ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 2, N⁰ 1 (1977)

О ФОРМУЛАХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ В МЕТОДАХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

TẠ VĂN ĐĨNH

Политехнический институт — Ханой.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи науки и техники приводят к краевым задачам математической физики. Для численного решения таких задач распространяются методы конечных разностей. Основными требованиями к одной разностной схеме являются сходимость, устойчивость, экономичность количества вычислений и эффективность оценки погрешности. Как известно, сходимость следует из устойчивости и аппроксимации ([1]), в то время как третье и четвёртое требования независимы от первых. Для экономичности количества вычислений в случае многомерных краевых задач успешно применяются методы дробных шагов. Для некоторых простых задач построят также схемы высокого порядка точности. Но это сводит вообще к сложным схемам. Другой инициативой является использовать так называемые формулы асимптотического разложения погрешности (в кратких словах «ф.а.р.п.»). Это было выяснено достаточно полно в случае задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений ([3], [4], [5], [6]). Аналогичные вопросы для краевых задач также затронуты в работах [7], [8], там построят ф.а.р.п. в банаховых пространствах и применяют результаты к некоторым простым краевым задачам.

Наша работа посвящена исследованию ф.а.р.п. для некоторых нелинейных краевых задач эллиптического типа. Мы изучаем сначала задачу в нормированных пространствах, потом краевые задачи в общих постановках и наконец конкретные краевые задачи для нелинейных одномерных и многомерных дифференциальных уравнений эллиптического типа.

1. ОБЩИЕ Ф. А. Р. П.

§ 1. Ф. а. р. п. в нормированных пространствах.

1.1. *Определения.* Пусть $\mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$ — нормированные пространства с нормами $\|.\|_i$, $\mathcal{A}$ — отображение из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$. Рассмотрим операторное уравнение

$$(1.1) \qquad \mathcal{A}(u) = 0 \quad , \quad u \in \mathcal{B}_1.$$

Предположим, что оно имеет единственное решение.

Пусть $\{h\}$ — последовательность положительных чисел монотонно сходящаяся к нулю. Предположим, что каждому h соответствуют конечномерные пространства $\mathcal{B}_{ih}$ с нормами $\|.\|_{ih}$, линейные операторы $\mathcal{P}_i^h$ из $\mathcal{B}_i$ в $\mathcal{B}_{ih}$, оператор $\mathcal{A}_h$ из $\mathcal{B}_{1h}$ в $\mathcal{B}_{2h}$, так что выполнены следующие условия :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \text{размерность } \mathcal{B}_{ih_1} < \text{размерность } \mathcal{B}_{ih_2} \\ \text{когда и только когда } h_1 > h_2 \end{cases}$$

$$(1.3) \qquad \lim_{h\to 0} \left\| \mathcal{P}_i^h u \right\|_{ih} = \| u \|_i \ , \ u \in \mathcal{B}_i$$

Метод конечных разностей для приближённого решения уравнения (1.1) заключается в построении пространств $\mathcal{B}_{ih}$, операторов $\mathcal{P}_i^h$ и операторы $\mathcal{A}_h$ удовлетворяющих условиям (1.2) (1.3) и в замене уравнения (1.1) уравнением

$$(1.4) \qquad \mathcal{A}_h(v^h) = 0 \quad , \quad v^h \in \mathcal{B}_{1h}.$$

Этот метод обозначим через $\{\mathcal{A}_h\}$. Предположим, что уравнение (1.4) имеет единственное решение. Тогда

$$(1.5) \qquad e(h) = v^h - \mathcal{P}_1^h u \in \mathcal{B}_{1h}$$

называется погрешностью метода. Каждому h соответствует одно и только одно число $\|e(h)\|_{1h}$ которое мы называем абсолютной погрешностью метода. Если $\|e(h)\|_{1h} \to 0$ при $h \to 0$ то говорят, что метод $\{\mathcal{A}_h\}$ сходится. Если $\|e(h)\|_{1h} = 0(h^r)$, $r > 0$ то говорят, что метод сходится со скоростью $0(h^r)$ или имеет точность порядка r. Если существуют числа r_j $(0 < r_0 < r_1 < \dots < r_{n+1})$ и элементы $w_j \in \mathcal{B}_1$, так что

$$(1.6) \qquad \left\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=}^{n} h^{r_j} w_j \right\|_{1h} = 0\ (h^{r_{n+1}}),$$

то говорят, что погрешность $e(h)$ асимптотически разложима по h с показателями r_j $(j = \overline{0, n+1})$ и называют (1. 6) формулой асимптотического разложения погрешности (ф.а.р.п.) с показателями $r_j (j = \overline{0, n+1})$.

1.2. *Существование ф. а. р. п. с показателями* $r_0 + jr$.

Пусть u — решение уравнения (1.1) и v^h — решение уравнения (1.4).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) Метод $\{\mathcal{A}_h\}$ *имеет точность порядка* r_0, $r_0 > 0$:

(1.8) $$\|e(h)\|_{1h} = \left\| v^h - \mathcal{P}_1^h u \right\|_{1h} = O\,(h^{r_0}),\ r_0 > 0.$$

2) Существуют независящие от h *операторы* $F_j\,(u) \in \mathcal{B}_2$ *такие, что*

$$\left\| \mathcal{P}_2^h \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}_h\,(\mathcal{P}_1^h u) - \mathcal{P}_2^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} F_j\,(u) \right\|_{2h} =$$

$$= O(h^{r_0+(n+1)r}) \quad , \quad r > 0,\ n \geqslant 1.$$

3) Существует линейный оператор A_h *из* $\mathcal{B}_{1h}$ *в* $\mathcal{B}_{2h}$ *такой, что если*

(1.9) $$\left\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{m-1} h^{r_0+jr} w_j \right\|_{1h} = O(h^{r_0+mr}) \quad , \quad m \leqslant n,$$

где $w_j \in \mathcal{B}_1$ *то существуют независящие от* h *операторы* $\Phi_j\,(u) = \Phi_j\,(u, w_0, \ldots, w_{j-1}) \in \mathcal{B}_2$ *такие, что*

$$\left\| \mathcal{A}_h\,(v^h) - \mathcal{A}_h\,(\mathcal{P}_1^h u) - A_h e(h) - \mathcal{P}_2^h \sum_{j=1}^{m} h^{r_0+jr} \Phi_j(u) \right\|_{2h} = O(h^{r_0+(m+1)r})$$

При $m = 0$ *подразумевается, что* $w_j \equiv 0$, $\Phi_j \equiv 0$.

4) Уравнение

$$A_h z_h = \varphi_h,\ \varphi_h \in \mathcal{B}_{2h},\ z_h \in \mathcal{B}_{1h}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее

(1.10) $$\| z_h \|_{1h} \leqslant M \| \varphi_h \|_{2h},\ M = \mathrm{const} > 0.$$

5) Существует линейный опоратор A *из* $\mathcal{B}_1$ *в* $\mathcal{B}_2$, *такой, что уравнение* $Aw = \varphi$, $\varphi \in \mathcal{B}_2$, $w \in \mathcal{B}_1$ *имеет единственное решение, причём*

6) Существуют независящие от h *операторы* $G_j\,(w) \in \mathcal{B}_2$ *такие, что*

$$\| A_h(\mathcal{P}_1^h w) - \mathcal{P}_2^h A w - \mathcal{P}_2^h \sum_{j=1}^{n} h^{jr} G_j(w) \|_{2h} = O\,(h^{(n+1)r}).$$

Тогда существуют независящие от h *элементы* $w_j \in \mathcal{B}_1$ *такие, что имеет место ф.а.р.п. вида*

(1.11) $$\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} w_j \|_{1h} = O\,(h^{r_0+(n+1)r}).$$

Элементы w_j определяются последовательно отношениями

$$A w_j = F_j(u) - \Phi_j(u, w_0,\dots,w_{j-1}) - G_j(w_0) - \tag{1.12}$$

$$- G_{j-1}(w_1) - \dots - G_1(w_{j-1}).$$

Доказательство. Ввиду условии 1) положим $h^{-r_0} e(h) = e_0$. Тогда из условий (2и 3) и из (1.3) следует

$$\| A_h e_0 - \mathcal{P}_2^h F_0(u)\|_{2h} = 0\,(h^r).$$

Но по (1.12) имеем $F_0(u) = Aw_0$. Итак, ввиду условии 6) получим

$$\| A_h(e_0 - \mathcal{P}_1^h w_0)\|_{2h} = 0\,(h^r).$$

Поэтому условие 4) даёт

$$\| e_0 - \mathcal{P}_1^h w_0\|_{1h} = 0\,(h^r),$$

т.е.

$$\| e(h) - h^{r_0}\, \mathcal{P}_1^h w_0\|_{1h} = 0\,(h^{r_0+r}).$$

Теперь пусть дано, что

$$\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{m} h^{r_0+jr} w_j\|_{1h} = 0(h^{r_0+mr}),\ m \leqslant n,$$

где $w_j(j = \overline{0, m-1})$ задаются по (1.12). Докажем, что

$$\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{m} h^{r_0+jr} w_j\|_{1h} = 0\,(h^{r_0+(m+1)r}), \tag{1.13}$$

