beta_2).$$

Пусть $\rho \in (\beta_1) \cap (\beta_2)$, тогда $\rho = \mu_1 \beta_1 = \mu_2 \beta_2$. Но так как $(\beta_1, \beta_2) = R$, то отсюда $\mu_1 = \mu'_1 \beta_2$, т.е. $\rho = \mu'_1 \beta_1 \beta_2$, следовательно $\rho \in (\beta_1 \beta_2)$. Поэтому $(\beta_1 \beta_2) = (\delta) = (\beta_1) \cap (\beta_2)$ и лемма доказана.

Лемма 7. *Если* R — *главное кольцо и* A — *такой подмодуль циклического модуля* B, *что* $\operatorname{ord} B = \operatorname{ord} A \neq (0)$, *то* $B = A$.

Доказательство. Так как R — главное кольцо, то можно предполагать, что $A = \{a\} \subseteq \{b\} = B$ и $\operatorname{ord} A = \alpha \neq (0)$, $\operatorname{ord} b = (\beta) \neq (0)$. Пусть $\alpha = \beta$, докажем, что $A = B$.

Так как $a \in \{b\}$, то предполагаем $a = \rho' b$. Тогда $A = Ra = R \rho' b = (\rho') b$.

По условию (α) $A = \alpha (\rho') b = (\alpha \rho') b = (0)$. С другой стороны, так как $\operatorname{ord} b = (\beta) = (\alpha)$, то $(\alpha) b = (\beta) b = \{0\}$. Ввиду максимальности порядков из этих равенств следует $(\alpha\rho') = (\alpha)$,

из этих равенств следует $(\alpha\rho) = (\alpha)$, следовательно $(\rho') = R$, т.е. $A = Rb = B$, то требовалось доказать.

Лемма 8. *Пусть* $M = \{a\}$ — *циклический* R — *модуль порядка* $P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_s^{n_s}$, *где* $P_1, P_2, \ldots, P_s$ *разные простые идеалы главного кольца* R. *Тогда* M *разлагается в прямую сумму циклических модулей, порядки которых являются степенями* $P_i^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. При $s=1$ лемма тривиальна. Пусть $s \geqslant 2$. Обозначим

$R_i = P_1^{n_1} \dots P_{i-1}^{n_{i-1}} P_{i+1}^{n_{i+1}} \dots P_s^{n_s}$, $i = 1,2,\dots, s$, т.е. $R_i = (\rho_i)$, где $\rho_i = \pi_1^{n_s} \dots$

$\pi_{i-1}^{n_{i-1}} \pi_{i+1}^{n_{i+1}} \dots \pi_s^{n_s}$, если $P_i = (\pi_i)$ для $i = 1, \dots, s$.

Рассмоторим элемент $\rho_i a$. Его порядком будет

$$\operatorname{ord} \rho_i a = P_i^{n_i} = (\pi_i^{n_i}).$$

Это следует из неприводимости элементов $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s$. Итак циклические R — подмодули $\{\rho_i a_i\}$ соответственно имеют порядки $(\pi_i^{n_i})$, $i = 1, \dots, s$.

Применяя лемму 5 и индукцию по s, получим

$$\{\rho_i a_i\} \cap \sum_{j \neq i} \{\rho_j a_j\} = \{0\}$$

т.е. сумма $\sum_{i=1}^{s} \{\rho_i a_i\}$ является прямой суммой. Применяя те же рассуждения, видим, что порядком этой прямой суммы будет

$$(\pi_1^{n_1})(\pi_2^{n_2}) \dots (\pi_s^{n_s}) = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_s^{n_s} = \operatorname{ord} M.$$

Применяя лемму 7, получим $M = \sum_{i=1}^{s} \{\rho_i a_i\}$ что требовалось доказать.