где w_m задаётся и по (1.12), Для этого положим

$$e_m = h^{-r}(e_{m-1} - \mathcal{P}_1^h w_{m-1}),\ m \geqslant 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_h e_m &= h^{-r} A_h (e_{m-1} - \mathcal{P}_1^h w_{m-1}) \\ &= h^{-r} A_h\, e_{m-1} - h^{-r} A_h\, \mathcal{P}_1^h w_{m-1} \\ &= h^{-2r} A_h (e_{m-2} - \mathcal{P}_1^h w_{m-2}) - h^{-r} A_h \mathcal{P}_1^h w_{m-1} \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= h^{-mr} A_h (e_0 - \mathcal{P}_1^h w_0) - h^{-(m-1)r} A_h \mathcal{P}_1^h w_1 - \\ &- h^{-(m-2)r} A_h\, \mathcal{P}_1^h w_2 - \dots - h^{-r} A_h \mathcal{P}_1^h w_{m-1}. \end{aligned}$$

Из условий 2) и 3) следует

$$\| A_h e(h) - h^{r_0}\mathcal{P}_2^h F_0(u) - \mathcal{P}_2^h \sum_{j=1}^{m} h^{r_0+jr}(F_j(u) - \Phi_j(u))\|_{2h} = 0\,(h^{r_0+(m+1)r})$$

где $m \leqslant n$. Откуда получаем

$$\| A_h e_0 - \mathcal{P}_2^h F_0(u) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=1}^{m} h^{jr}(F_j(u) - \Phi_j(u)\|_{2h} = 0\,(h^{(m+1)r})$$

Из условия 6) следует

$$\|A_h \mathcal{P}_1^h w_s - \mathcal{P}_2^h A w_s - \mathcal{P}_2^h \sum_{j=1}^{n} h^{jr} G_j(w_s)\|_{2h} = 0(h^{(n+1)r})$$

где $Aw_s(s = \overline{0, m})$ задаются по (1.12).

От всего предыдущего можно выводить, что

$$\| A_h(e_m - \mathcal{P}_1^h w_m)\|_{2h} = 0\,(h^r)$$

Тогда условие 4) даёт

$$\|e_m - \mathcal{P}_1^h\, w_m\|_{1h} = 0(h^r)\,,\ m \leqslant n.$$

Отсюда следует (1.13), что и требует доказать.

Теперь пусть $\mathring{\mathcal{B}}_{1h}$ — подпространство пространства $\mathcal{B}_{1h}$ и Q^h — линейный оператор проектирующий $\mathcal{B}_{1h}$ в $\mathring{\mathcal{B}}_{1h}$. Рассуждая по аналогии с предыдующим, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, причём отношения (1.8) — (1.10) заменяются следующими.*

$$\|Q^h(e(h))\|_{1h} = 0\,(h^{r_0})$$

$$\| Q^h \Big\{ e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{m-1} h^{r_0+jr} w_j \|_{1h} = 0\,(h^{r_0+mr})$$

$$\|Q^h z_h\|_{1h} \leqslant M \|\varphi_h\|_{2h}$$

Тогда имеет место ф.а.р.п. вида

$$\| Q^h \Big\{ e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} w_j \Big\}\|_{1h} = 0\,(h^{r_0+(n+1)r})$$

где w_j определяются теми же отношениями (1.12).

1.3. *О единственности ф.а.р.п.* — Доказано, что если существуют две формулы

$$\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_j} w_j \|_{1h} = 0\,(h^{r_{n+1}})$$

$$\| e(h) - \mathcal{P}_1^h \sum_{j=0}^{n'} h^{r'_j} w'_j \|_{1h} = 0\,(h^{r'_{n'}+1})$$

где $w_j \neq 0$ и $w'_j \neq 0$ и $n' \leqslant n$ то обязательно имеем $r'_j = r_j$, $w'_j = w_j$ $(j = \overline{0, n'})$.

§. 2. ф.а.р.п. для общей краевой задачи.

2.1. *Введение.* Теоремы 1 и 2 могут ирименить к дифференциальным, интегральным и интегро — дифференциальным уравнениям. Здесь мы будем формулировать соответствующие варианты в случае краевых задач. Пусть Ω — область изменения независимого переменного $x = (x_1, \dots, x_p)$ с границей $\Gamma = \bigcup_{s=0}^{\sigma} \Gamma^s$. Пусть $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ — классы функций определённых на $\Omega \bigcup \Gamma$ и $\mathcal{V}_s$ — класс функций на Γ^s. — Пусть L и l^s — дифференциальные операторы такие, что если $u \in \mathcal{U}_1$ то $L(u) \in \mathcal{U}_2$ и $l^s(u) \in \mathcal{V}_s$. Рассмотрим задачу

$$(2.1) \qquad \begin{matrix} L(u) = 0 & x \in \Omega \\ l^s(u) = 0 & x \in \Gamma^s, \quad s = \overline{0, \sigma} \end{matrix}$$

в предположении, что она имеет единственное решение u.

Пусть $\{h\}$ — последовательность положительных чисел сходящаясь к нулью. Пусть $\{\Omega_h\}$ — последовательность дискретных множеств точек (узлов) $\in \Omega \bigcup \Gamma$, расположение таких точек зависит от h, так что чем меньше h, тем гуще Ω_h. Называем Ω_h сеткой на $\Omega \bigcup \Gamma$ и h шагом сетки. Неизвестная функция $u(x)$ заменяется сеточной функцией $v^h(x)$ определённой на Ω_h. Чтобы определить эту функцию рассмотрим дискретные множества $\mathring{\Omega}_h \subset \Omega$ и $\Gamma^s_h \subset \Gamma^s$, $s = \overline{0, \sigma}$, так что число точек $\in \mathring{\Omega}_h$ и $\in \Gamma^s_h$ равно числу точек $\in \Omega_h$. Функции и производные входящие в L и l^s при каждой точке $\bar{x} \in \mathring{\Omega}_h$ или $\in \Gamma^s_h$ заменяются выражениями от $v^h(x)$ при некоторых зависящих от $\bar{x}$ узлов x сетки Ω_h Таким образом в соответствии с каждой сеточной функцией v^h на Ω_h подставим сеточные выражения $L_h(v^h)$ и $l^s_h(v^h)$, так что имеем сеточную задачу (разностную схему) на Ω_h:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} L_h(v^h) = 0 & \bar{x} \in \mathring{\Omega}_h \\ l^s_h(v^h) = 0 & \bar{x} \in \Gamma^s_h \end{cases}$$

Предположим, что она имеет единственное решение v^h.

Теперь формулируем задачи (2.1) и (2.2) в терминах нормированных пространств. Введём в $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_s$ нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{U}_i}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_s}$ и положим $\mathcal{B}_1 = \mathcal{U}_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_0 \times \times \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_\sigma$ с нормами

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_1}, \ \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_2} + \sum_{s=0}^{\sigma} \|\cdot\|_{\mathcal{V}_s}.$$

Пусть $\mathcal{A} = \{L, l^0, \ldots, l^\sigma\}$. Тогда дифференциальная задача (2.1) запишется в виде

$$\mathcal{A}(u) = 0, \ u \in \mathcal{B}_1$$

Для разностной схемы (2.2) построим пространства

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_{1h} = \{ v^h(x), & x \in \Omega_h \} \\ \mathcal{U}_{2h} = \{ v^h(x), & x \in \mathring{\Omega}_h \} \\ \mathcal{V}_{sh} = \{ v^h(x), & x \in \Gamma_h^s \} \end{cases}$$

Тогда L_h и l_h^s определёны на $\mathcal{U}_{1h}$. Введём в $\mathcal{U}_{ih}$, $\mathcal{V}_{sh}$ нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{U}_{ih}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_{sh}}$. Пусть проектирующие операторы P_h^i, R_s^h:

$$(2.4) \quad \begin{cases} (P_1^h u)(x) = u(x), \ x \in \Omega_h, \ u \in \mathcal{U}_1 \\ (P_2^h u)(x) = u(x), \ x \in \mathring{\Omega}_h, \ u \in \mathcal{U}_2 \\ (R_s^h u)(x) = u(x), \ x \in \Gamma_h^s, \ u \in \mathcal{V}_s \end{cases}$$

Предположим, что нормы в $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_s$ и $\mathcal{U}_{ih}$, $\mathcal{V}_{sh}$ согласованны:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0} \|P_h^i u\|_{\mathcal{U}_{ih}} - \|u\|_{\mathcal{U}_i}, \ u \in \mathcal{U}_i \\ \lim\limits_{h \to 0} \|R_s^h u\|_{\mathcal{V}_{sh}} = \|u\|_{\mathcal{V}_s}, \ u \in \mathcal{V}_s \end{cases}$$

Положим $\mathcal{P}_1^h = P^h$, $\mathcal{P}_2^h = \left\{P_2^h, R_0^h, \ldots, R_\sigma^h\right\}$

и $\mathcal{B}_{1h} = \mathcal{U}_{1h}$, $\mathcal{B}_{2h} = \mathcal{U}_{2h} \times \mathcal{V}_{oh} \times \mathcal{V}_{1h} \times \ldots \times \mathcal{V}_{oh}$

с нормами $\|\cdot\|_{1h} = \|\cdot\|_{u_{1h}}$, $\|\cdot\|_{2h} = \|\cdot\|_{u_{2h}} + \sum\limits_{s=0}^{\sigma} \|\cdot\|_{v_{sh}}$.

Итак условие (1.3) выполнено. Пусть далее $\mathcal{A}_h = \left\{L_h, l_h^0, \ldots, l_h^\sigma\right\}$ Тогда разностная задача (2.2) запишется в виде

$$\mathcal{A}_h(v^h) = 0, \ v^h \in \mathcal{B}_{1h}.$$

Применяя теорему 1 получим следующую теорему.

2.2. **Теорема 3.** *Рассмотрим дифференциальную задачу* (2.1) *на* $\Omega \cup \Gamma$, *пространства* $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_s$ *разностную задачу* (2.2) *на* Ω_h, *множества* $\mathring{\Omega}_h$ *и* Γ_h^s *и пространства* $\mathcal{U}_{ih}$, $\mathcal{V}_{sh}$.

Пусть нормы в $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_s$ *и* $\mathcal{U}_{ih}$, $\mathcal{V}_{sh}$ *согласованны по* (2.5). *Пусть и единственное решение задачи* (2.1) $\mathcal{V}^h$ — *единственное решение задачи* (2.2). *Пусть выполнены следующие условия :*

1) $$\| e(h) \|_{\mathcal{U}_{1h}} = \| v^h - P_1^h u \|_{\mathcal{U}_{1h}} = O(h^{r_0}), \;\; r_0 > 0$$

2) *Существуют независящие от* h *функции* $F_j^{\Omega}(u) \in \mathcal{U}_2$ *и* $F_j^s(u) \in \mathcal{V}_s$ *такие, что*

$$\| P_2^h L(u) - L_h(P_1^h u) - P_2^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} F_j^{\Omega}(u) \|_{\mathcal{U}_{2h}} = 0\,(h^{r_0+(n+1)r}),$$

$$\| R_s^h \; l^s(u) - l_h^s(P_1^h u) - R_s^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} F_j^s(u) \|_{\mathcal{V}_{sh}} = 0\,(h^{r_0+(n+1)r}), r > 0,$$

$$s = \overline{0,\sigma}, \;\; n \geqslant 1$$

3) *Существуют линейные операторы* $\wedge_h$ *из* $\mathcal{U}_{1h}$ *в* $\mathcal{U}_{2h}$ *и* λ_s^h *из* $\mathcal{U}_{1h}$ *в* $\mathcal{V}_{sh}$ *такие, что если*

$$\| e(h) - P_1^h \sum_{j=0}^{m-1} h^{r_0+jr} w_j \|_{\mathcal{U}_{1h}} = 0\,(h^{r_0+mr}), \;\; m \leqslant n \text{ где } w_j \in \mathcal{U}_1 \text{ то}$$

существуют независящие от h *операторы*

$$\Phi_j^{\Omega}(u(x)) = \Phi_j^{\Omega}(u(x), w_0(x), \ldots, w_{j-1}(x)) \in \mathcal{U}_2 \quad \text{и}$$

$$\Phi_j^s(u(x)) = \Phi_j^s(u(x), w_0(x), \ldots, w_{j-1}(x)) \in \mathcal{V}_s \text{ такие, что}$$

$$\| L_h(v^h) - L_h(P_1^h u) - \wedge_h e(h) - P_2^h \sum_{j=1}^{m} h^{r_0+jr} \Phi_j^{\Omega}(u) \|_{\mathcal{U}_{2h}} = O\,(h^{r_0+(m+1)r}),$$

$$\| l_h^s(v^h) - l_h^s(P_1^h u) - \lambda_h^s \; e(h) - R_s^h \sum_{j=1}^{m} h^{r_0+jr} \Phi_j^s(u) \|_{\mathcal{V}_{sh}} = O\,(h^{r_0+(m+1)r}),$$

$$s = \overline{0,\sigma}$$

$$(w_j = 0, \; \Phi_j^{\Omega} = 0, \; \Phi_j^s = 0 \text{ при } m = 0)$$

4) *Задача* $\wedge_h z_h = \varphi_h^{\Omega} \in \mathcal{U}_{2h}$; $\lambda_h^s z_h = \varphi_h^s \in \mathcal{V}_{sh}$ *имеет единственное решение, причём имеем*

$$\| z_h \|_{\mathcal{U}_{1h}} \leqslant M \left\{ \| \varphi_h^{\Omega} \|_{\mathcal{U}_{2h}} + \sum_{s=0}^{\sigma} \| \varphi_h^s \|_{\mathcal{V}_{sh}} \right\}, \; M = \text{const} > 0$$

5) *Существуют линейные операторы* $\wedge$ *и* λ^s: $\wedge w \in \mathcal{U}_2$ *и* $\lambda_w^s \in \mathcal{V}_s$ *при* $w \in \mathcal{U}_1$ *такие, что задача*

$\wedge w = \varphi^{\Omega}, \; x \in \Omega\,; \; \lambda^s w = \varphi^s, \; x \in \Gamma^s$ *имеет единственное решение* $w \in \mathcal{U}_1$, *причём*

6) *Существуют независящие от* h *функции* $G_j^{\Omega}(w(x)) \in \mathcal{U}_2$ *и* $G_j^s(w(x)) \in \mathcal{V}_s$ *такие, что*

$$\| \Lambda_h P_1^h w - P_2^h \Lambda w - P_2^h \sum_{j=1}^{n} h^{jr} G_j^{\Omega}(w) \|_{\mathcal{U}_{2h}} = O(h^{(n+1)r})$$

$$\| \lambda_h^s P_1^h w - R_s^h \lambda^s w - R_s^h \sum_{j=1}^{n} h^{jr} G_j^s(w) \|_{\mathcal{V}_{sh}} = O(h^{(n+1)r})$$

Тогда имеет место ф.а.р.п. вида

$$\| e(h) - P_1^h \sum_{j=0}^{n} h^{r_0+jr} w_j \|_{\mathcal{U}_{1h}} = O(h^{r_0+(n+1)r}) \tag{2.6}$$

где w_j *определяются последовательно отношениями*

$$\Lambda w_j = F_j^{\Omega}(u) - \Phi_j^{\Omega}(u, w_0, \dots, w_{j-1}) - G_j^{\Omega}(w_0) - G_{j-1}^{\Omega}(w_1) - \dots - G_1^{\Omega}(w_{j-1})$$

$$\lambda^s w_j = F_j^s(u) - \Phi_j^s(u, w_0, \dots, w_{j-1}) - G_j^s(w_0) - G_{j-1}^s(w_1) - \dots - G_1^s(w_{j-1}).$$

§ 3. О применении ф.а.р.п.

3.1. *Применение для повышения порядка точности.* Рассматриваем разностную задачу (2.2) на $m+1$ сетках $\Omega_{h/2^i}$, $i = \overline{0, m}$, $m \leqslant n$ при условии

$$\Omega_{h/2^i} \subset \Omega_{h/2^{i+1}} \tag{3.1}$$

Из (2.6) и (3.1) следует

$$\| v^{h/2^i} - P_1^{h/2^i} u - P_1^{h/2^i} \sum_{j=0}^{n} h/2^{i\,r_0+jr} w_j \|_{\mathcal{U}_{1h/2^i}} = O(h^{r_0+(n+1)r}) \tag{3.2}$$

В соответствии с каждой $z^{h/2^i} \in \mathcal{U}_{1h/2^i}$ подставим z_i^h так что $z_i^h(x) = z^{h/2^i}(x)$ при $x \in \Omega_h$. Тогда $z_i^h \in \mathcal{U}_{1h}$. Предположим, что

$$\| z_i^h \|_{\mathcal{U}_{1h}} \leqslant M \| z^{h/2^i} \|_{\mathcal{U}_{1h/2^i}}, \quad M = \mathrm{const} > 0 \tag{3.3}$$

Тогда из (3.2) следует

$$\| v_1^h - P_1^h u - P_1^h \sum_{j=0}^{n} (h/_2 i)^{r_0+jr} w_j \|_{\mathcal{U}_{1h}} = O(h^{r_0+(n+1)r}) \tag{3.4}$$

$$i = \overline{0,m}$$

Пусть

$$\rho_i = \frac{1}{2^{r_i}}, \quad r_i = r_0 + ir .$$

Исключая последовательно $w_0, w_1, \dots, w_{p-1}$ из (3.4) получим

$$\| v_{i,\, i+1}^h - P_1^h u \|_{\mathcal{U}_{1h}} = O(h^{r_1})$$

$$\| v^h_{i,\,i+1,\,i+2} - P^h_1 u \|_{\mathcal{U}_{1h}} = 0\,(h^{r_2})$$

. . . .

$$\| v^h_{i,\,i+1,\dots,\,i+p} - P^h_1 u \|_{\mathcal{U}_{1h}} = 0\,(h^{r}{}_p)$$

где

$$v^h_{i,\,i+1} = \frac{\rho_0\, v^h_i - v^h_{i+1}}{\rho_0 - 1}$$

$$v^h_{i,\,i+1,\,i+2} = \frac{\rho_1 v^h_{i,\,i+1} - v^h_{i+1,\,i+2}}{\rho_1 - 1}$$

. . . .

$$v^h_{i,\,i+1,\dots,\,i+p} = \frac{\rho_{p-1} v^h_{i,\,i+1,\dots,\,i+p-1} - v^h_{i+1,\dots,\,i+p}}{\rho_{p-1} - 1}$$

Доказано, что если норма в $\mathcal{U}_{1h}$ определяется при помощи

(3.5) $$\| v^h \|_{\mathcal{U}_{1h}} = \max_{x \in \Omega_h} | v^h(x) |$$

то получим

$$v^h_{0,\,1,\dots,\,m} = \frac{v^h_m - \sigma_1 v^h_{m-1} + \dots + (-1)^m \sigma_m v^h_0}{\prod\limits_{i=0}^{m-1} (1 - \rho_i)}$$

где σ_p — сумма всех произведений от p чисел взятых из $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{m-1}\}$.