Лемма 9. *Если* R *является главным кольцом, то всякий периодический* R — *модуль разлагается в прямую сумму примарных подмодулей по разным простым идеалам.*

Доказательство. Пусть F — периодический R — модуль. По лемме 5, подмножество всех элементов порядков $P_i^{n_i}$ из F где $P_i = (\pi_i)$ — некоторый главный идеал кольца R, n_i — неотрицательное целое число, составляет примарный R — подмодуль F_{P_i}. Рассмотрим прямую сумму $\sum F_{P_i}$ для всех возможных разных иростых идеалов P_i.

Сначала докажем, что это прямая сумма, т.е. $F_{P_j} \cap (\sum_{i \neq j} F_{P_i}) = \{0\}$. Действительно, иусть d есть элемент из этого пересечения и $\operatorname{ord} d = (\delta)$, тогда $\operatorname{ord} d = (\delta) \supseteq (\pi_j^{n_j})$ так как $d \in F_{P_j}$. С другой стороны $d \in \sum_{i \neq j} F_{P_i}$, то мы имеем, скажем, $d = \sum_{i \neq j} d_i$, где $d_i \in F_{P_i}$, $i \neq j$, и следовательно $\operatorname{ord} d_i \supseteq (\pi_i^{n_i})$, $i \neq j$. Отсюда следует

$\operatorname{ord} d=(\delta)\supseteq(\prod_{i\neq j}\pi_i^{n_i})$. По условию теоремы, все P_i являются разными простыми идеалами т.е. все π_i являются разными неприводимыми элементами, следовательно $(\pi_i, \pi_j)=R$ если $i\neq j$, и $(\pi_j^{n_j}, \prod_{i\neq j}\pi_i^{n_i})=R$. Отсюда следует $R\supseteq(\delta)\supseteq(\pi_j^{n_j}\prod_{i\neq j}\pi_i^{n_i})=R$. Поэтому $(\delta)=R$, т.е. $d=0$, и рассматриваемая сумма является прямой.

Теперь докажем, что $F=\Sigma F_{P_i}$. Действительно, пусть f — любой элемент из F и $\operatorname{ord} f=(\varphi)$. Так как R — главное кольцо, то имеем $\varphi=\varepsilon\pi_1^{n_1}\ldots\pi_s^{n_s}$, где ε делитель единицы, π_i — неприводимые элементы. Следовательно $\operatorname{ord} f=(\varphi)=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\ldots P_s^{n_s}$, где $P_i=(\pi_i)$ являются простыми идеялами, $n_i>0$, $i=1, 2, \ldots, s$ По лемме 8, циклический подмодуль $\{f\}$ может быть разложен в прямую сумму циклических подмодулей порядков $P_1^{n_1}, P_2^{n_2},\ldots, P_s^{n_s}$, т.е. $f\in\Sigma F_{P_i}$, отсюда следует $F=\Sigma F_{P_i}$, ч.т.д.

Теорема 3. *Если* R *является главным кольцом, то всякий делимый периодический* R — *модуль разлагается в прямую сумму* R — *подмодулей типов* P^∞ *по некоторым простым идеалам кольца* R.

Доказательство. По лемме 9, периодический модуль F разлагается в прямую сумму примарных подмодулей. F является делимым модулем, поэтому все его прямые слагаемые (следовательно примарные подмодули) также являются делимыми подмодулями. Итак для доказательства теоремы, достаточно доказать, что всякий примарный R — модуль F_p по некоторому простому идеалу $P=(\pi)$ разлагается в прямую сумму R — подмодулей типов P^∞

Сначала докажем, что каждый элемент из F_p принадлежит R — подмодулю типа P^∞. Действительно, пусть а — произвольный элемент из F_p и пусть $\operatorname{ord} a=P^k=(\pi^k)$. Положим

$$a_1=\pi^{k-1}a,\ a_2=\pi^{k-2}a\ ,\ldots,\ a_{k-1}=\pi,a\ \ a_k=a$$

затем берём a_{k+1} одним из прообразов элемента a при эндоморфизме модуля F_p, соответствующем оператору π, т.е. берём такой элемент a_{k+1}, что $\pi a_{k+1}=a_k$ (так как F_p делим, то такой элемент a_{k+1} существует). Общим образом, если элемент a_n, $n\geqslant k$, уже выбран, то берём элемент a_{n+1} одним из прообразов элемента a_n при эндоморфизме π, т.е. $\pi a_{n+1}=a_n$. Итак построен содержащий элемент a R — модуль типа P^∞, Это объединение возрастающей последовательности циклических подмодулей

$$\{0\}\subset\{a_1\}\subset\ldots\subset\{a_k\}\subset\{a_{k+1}\}\subset\ldots$$