3.2. *Применение для оценки погрешности.* Установлено, что

$$\| P^h_1 u - v^h_{1,2,\dots,m} - \frac{v^h_{1,\dots,m} - v^h_{0,\dots,m-1}}{\rho_{m-1} - 1} \|_{\mathcal{U}_{1h}} = 0(h^{r_m})$$

Откуда следует приближённая оценка погрешности

$$\left\| P^h_1 u - v^h_{1,2,\dots,m} \right\|_{\mathcal{U}_{1h}} \lesssim \left\| \frac{v^h_{1,\dots,m} - v^h_{0,\dots,m-1}}{m - 1^{-1}} \right\|_{\mathcal{U}_{1h}}$$

Если норма в $\mathcal{U}_{1h}$ определяется при помощи (3.5) те имеем

$$P^h_1 u - v^h_{1,2,\dots,m} \approx \frac{v^h_{1,\dots,m} - v_{\dots,\,m-1}}{\rho_{m-1}}$$

3.3. Численный пример. Рассматриваем задачу

$$y' + y = 0, \qquad y(0) = 1$$

Точное решение есть $y = e^{-x}$. С помощью метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n - hy_n, \qquad y_0 = 1$$

на сетках с шагами $h = 2^{-k}$, мы вычисляем приближённое значение от $y(1) = e^{-1}$. Обозначаем получаемое значение через $y(1, h)$. Пусть $y_k = y(1{,}2^{-k})$. Нетрудно проверить, что существуют функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ такие, что погрешность имеет асимптотическое разложение вида

$$y(1, h) - y(1) = h\,w_1(1) + h^2 w_2(1) + 0\,(h^3).$$

Откуда следуют следующие усовершенствованные приближённые значения для $y(1)$:

$$y_{k,k+1} = y_{k+1} + (y_{k+1} - y_k)$$

$$y_{k,k+1,k+2} = y_{k+1,k+2} + \frac{1}{3}(y_{k+1,k+2} - y_{k,k+1})$$

и приближённые оценки погрешности

$$y(1) - y_{k+1} \approx y_{k+1} - y_k$$

$$y(1) - y_{k+1,k+2} \approx \frac{1}{3}\left(y_{k+1,k+2} - y_{k,k+1}\right).$$

Численные результаты данные в таблицах 1 и 2 показывают эффективность метода.

Таблица 1

k	y_k	$y_{k,k+1}$	$y_{k,k+1,k+2}$	$y(1) = e^{-1}$
4	0,356074	0,368036	0,367880	0,367879
5	0,362055	0,367919		
6	0,364987	0,367889		
7	0,360438	0,367882		
8	0,367160			

Таблмца 2

k	$y(1) - y_k \approx$	$y(1) - y_k =$	$y(1) - y_{k,k+1} \approx$	$y(1) - y_{k,k+1} =$
4				
5	0,005979	0,005824	− 0,000039	− 0,000040
6	0,002932	0,002892	− 0,000010	− 0,000010
7	0,001451	0,001441	− 0,0000024	− 0,000003
8	0,000722	0,000719		

II. Ф. А. Р. П. для НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНЕВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯ́ДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Третья краева і задача на неравномерных сетках

1.1. *Дифференциальная задача.* Пусть σ — натуральное число, c_s $(s = \overline{0, \sigma};$ $c_s < c_{s+1})$ — заданные числа. Обозначим через $c^m[c_s, c_{s+1}]$ классы функций непрерывных и имеющих непрерывные производные до порядка m включительно на $[c_s, c_{s+1}]$

Рассмотрим дифференциальную задачу

(1.1a) $\quad L(u) \equiv (k(x)u')' - f(x, u) = 0, \quad x \neq c_s$

(1.1b) $$\begin{cases} l^s(u) \equiv k(x)u' \big|_{c_s+0} - k(x)u' \big|_{c_s-0} - g^s(u(c_s)) = 0 \\ u(c_s + 0) = u(c_s - 0) = u(c_s), \quad s = \overline{1, \sigma - 1} \end{cases}$$

(1.1c) $$\begin{cases} l^0(u) \equiv k(x)u' \big|_{c_0} - g^0(u(c_0)) = 0 \\ l^\sigma(u) \equiv k(x)u' \big|_{c_\sigma} + g^\sigma(u(c_\sigma)) = 0 \end{cases}$$

где $k(x) f(x, u)$, $g^s(u)$ — заданные достаточно гладкие функции при $x \neq c_s$ и

(1.2) $\quad k(x) \geqslant \text{const} > 0, \ f_u \geqslant 0, \ g^s_u \geqslant 0, \ g^0_u + g^\sigma_u > 0$

При $\sigma = 1$ задача имеет непрерывные коэффициенты, а при $\sigma > 1$ задача имеет разрывные коэффициенты.

В [2] условия сопряжения (1.1b) называются четвёртыми краевыми условиями. В [7] рассматриваются более простые задачи. Предположим, что

(1.3) $\quad \{$задача (1.1) (1.2) имеет единственное решение.

1.2. *Первая разностная задача.* Пусть

$\theta_s(t)$ — достаточно гладкие функции на $[\bar{c}_{s-1}, \bar{c}_s]$ такие,

что $\theta'_s(t) > 0$, $\theta_s(\bar{c}_{s-1}) = c_{s-1}$, $\theta_s(\bar{c}_s) = c_s$,

N_s — натуральные числа, $h_s = (\bar{c}_s - \bar{c}_{s-1}) / N_s$,

$h_s / h_{s-1} = \tilde{c}_s = \text{const} > 0$, $h_1 = h$

Рассмотрим сетку

(1.4) $\quad \{x_i^s, i = \overline{0, N_s};\ s = \overline{1, \sigma}\}$, $x_i^s = \theta_s(\bar{c}_{s-1} + i h_s)$

Положим $h_i^s = x_i^s - x_{i-1}^s$, $\widehat{h}_i^s = 0{,}5\,(h_i^s + h_{i+1}^s)$, $\widehat{h}_0^s = 0{,}5\,(h_1^{s+1} + h_{N_s}^s)$

Для функции v заданной на $x_{i-1}^s, x_i^s, x_{i+1}^s$ и a на x_i^s, x_{i+1}^s мы используем следующие обозначения :

$$
(1.5)\quad \left\{
\begin{aligned}
& v_{\bar{x}}(x_i^s) = \frac{v(x_i^s) - v(x_{i-1}^s)}{h_i^s}, \quad v_x(x_i^s) = \frac{v(x_{i+1}^s) - v(x_i^s)}{h_{i+1}^s} \\
& v_{\widehat{x}}(x_i^s) = \frac{v(x_{i+1}^s) - v(x_i^s)}{\widehat{h}_i^s} \\
& v_{\overset{\circ}{x}}(x_i^s) = \frac{v(x_{i+1}^s) - v(x_{i-1}^s)}{h_{i+1}^s + h_i^s} \\
& (a\,v_{\bar{x}})_{\widehat{x}}\,(x_i^s) = \frac{1}{\widehat{h}_i^s}\left\{ (a\,v_{\bar{x}})(x_{i+1}^s) - (a\,v_{\bar{x}})\,(x_i^s) \right\} \\
& \widehat{h}_0^s\,(a\,v_{\bar{x}})_{\widehat{x}}\,(c_s) = (a\,v_{\bar{x}})\,(x_1^{s+1}) - (a\,v_{\bar{x}})(c_s)
\end{aligned}
\right.
$$

Замечая, что $x_0^{s+1} = x_{N_s}^s = c_s$, мы рассматриваем разностную задачу на сетке (1.4) для $v(x_i^s)$:

$$
(1.6\,\mathrm{a})\quad \left\{
\begin{aligned}
& L_h\,(a, v^h) \equiv (a\,v_{\bar{x}}^h)_{\widehat{x}}\,(x_i^s) - f\,(x_i^s)\,v^h\,(x_i^s) = 0 \\
& \qquad i = \overline{1, N_s - 1},\ s = \overline{1, \sigma} \\
& l_h^s\,(a, v^h) \equiv \widehat{h}_0^s\,(a\,v_{\bar{x}}^h)_{\widehat{x}}\,(c_s) - g^s\,(v^h\,(c_s)) -
\end{aligned}
\right.
$$

$$
- 0{,}5\,h_1^{s+1}\,f\,(c_s + 0, v^h\,(c_s))
$$

$$
- 0{,}5\,h_{N_s}^s\,f\,(c_s - 0, v^h\,(c_s)) = 0, \quad s = \overline{1, \sigma - 1}
$$

$$
(1.6\,\mathrm{b})\quad \left\{
\begin{aligned}
& l_h^0\,(a, v^h) \equiv (a\,v_x^h)\,(x_1^1) - g^0\,(v^h\,(c_0)) - \frac{h_1^1}{2} f\,(c_0, v^h\,(c_0)) = 0 \\
& l_h^\sigma\,(a, v^h) \equiv (a\,v_{\bar{x}}^h)\,(c_\sigma) + g^\sigma\,(v^h\,(c_\sigma)) + 0{,}5\,h_{N_\sigma}^\sigma\,f\,(c_\sigma, v^h\,(c_\sigma)) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

где

$$(1.7) \qquad a(x_i^s) = h(x_i^s - 0{,}5\,h_i^s),$$

Рассуждая по аналогим с выводом теоремы 1.1. в [9] можно доказать, что эта задача имеет единсвенное решение.

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ — решение дифференциальной задачи (1.1) (1.3), $v^h(x_i^s)$ — решение разностной задачи (1.6) (1.7). Пусть*

$$(1.8) \quad \begin{cases} u(x) \in C^{n+4}[c_{s-1}, c_s]; \;\; h(x) \in C^{n+3}[c_{s-1}, c_s]; \\ f(\cdot, u), \;\; g^s(u) \in C^{[0{,}5n+2]}(-\infty, \infty) \\ \theta_s(t) \in C^{n+2}[\bar{c}_{s-1}, \bar{c}_s] \end{cases}$$

Тогда существуют независящие от h функции $w_j(x)$ такие, что имеет место ф.а.р.п. вида

$$(1.9) \qquad \left| v^h(x_i^s) - u(x_i^s) - \sum_{j=0}^{n-1} h^{j+2} w_j(x_i^s) \right| = 0(h^{n+2})$$

$$i = \overline{0, N_s}, \; s = \overline{1, \sigma}.$$

При доказательстве мы применяем теорему 3. Положим

$$\Omega = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \{(c_{s-1}, c_s)\}, \quad \Gamma^s = \{c_s\}, \quad \Gamma = \bigcup_{s=0}^{\sigma} \Gamma^s$$

$$(1.10) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_1 = \{u \mid u(x) \in C^2[c_{s-1}, c_s], \; s = \overline{1, \sigma}\} \\ \mathcal{U}_2 = \{u \mid u(x) \in C[c_{s-1}, c_s], \; s = \overline{1, \sigma}\} \\ \mathcal{V}_s = \{u(c_s)\}, \;\; s = \overline{0, \sigma} \end{cases}$$

$$(1.11) \quad \begin{cases} \Omega_h = \{x_i^s \mid i = \overline{0, N_s}, s = \overline{1, \sigma}\} \\ \mathring{\Omega}_h = \{x_i^s \mid i = \overline{1, N_s - 1}, s = \overline{1, \sigma}\} \\ \Gamma_h^s = \{c_s\}, \; \Gamma_h \bigcup_{s=0}^{\sigma} \Gamma_h^s \end{cases}$$

Заметим, что здесь $\overset{0}{\Omega}_h \bigcup \Gamma_h = \Omega_h$

Потом пространства u_{ih} и v_{sh}, операторы P_i^h, R_s^h определяются как в (2.3) (2.4) I.

Определим нормы в u_i, v_s и u_{ih}, v_{sh}

$$(1.12)\ \begin{cases} \| u \|_{u_1} = \max\limits_{x\in\Omega u\Gamma} | u(x) | ; \quad \| u \|_{u_2} = \max\limits_{x\in\Omega} | u(x) | \\ \| u \|_{v_s} = | u(c_s) | \end{cases}$$

$$\| v \|_{1h} = \max_{x\in\Omega_h} | v(x) | ; \quad \| v \| u_{2h} = \max_{x\in\mathring{\Omega}_h} | v(x) |$$

$$\| v \|_{v_{sh}} = | v(c_s) |$$

Таким образом вынолнены условия согласованности (2.5) I. Пусть далее

$$(1.13)\ \begin{cases} \wedge w \equiv (k(x)\, w')' - f_u(x,\ u(x))w \\ \lambda^s_w \equiv kw' |_{c_s+0} - kw' |_{c_s-0} - g^s_u(u(c_s)) w(c_s),\ s = \overline{1, \sigma - 1} \\ \lambda^0 \equiv kw' |_{c_0} - g^0_u(u(c_0))\, w(c_0) \\ \lambda^\sigma_w \equiv kw' |_{c_\sigma} + g^\sigma_u(u(c_\sigma)) w(c_\sigma) \end{cases}$$

$$\wedge_h(a)\, z \equiv (az_{\bar{x}})_{\hat{x}} \left(x^s_i \right) - f_u\left(x^s_i,\ u(x^s_i)\right) z\left(x^s_i\right),\ i = \overline{1, N_s - 1},\quad s = \overline{1,\sigma}$$

$$\lambda^s_h(a)\, z = \widehat{h}^s_0\, (a_{\bar{x}})_{\hat{x}}(c_s) - \Big\{ g^s_u(u(c_s)) + 0{,}5\, h^{s+1}_1 f_u(c_s + 0,\ u(c_s))$$

$$+ 0{,}5\, h^s_{N_s} f_u(c_s - 0,\ u(c_s)) \Big\} z(c_s),\ s = \overline{1, \sigma - 1}$$

$$\lambda^0_h(a)\, z = (a\, z_{\bar{x}})(x^1_1) - \Big\{ g^0_u(u(c_0)) + 0{,}5\, h^1_1 f_u(c_0,\ u(c_0)) \Big\} z(c_0)$$

$$\lambda^\sigma_h(a)\, z = (a\, z_{\bar{x}})(c_\sigma) + \Big\{ g^\sigma_u(u(c_\sigma)) + 0{,}5\ h^\sigma_{N_\sigma} f_u(c_\sigma, u(c_\sigma)) \Big\} z(c_\sigma)$$

Теперь мы в состоянии проверить условия теоремы 3. Для этого мы используем формулу Тейлора, гипотез (1.8) и лемму об оценке решения задачи

$$(1.14)\ \begin{cases} \wedge_h(a)\, z^h = \varphi_h(x^s_i),\ i = \overline{1, N_s - 1},\ s = \overline{1,\sigma} \\ \lambda^s_h(a)\, z^h = \varphi_h(c_s),\ s = \overline{0,\sigma} \end{cases}$$

в виде

$$\max_{i = \overline{0,N_s},\ s=\overline{1,\sigma}} | z^h(x^s_i) | \leqslant M \Big\{ \max_{i=\overline{1,N_s-1},\ s=\overline{1,\sigma}} | \varphi_h(x^s_i) | + \sum_{s=0}^{\sigma} | \bar{\varphi}_h(c_s) | $$

Эта оценка получается с помощью формул прогонки ([1], стр. 43).

1.3. *Вторая разносная задача.* Пусть

(1.15) $u(x) \in c^{2n+4}[c_{s-1}, c_s]$; $k(x) \in c^{2n+3}[c_{s-1}, c_s]$, $\theta_s(t) \in c^{2n+2}[\bar{c}_{s-1}, \bar{c}_s]$

Продолжим эти функции за пределы их области определения и обозначим продолжаемые функции через $u^s(x), k^s(x)$, $\bar{\theta}_s(t)$. Сначала положим

$$\bar{\theta}_s(t) = \theta_s(t),\ t \in \bar{c}_{s-1}, \bar{c}_s,\ \bar{\theta}_s(t) \in c^{2n+2}[\bar{c}_{s-1} - h_s, \bar{c}_s + h_s]$$

Потом рассматриваем сетку

$$(1.16) \qquad \left\{ x_i^s \,\middle|\, x_i^s = \bar{\theta}_s(\bar{c}_{s-1} + ih_s),\ i = \overline{-1, N_s+1},\ s = \overline{1, \sigma} \right\}$$

$$h_i^s = x_i^s - x_{i-1}^s,\ \widehat{h}_i^s = 0{,}5\left(h_i^s + h_{i+1}^s\right)$$

и наконец, положим

$$k^s(x) = h(x),\ x \in [c_{s-1}, c_s],\ h^s(x) \in c^{2n+3}[c_{s-1} - 0{,}5\, h_0^s, c_s + 0{,}5\, h_{N_s+1}^s]$$

$$u^s(x) = u(x),\ x \in [c_{s-1}, c_s],\ u^s(x) \in c^{2n+4}[c_{s-1} - h_0^s, c_s + h_{N_s+1}^s]$$

Предполается, что h_s $(s = \overline{1, \sigma})$ являются достаточно малыми чтобы $k^s(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$, $\theta_s'(t) > 0$.

Рассмотрим разностную задачу для $v^s(x_i^s)$,

$$(1.\ 17) \qquad \begin{cases} L_h(a^s, v^s) \equiv \left(a^s v^s_{\bar{x}}\right)_{\widehat{x}}(x_i^s) - f\left(x_i^s, v^s(x_i^s)\right) = 0 \\ \qquad i = \overline{0, N_s},\quad s = \overline{1, \sigma} \\ l_h^s(v^s) \equiv k^{s+1}(c_s)\, v^{s+1}_{\overset{\circ}{x}}(c_s) - h^s(c_s)\, v^s_{\overset{\circ}{x}}(c_s) - g^s(v^s(c_s)) = 0, \\ \qquad s = \overline{1, \sigma - 1},\ v^s(c_s) = v^{s+1}(c_s), \\ l_h^0(v^s) = h^1(c_0)\, v^1_{\overset{\circ}{x}}(c_0) - g^0(v^1(c_0)) = 0 \\ l_h^\sigma(v^s) \equiv h^\sigma(c_\sigma)\, v^\sigma_{\overset{\circ}{x}}(c_\sigma) + g^\sigma(v^\sigma(c_\sigma)) = 0 \end{cases}$$

где

$$(1.18) \qquad a^s(x_i^s) = h^s(x_i^s - 0{,}5\, h_i^s)$$

Как и выше, можно доказать, что эта задача имеет единственное решение.