Следовательно, обычным трансфинитным процессом можно выбрать в P_p множество таких R — подмодулей типов P^∞, что их сумма F'_p является прямой суммой и в F_p нельзя выбрать подмодуль типа P^∞, пересечение которой с F'_p было бы равно нулю. Покажем, что F'_p совпадает с F_p.

Действительно, пусть имеется элемент a из F_p не лежащий в F'_p. Если $F'p \cap \{a\} = 0$, то, включая элемент a в подмодуль типа P^∞, мы пришли бы к противоречию с определением подмодуля F'_p. Если же $\{a\} \cap F'_p \neq \{0\}$, т.е. существует некоторое натуральное число k, $\pi^k a \in F'_p$ но $\pi^{k-1} a \notin F'_p$, то ввиду делимости модуля F'_p (прямая сумма модулей типа P^∞ делима), существует такой элемент $a' \in F'_p$, что $\pi^k a' = \pi^k a$. Тогда $\pi^k (a - a') = 0$, т.е. $a - a' \in F_p$, причём $a - a \notin F'_p$ так как $a' \in F'_p$ и $\pi^{k-1} a \notin F'_p$. Мы также имеем $\{a - a'\} \cap F'_p = \{0\}$.

Действительно, пусть это пересечение содержало бы ненулевой элемент b то, ввиду неприводимости элемента π нашлось бы такое $m < k$, что $\pi^m (a - a') = b$ следовательно $\pi^m a = \pi^m a' + b \in F'_p$, где и мы пришли бы к противоречию с предположением π^{k-1} $a \notin F'_p$ Итак второй случай приведён к первому, так как $a - a' \in F_p$, $a - a' \notin F'_p$, $\{a - a'\} \cap F'_p = \{0\}$. Теорема доказана.

Лемма 10. *Если* R *является областью целостности, то периодическая часть делимого* R *— модуля также будет делимым* R *— подмодулем.*

Доказательство. Действительно, пусть через F обозначаем периодическую часть R — модуля M. Тогда для произвольных элементов x, y из F, существуют такие ненулевые элементы α, β из R, что $\alpha x = \beta y = 0$. Так как R является областью целостности, мы имеем $\alpha\beta \neq 0$, с другой стороны имеем $\alpha\beta\ (\lambda x + \mu y) = 0$ для всех μ, $\lambda \in R$, следовательно F является подмодулем R — модуля M.

Теперь докажем второе утверждение леммы. Пусть уравнение $\rho x = a$, $\rho \in R$, $\rho \neq 0$, $a \in F$, обладает решением $x \in M$. Покажем, что $x \in F$. Так как $a \in F$, то существует такой $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, что $\alpha a = 0$. Следовательно $(\alpha\rho)\ x = \alpha a = 0$, где $\alpha\rho \neq 0$ потому, что R является областью целостности. Таким образом $x \in F$ и лемма доказана.

Объединяя теорему 3 и лемму 10, нами доказана

Теорема 4. *Если* R *является главной областью, то периодическая часть делимого* R *— модуля разлагается в прямую сумму* R *— подмодулей типов* P^∞ *по некоторым простым идеалам кольца* R.

§ 3. Строение делимых R — модулей

Лемма 11. *Пусть R является главной областью. Тогда периодическая часть делимого R — модуля M будет прямым слагаемым R — модуля M, т.е. $M = F \dot{+} H$, где H является подмодулем без кручения.*

Доказательство: Пусть R является главной областью. Тогда R — модуль M делимый тогда и только тогда, когда M является инъективным R — модулем (см. [2]) по следующему смыслу: R — модуль M называется инъективным если всякий R — гомоморфизм R — подмодуля B R — модуля A в R — модуль M может быть продолжен до R — гомоморфизма модуля A в M.