Теорема 5. *Пусть* $u(x)$ *— решение дифференциальной задачи (1.1) (1.3),* $v^s(x s_i)$ *— решение разностной задачи (1.17) (1.18).*
Пусть

$$(1.19)\quad \begin{cases} \theta_s(t),\ k(x),\ u(x) \text{ удовлетворяют условиям (1.5)} \\ f(.,u),\ g^s(u) \in c^{\,n+2}(-\infty,\infty) \end{cases}$$

Тогда существуют независящие от h *функции* $w_j(x)$ *такие, что имеет место ф.а.р.п. вида*

$$(1.20)\qquad | v^s(x_i^s) - u(x^s i) - \sum_{j=o}^{n-1} h^{2j+2}\ w_j(x_j^s) | = 0(h^{2n+2}) \qquad i=\overline{0.N_s},\quad s=\overline{1,\sigma}.$$

Для доказательства мы используем теорему 2. Пусть $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_s$ определяются по (1.10) с нормами (1.12). Положим $\mathcal{B}_1 = \mathcal{U}_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{U}_2 \times \mathcal{V}_0 \times \ldots \times \mathcal{V}_\sigma$ с нормами

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_1},\ \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_2} + \sum_{s=0}^{\sigma} \|\cdot\|_{\mathcal{U}_s}.$$

Пусть

$$\mathcal{A} = \{L,\ l^0,\ l^1, \ldots,\ l^\sigma\}$$

Тогда дифференциальная задача (1.1) запишется в виде

$$\mathcal{A}(u) = 0,\ u \in \mathcal{B}_1$$

Пусть

$$\mathcal{U}_{1h} = \{\overline{v^s(x_i^s)},\ i = -\overline{1,N_s+1},\ s=\overline{1,\sigma}\}$$

$$\mathcal{U}_{2h} = \{v(x_i^s),\ i=\overline{0,N_s},\ s=\overline{1,\sigma}\}$$

$$\mathcal{V}_{sh} = \{v(c_s)\}$$

с нормами $\|v\|_{\mathcal{U}_{1h}} = \max|v^s(x_i^s)|$ $\|v\|_{\mathcal{U}_{2h}} = \max|v(x_i^s)$, $\|v\|_{\mathcal{V}_{sh}} = |v(c_s)|$ Положим $\mathcal{B}_{h_1} = \mathcal{U}_{h_1}$, $\mathcal{B}_{2h} = \mathcal{U}_{2h} \times \mathcal{V}_{0h} \times \ldots \times \mathcal{V}_{\sigma h}$ с нормами

$$\|\cdot\|_{1h} = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_{1h}},\ \|\cdot\|_{2h} = \|\cdot\|_{\mathcal{U}_{2h}} + \sum_{s=0}^{\sigma} \|\cdot\|_{\mathcal{V}_{sh}}$$

Пусть рассматриваем проектирующие операторы: P_i^h, R_s^h:

$$(P_1^h u)(x_i^s) = u^s(x_i^s)\,,\ i = \overline{-1\,,N_s+1}\,,\ s = \overline{1,\sigma}\,,\ u \in \mathcal{U}_1$$

$$(P_2^h u)(x_i^s) = u\,(x_i^s)\,,\ i = \overline{0\,,N_s}\,,\ s = \overline{1,\sigma},\ u \in \mathcal{U}_2$$

$$(R_1^h u = u, \qquad u \in \mathcal{V}_s$$

Положим $\mathcal{P}_1^h = P_1^h\,,\ \mathcal{P}_2^h\left\{P_2^h\,,\ \mathfrak{R}_0^h\,,\ \mathfrak{R}_1^h,\ldots,\mathfrak{R}_\sigma^h\right\}$

Тогда выполнены условия согласованности (1.3) I. Пусть

$$\mathcal{A}_h = \left\{L_h\,,\ l_h^0,\ l_h^1,\ldots,\ l_h^\sigma\right\}$$

Тогда разностная задача (1.17) запишется в виде

$$\mathcal{A}_h\ (v^s) = 0,\ \{v^s\} \in \mathcal{B}_{1h}$$

Пусть

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{1h} = \{v^s\ (x_i^s) - i = \overline{-1, N_s+1}\,;\ s = \overline{1,\sigma}\,;\ v_{-1}^{s+1}\,(x^{s+1}) = v^s\,(x_{N_s+1}^s) = 0\}$$

Пусть $\mathcal{Q}_h$ — оператор проектирующий $\mathcal{B}_{1h}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{B}}_{1h}$. Пусть далее $A = \{\wedge, \lambda^\circ,\ldots,\lambda^\sigma\}$ илнейный оператор из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$, где $\wedge$ и λ^s определяются по (1.13) и $A_h = \{\wedge_h,\lambda_h^\circ,\ldots,\lambda_h^\sigma\}$ — линейный оператор из $\mathcal{B}_{1h}$ в $\mathcal{B}_{2h}$, где

$$\wedge_h\,(a^s)\ z^s \equiv (a^s\ z_{\bar{x}}^{s})_{\hat{x}}\ (x_i^s) - f_u(x_i^s, u\,(x_i^s))z^s\,(x_i^s),\ i = \overline{0,N_s}\,,\ s = \overline{1,\sigma}$$

$$\lambda_h^s z^s \equiv (h^{s+1}\, z_{\overset{\circ}{x}}^{s+}\ )\ (c^s) - (h^s z_{\overset{\circ}{x}}^s\ )(c^s) - g_u^s(u\,(c_s))\ z^s\,(c^s)$$

$$s = \overline{1\,,\sigma-1}$$

$$\lambda_h^\circ z^s \equiv (h^1 z_{\overset{\circ}{x}}^1\ )\,(c_\circ) - g_u^\circ\,(u\,(c_\circ))\,z^1\,(c_\circ)$$

$$\lambda_h^\sigma z^s \equiv (k^\sigma z_{\overset{\circ}{x}}^\sigma\,(c_\sigma) + g_u^\sigma\,(u\,(c_\sigma))\ z^\sigma\,(c_\sigma)$$

Теперь мы в состоянии проверить условия теоремы 2. Для этого мы используем формулу Тейлора, гипотез (1.19) и лемму об оценке решения задачи

$$(1.21)\qquad \begin{cases} \Lambda_h(a^s) z_h^s = \varphi_h^s(x_i^s) \\ \lambda_h^s z_h^s \qquad = \psi\,(c_s) \end{cases}$$

в виде

$$\max_{i=\overline{0,N_s},\ s=\overline{1,\sigma}} |z_h^s(x_i^s)| \leqslant M \left\{ \max_{i=\overline{0,N_s},\ s=\overline{1,\sigma}} |\varphi_h^s(x_i^s)| + \sum_{s=0}^{\sigma} |\psi(c_s)| \right\}$$

Эта оценка получается исключением $z_h^s(x_{-1}^s)$, $z_h^s(x_{N_s+1}^s)$ из (1.21) и использованием формулы прогонки ([1], стр. 43).

§ 2. Первая краевая задача на неравномерных сетках

В случае первой краевой задачи

$$L\,(u) = 0$$
$$l^s\,(u) = 0$$
$$u(c_0) = \alpha,\ u(c_\sigma) = 0$$

где $L\,(u)$ и $l^s(u)$ определяются по (1.1a,b) и α, β — заданные числа, мы получаем аналогичные результаты.

III. Ф.А.Р.П. ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ.

§ 1. Третья краевая задача с разрывными коэффициентами

1.1. *Дифференциальная задача.* Для простоты записи ограничимся случаем двухмерного параллелипипедае. Результаты обобщаются на более двухмерные параллелипипеды. Пусть σ — натуральное число, c_s, $(s = \overline{0, \sigma};\ c_s < c_{s+1})$, D_0, D_1 $(D_0 < D_1)$ заданные числа. Пусть $\Omega^s = (c_{s-1}, c_s) \times (D_0, D_1)$, $\Omega = \bigcup_{s=0}^{\sigma} \Omega^s$. Обозначаем через $c^m(\overline{\Omega}^s)$ классы функций от x и y непрерывных и имеющих непрерывные прозиводные по x и y до порядка m включительно в $\overline{\Omega}^s$ и через $c^m_{(x)}(\overline{\Omega}^s)$ классы функций от x и y непрерывных по x и y и имеющих непрерывные производные по x до порядка m включительно в $\overline{\Omega}^s$, то же самое значение относительно y имеет обозначение

$$c^m_{(y)}(\overline{\Omega})$$

Рассмотрим дифференциальную задачу

$$
(1.1)\quad \begin{cases}
L(u) \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(q(x, y) \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - f\ (x, y, u) = 0 \\
\qquad\qquad (x, y) \in \Omega \\
l^s(u) \equiv p \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{c_s + 0,\, y} - p \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{c_s - 0,\, y} - g^s(y, u(c_s, y)) = 0 \\
\qquad s = \overline{1, \sigma - 1} \\
u(c_s + 0, y) = u(c_s - 0, y) = u(c_s, y) \\
l^0(u) \equiv p \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{c_0,\, y} - g^0(y, u(c_0, y)) = 0 \\
l^\sigma(u) \equiv p \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{c_\sigma,\, y} + g^\sigma(y, u, (c_\sigma, y)) = 0 \\
u(x, D_0) = \varphi_0(x, u(x) D_1) = \varphi_1(x)
\end{cases}
$$

где $p(x, y)$, $q(x, y)$, $f(x, y, u)$, $g^s(y, u)$, φ_0, φ_1 — заданные достаточно гладки функции при $x \neq c_s$ и

$$(1.2)\quad \{ p \geqslant \text{const} > 0,\ q \geqslant \text{const} > 0,\ f_u \geqslant 0,\ g^s_u \geqslant 0,\ g^0_u + g^\sigma_u > 0$$

Предположим, что

(1.3) {задача (1.1) (1.2) имеет единственное решение.

1.2. *Первая разностная задача.* Пусть, рядом с (1.4) II, имеем $\theta(t)$ — достаточно гладкая фукнция на $[\overline{D}_0, \overline{D_1}]$ такая, что $\theta'(t) > 0$, $\theta(\overline{D}_0) = \overline{D_0}$, $\theta(\overline{D_1}) = D_1$, N — натуральное число, $k = (D_1 - \overline{D}_0)/N$, $k/h = \text{const} > 0$

Рассмотрим сетку (см. (1.4), II) :

$$(1.4)\ \left\{(x^s_i, y_j)\right\},\ x^s_i = \theta_s(\overline{c}_{s-1} + ih_s),\ i = \overline{0, N_s},\ s = \overline{,\sigma}$$

$$y_j = \theta(\overline{D}_0 + jk),\ j = \overline{0, N}$$

$$\text{Положим } h^s_i = x^s_i - x^s_{i-1},\qquad \hat{h}^s_i = 0{,}5\ (h^s_i + h^s_{i+1})$$

$$k_j = y_j - y_{j-1},\qquad \hat{k}_j = 0{,}5\ (k_j + k_{j+1})$$

Для функции v заданной на (x^s_i, y_j), (x^s_{i+1}, y_j)

(x^s_{i-1}, y_j), (x^s_i, y_j), (x^s_i, y_{j+1}), (x^s_i, y_{j-1}) используем

следующие обозначения :

$$
(15)\begin{cases} v_{\bar{x}},\ v_x,\ v_{\hat{x}},\ v_{\overset{\circ}{x}},\ (av_{\bar{x}})_{\hat{x}},\ \hat{h}^s_{\circ}(av_{\bar{x}})_{\hat{x}} \\ \text{в (1.5) II, и по аналогии с этими, обозначение} \\ (bv_{\bar{y}})_{\hat{y}}\ (x^s_i, y_j) = \dfrac{1}{\hat{k}}\left\{ b\,(x^s_i, y_{j+1})\,\dfrac{v(x^s_i, y_{j+1}) - v(x^s_i, y_j)}{k_{j+1}} \right. \\ \left. -\, b(x^s_i, y_j)\,\dfrac{v(x^s_i, y_j) - v(x^s_i, y_{j-1})}{k_j} \right\} \end{cases}
$$

где a и b — заданные соответственно на (x^s_{i+1}, y_j), (x^s_i, y_j)

и (x^s_i, y_{j+1}) (x^s_i, y_j) Заметим, что $x^{s+1}_0 = x^s_{N_s} = c_s$

Рассматриваем на сетке (1.4) разностную задачу

$$
(1.6a)\quad \left\{ L_h(a, b, v) \equiv (av_{\bar{x}})_{\hat{x}}\ (x^s_i, y_j) + (bv_{\bar{y}})_{\hat{y}}\ (x^s_i, y_j) - \right.
$$

$$
- f(x^s_i, y_j, v(x^s_i, y_j)) = 0,
$$

$$
i = \overline{1, N_s - 1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \ s = \overline{1,\sigma}
$$

$$
(1.6b)\left\{ l^s_h(a, b, v) \equiv \hat{h}^s_{\circ} \left\{ (av_{\bar{x}})_{\hat{x}}\,(c_s, y_j) + (bv_{\bar{y}})_{\hat{y}}\,(c_s, y_j) \right\} - g^s(y_j, v(c_s, y_j)) \right.
$$

$$
- 0{,}5h^{s+1}_1 f(c_s + 0, y_j, v(c_s, y_j)) - 0{,}5h^s_{N_s} f(c_s - 0, y_j, v(c_s, y_j)) = 0, \ s = \overline{1, \sigma - 1}
$$

$$
(1.6c)\quad \begin{cases} l^0_h(a, b, v) \equiv (av_{\bar{x}})\ (x^1_1, y_j) - g^0(y_j, v(c_0, y_j)) + \\ + 0{,}5\,h^1_1 \left\{ (bv_{\bar{y}})_{\hat{y}}\ (c_0, y_j) - f(c_0, y_j, v(c_0, y_j)) \right\} = 0 \\ l^\sigma_h(a, b, v) \equiv (av_{\bar{x}})\ (c_\sigma, y_j) + g^\sigma(y_j, v(c_\sigma, y_j)) + \\ + 0{,}5\ h^\sigma_{N_\sigma} \left\{ f(c_\sigma, y_j, v(c_\sigma, y_j)) - (bv_{\bar{y}})_{\hat{y}}\ (c_\sigma, y_j) \right\} = 0 \end{cases}
$$

$$
(1.6d)\quad \left\{ v(x^s_i, D_0) = \varphi_0(x^s_i), \qquad v(x^s_i, D_1) = \varphi_1(x^s_i) \right.
$$

где

(1.7) $$a(x_i^s, y_j) = p(x_i^s - 0{,}5\,h_i^s, y_j), \quad b(x_i^s, y_j) = q(x_i^s, y_j - 0{,}5k_j)$$

По теореме 2.1, [8] можно утверждать, что задача (1.6) (1.7) имеет единственное решение при достаточно малом h.

Методиками излагаемыми в пункте 1.2, II мы получаем следующую теорему :

Теорема 6. *Пусть $u(x, y)$ — решение дифференциальной задачи (1.1) — (1.3), $v(x_i^s, y_j)$ — решение разностная задача. (1.6) (1.7).*

Пусть

(1.8) $$\begin{cases} p(x, y) \in c_{(x)}^{n+3}(\overline{\Omega}^s)\,;\, q(n, y) \in c_{(y)}^{n+3}(\overline{\Omega})\,; \\ f(.,., u),\ g^s(., u) \in c^{[0,5n]+2}(-\infty, \infty); \\ u(x, y) \in c^{n+4}(\overline{\Omega}^s)\,;\ \theta_s(t) \in c^{n+2}\ [\overline{c}_{s-1}, \overline{c}_s];\ \theta(t) \in c^{n+2}[\overline{D}_0, \overline{D}_1] \end{cases}$$

Тогда существуют независящие от h функции $w_r(x, y)$ такие, что имеет место ф.а.р.п. вида

(1.9a) $$\left\| v - u - \sum_{r=0}^{n-1} h^{r+2} w_r \right\| = 0(h^{n+2}),$$

где

(1.9b) $$\| z \|^2 = \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{N_s-1} z^2(x_i^s, y_j)\ h_i^s\, \widehat{h}_j + \sum_{s=0}^{\sigma} \sum_{j=1}^{N-1} z^2(c_s, y_j)\, \widehat{k}_j \right.$$

Здесь для получения оценки решения линейной задачи аналогичной задачи (1.14) II Мы используем одновременно принцип максимума и энергетический метод.