Тогда короткая точная последовательность R — модулей

$$0 \to F \to M \to M/F \to 0$$

расщепляется, т.е. R — модуль M разлагается в прямую сумму $M = F \dot{+} H$, где F является периодической частью R — модуля M, а H является R — подмодулем без кручения. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим строение R — подмодуля без кручения H делимого R — модуля M, указанного в лемме 11. Так как H является прямым слагаемым делимого R — модуля, то H также делим. Обозначим через $\overline{R}$ поле отношений области целостности R. Как мы знаем, каждый элемент из $\overline{R}$ имеет вид $\overline{(\alpha, \beta)}$, где $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$. Снабжаем R — модулю H структурой $\overline{R}$ — векторного пространства следующим образом: Берём любой элемент $\overline{(\alpha, \beta)} \in \overline{R}$ и произвольный элемент $x \in H$. Так как H является R — подмодулем, то $\alpha x \in H$, и так как H является делимым R — модулем без кручения, то для $\beta \in R$, $\beta \neq 0$, существует такой единственный элемент $y \in H$, что $\beta y = \alpha x$. Положим $\overline{(\alpha, \beta)}\, x = y$. Проверим нетрудно, что для H все аксиомы о $\overline{R}$ — векторном пространстве выполняются. Так как H является векторным пространством над $\overline{R}$, то оно обладает базисом и поэтому

$$H = \dot{\sum_{i \in I}} \overline{R}_i$$

где $\overline{R}_i \cong \overline{R}$. Если называем R — *модулем типа* $\overline{R}$ всякий R — модуль, R — изоморфный R — модульню $\overline{R}$, то нами доказана:

Лемма 12. *Если R является главной областью, то часть без кручения делимого R — модуля разлагается в прямую сумму R — модулей типов $\overline{R}$.*

Теперь, объединяя теорему 4, леммы 11 и 12, получаем главный результат настоящей работы:

Теорема 5. *Если R является главной областью, то всякий делимый R — модуль разлагается на прямую сумму R — модулей типов $\overline{R}$ и R — модулей типов P^{∞} по некоторым простым идеалам P кольца R.*

Обобщение некоторых других результатов из [1], [6], [7], [8], [9] будет изложено в другом случае.

Пользуясь случаем, выражаем искреннюю благодарность доктору Хоанг Суан Шинь за ценные советы при корректуре этой статьи.

Поступило в редакцию 19-XII-1975

ДИТЕРАТУРА

1. Baumslag G. *Some aspects of groups with unique roots* — Acta Math. 104 (1960). 217 — 303
2. Faith C. *Lectures on injective modules and quotientient rings* — Springer Verlag, Berlin — Heidal berg — New York, 1967.
3. Курош А.Г. *Теория групп.* 3е изд. « Наука », Москва, 1967.
4. Lang S. Algebra, (bản tiếng Viet : NXBĐHTHCN, Ha noi, 1974 — 1975).
5. Zariski O., Sameul P. *Commutative algebra I, II* русс. пер. Ил., Москва, 1963.
6. Черников С.Н. К. *теории полных групп.* Мат. сб. 22 (1948), 319 — 348, 455 — 456.
7. Хоанг Ки : S — *полные группы* SR — *группы*, SD — *группы*. Сиб. мат. ж. Ю : 6, 1969. 1427 — 1430.
8. Хоанг Ки. *Расширения и нильпотентные произведения сильно П — полных* ПSR —. ПSD — *групп* Укр. мат. ж. 22 : 4, 1970, 566 — 571.
9. Хоанг Ки. *Гиперцентры и сильно* П — *полные*, ПSR —, ПSD — *группы*. Acta Sci : Vietnam, Sect. Sci. Math. Phys. X (1974).