1.3. *Вторая разностная задача.* Пусть

(1.10) $$\begin{cases} \theta_s(t) \in c^{2n+2}[\overline{c}_{s-1}, \overline{c}_s], \\ p(x, y) = p(x) \in c^{2n+3}[c_{s-1}, c_s] \\ u(x, y) \in c^{2n+4}(\overline{\Omega}^s) \end{cases}$$

мы продолжаем эти функции за пределы их области определения. Обозначим продолжаемые функции через $\overline{\theta}_s, p^s, u^s$. Сначала положим

$$\overline{\theta}_s(t) = \theta_s(t),\ t \in [\overline{c}_{s-1}, \overline{c}_s],\ \overline{\theta}_s(t) \in c^{2n+2}[\overline{c}_{s-1} - h_s, c_s + h_s]$$

Потом рассматриваем сетку (СМ. (1.16), II) :

(1.11) $$\{(x_i^s, y_j)\},\ x_i^s = \overline{\theta}_s(\overline{c}_{s-1} + ih_s),\ i = \overline{-1, N_s + 1},\ s = \overline{1, \sigma}$$

$$h_i^s = x_i^s - x_{i-1}^s\ ,\ \widehat{h}_i^s = 0{,}5(h_i^s + h_{i+1}^s)$$

$$y_j = \theta(\overline{D}_0 + jk),\ k_j = y_j - y_{j-1},\ \widehat{k}_j = 0{,}5(k_j + k_{j+1})$$

Наконец положим

$$p^s(x) = p(x),\ x \in [c_{s-1}, c_s],\ p^s(x) \in C^{2n+3}[c_{s-1} - 0{,}5h_0^s, c_s + 0{,}5h_{N_s+1}^s].$$

$$u^s(x,y) = u(x,y), x \in [c_{s-1}, c_s], u^s(x,y) \in C^{2n+4}([c_{s-1} - h_0^s, c_s + h_{N_s+1}^s] \times [D_0, D_1])$$

Предполагается, что h_s $(s = \overline{1,\sigma})$ являются достаточно малыми, чтобы $p^s(x) \geqslant \mathrm{cont} > 0$, $\theta_s'(t) > 0$. На сетке (1.11) рассматриваем разностную задачу для $v^s(x_i^s, y_j)$:

$$(1{,}12\text{a})\quad \begin{cases} L_h(a^s, b, v^s) \equiv (a^s v^s_{\bar{x}})_{\widehat{x}}(x_i^s, y_j) + (b v_{\bar{y}})_{\widehat{y}}(x_i^s, y_j) - \\ \qquad - f(x_i^s, y_j, v^s(x_i^s, y_j)) = 0 \\ \qquad i = \overline{0, N_s},\ s = \overline{1,\sigma},\ j = \overline{1, N-1} \\ l_h^s(v^s) \equiv (p^{s+1} v^{s+1}_{\overset{\circ}{x}})(c_s, y_j) - (p^s v^s_{\overset{\circ}{x}})(c_s, y_j) - g^s(y_j, v^s(c_s, y_j)) = 0\ , \\ \qquad s = \overline{1, \sigma - 1}, \qquad v^s(c_s, y_j) = v^{s+1}(c_s, y_j) \end{cases}$$

$$(1.12\text{b})\quad \begin{cases} l_h^0(v^s) = (p^1 v^1_{\overset{\circ}{x}})(c_0, y_j) - g^0(y_j, v^1(c_0, y_j)) = 0 \\ l_h^\sigma(v^s) \equiv (p^\sigma v^\sigma_{\overset{\circ}{x}})(c_\sigma, y_j) + g^\sigma(y_j, v^\sigma(c_\sigma, y_j)) = 0 \\ v(x_i^s, D_0) = \varphi_0(x_i^s), \qquad v(x_i^s, D_1) = \varphi_1(x_i^s) \end{cases}$$

где

$$(1.13)\quad \left\{ a^s(x_i^s, y_j) = p^s(x_i^s - 0{,}5\,h_i^s, y_j), b(x_i^s, y_j) = q(x_i^s, y_j - 0{,}5k_j) \right.$$

Можно доказать, что эта задача имеет единственное решение при достаточно малом h. Методиками излагаемыми в пункте 1.3, II мы получим следующую теорему :

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* $u(x,y)$ — *решение дифференциальной задачи (1.1) — (1.3),* $v^s(x_i^s, y_j)$ — *решение разностной задачи (1.12) (1.13).*

Пусть $\quad \theta(t) \in C^{2n+2}[\overline{D}_0, \overline{D}_1], \quad q(x,y) \in C^{2n+3}_{(y)}(\overline{\Omega})$

$$(1.14)\qquad \begin{cases} \theta_s(t),\ p(x, y) = p(x), \quad u(x, y) \text{ удовлетворяют условиям (1.10) и} \\ f(.,., u),\ g^s(., u) \in C^{n+2})-\infty, \infty) \end{cases}$$

Тогда существуют независящие от h функции $w_r(x, y)$ такие, что имеет место ф.а.р.п. вида

$$(1.15)\qquad \| v - u - \sum_{r=0}^{n-1} h^{2r+2} w_r \| = 0(h^{2n+2})$$

Где норма имеет значение (1.9ь)

Для получения оценки решения линейной задачи аналогичной задачи (1.21) II мы используем одновременно принцип максимума и энергетический метод.

Примечание. Для первой краевой задачи мы получаем аналогичные результаты.

§ 2. Первая краевая задача в одном классе произвольных двухмерных областей. 2.1 *Область с регулярной границей*. Пусть Ω — двухмерная область с границей Γ. Говорим, что область Ω имеет регуляную границу если существуют достаточно гладкие функции $\theta_1(\zeta)$, $\theta_2(\eta)$ и числа A, B, C, D, x_0, y_0, ($A \leqslant x_0 < B$, $C \leqslant y_0 < D$), $h > 0$, $k > 0$ удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{ll} \theta_1(\zeta) > 0 & \theta_1(A) \leqslant x \leqslant \theta(B) \\ \theta_2(\eta) > 0 & \theta_2(C) \leqslant y \leqslant \theta_2(D) \end{array}\right\} \forall (x, y) \in \Omega$$

так что граница Γ встречается с прямыми $x = \theta_1(x_0 + ih) = x_i$ и $y = \theta_2(y_0 + jk) = y_j$ только в точках x_i, y_j).

Как пример области с регулярной границей можно взять окружность.

Для такой области мы строим сетку $\{(x_i, y_j)\}$. Тогда

$$h_i = x_i - x_{i-1},\ \widehat{h}_i = 0{,}5(h_i + h_{i+1})$$

$$k_j = y_j - y_{j-1},\ \widehat{k}_j = 0{,}5(k_j + k_{j+1})$$

Все граничные узлы находятся точно на границе Γ.

2.2. *Дифференциальная задача*. На $\Omega \cup \Gamma$ рассматриваем задачу

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(q(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - f(x, y, u) = 0 & \\ & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

где p, q, f, φ — заданные достаточно гладкие функции, и

$$(3.2)\qquad \{p > \text{const} > 0,\ q \geqslant \text{const} > 0,\ fu \geqslant 0$$

Предположим, что

(3.3) {задача (3.1) (3.2) имеет единственное решение.

2.3. *Разностная задача*. На сетке $\{(x_i, y_j)\}$ в пункте 2.1 мы рассматриваем разностную задачу

$$
(3.4) \qquad \begin{cases} L_h(a, b, v) \equiv (a v_{\bar{x}})_{\hat{x}}(x_i, y_j) + (b v_{\bar{y}})_{\hat{y}}(x_i, y_j) \\ \qquad\qquad - f(x_i, y_j, v(x_i, y_j)) = 0, \ (x_i, y_j) \in \Omega \\ v(x_i, y_j) = \varphi(x_i, y_j), \ (x_i, y_j) \in \Gamma \end{cases}
$$

где

$$
(3.5) \qquad a(x_i, y_j) = p(x_i - 0{,}5\, h_i, y_j) \ , \ b(x_i, y_j) = q(x_i, y_j - 0{,}5 k_j)
$$

Методиками излагаемыми в пункте 1.2, II мы получаем следующую теорему :

Теорема 8. *Пусть* $u(x, y)$ — *единственное решение дифференциальной задачи (3.1) — (3.3)*

Пусть

$$
p(x, y) \in C^{2n+3}_{(x)}(\bar{\Omega}) \ , \ q(x, y) \in C^{2n+3}_{(y)}(\bar{\Omega})
$$

$$
u(x, y) \in C^{2n+4}(\bar{\Omega}), \ f(.,., u) \in C^{n+2}(-\infty, \infty)
$$

$$
\theta(\zeta) \in C^{n+2}[A, B] \qquad , \ \theta_\circ(\eta) \in C^{2n+2}[C, D].
$$

Тогда существуют независящие от h *функции* $w_r(x, y)$ *такие, что имеет место ф.а.р.п. вида*

$$
\max | \, v(x_i, y_j) - u(x_i, y_j) - \sum_{j=0}^{n-1} h^{2r+2} w_r(x_i, y_j) \, | = 0(h^{2n+2})
$$

Примечание. Гипотезы относительно $f(., u)$, $g^s(u)$, $f(.,.,u)$, $g^s(.,u)$ в теорема 4 — 8 могут ослабить.

Результаты главы II и III обобщаются на случаи краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типа.

Поступило в Редакцию 4-X-1976г .

ЛИТЕРАТУРЫ

[1] САМАРСКИЙ А.А., *Введение в теорию разностных схем.* «Наука», Москва, 1971.

[2] КОЗДОБА Л.А., *Методы решения нелинейных задач теплопроводности,* « Наука », Москва 1975.

[3] HENPICI D., Discrete Variable Methods for Ordinary Differential Equations., John wiley and Sons" 1967.

[4] BULIRSH R. and STOER J., Numer. Math., 1966, Vol. 8, N. 1,1 — 13.

[5] BULIRSH R. and STOER J., Numer. Math., 1966, Vol. 8, N.2, 93 — 104.

[6] WIDLUND O.B., Proc. Roy. Soc. Lond., 1971, A 323, N. 1553, 167 — 177.

[7] STETTER H.J., Numer. Math., 1965, Vol. 7, N.1, 11 — 31.

[8] PEREYRA V., Numer. Math., 1967, Vol. 10, N.4, 316 — 323.

[9] TA VAN DINH., Acta Scientiarum Vietnamicarum., 1965, T. II, 61 — 91.

10] TA VAN DINH., Acta Scientiarum Vietnamicarum,. 1974, T. IX et X, 41 — 52.