ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 2, N°1 (1977)

СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ГРИНА ЗАДАЧИ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

NGUYỄN THỪA HỢP

Ханойский университет

Для задачи Дирихле уравнения Лапласа, хорошо известна функция Грина, с помощью которой можно восстановить решение задачи через его граничное значение.

Для общих краевых задач дифференциальных уравнений, очень полезно было бы вводить подобное понятие функции Грина и найти формулу дающую решения через данные задачи. Для задачи Дирихле и Пуанкаре некоторых систем эллиптического типа, эти вопросы были изучены в [2], [3].

Настоящая статья посвящена такому же вопросу, но для краевой задачи обобщенных аналитических функций. Будут построены системы функции Грина для задачи Римана — Гильберта обобщенных аналитических функций в произвольных областях, изучаются их свойства и будет приведена формула для решения задачи через её данные. В качестве примера, изучается подробно частный случай ; а именно, будет построены в явной форме системы функций Грина задачи Римана — Гильберта в канонической форме для системы Коши — Римана ; дается явная формула для её решения.

Оказывается, что найдённая формула, дающая решения задачи в произвольных областях, конечно обобщит формулу И.Н. Векуа (см. [1], стр. 306), установленную, только для единичного круга и только для частного вида краевого условия.

§ 1. Постановка задачи и предварительные замечания.

Задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функцийс формулируется как обычно :

Задача A. *Требуется отыскать в области G решение $w(x) = u + iv$ уравнения*

$$\mathcal{L}(w) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\overline{w} = F(z) \tag{1.1}$$

удовлетворяющее краевому условию :

$$\mathcal{P}(w)|_{\Gamma} = \alpha u + \beta v = \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}\, w]_{\Gamma} = \gamma(z), \tag{1.2}$$

где $\lambda(z) = \alpha + i\beta$.

Однородную задачу ($F(x) \equiv 0$, $\gamma(z) \equiv 0$) обозначим через A_0. Предполагается, что:

а) $A, B, F \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$ (см [1]),

б) Граница Γ области G — кривая Ляпунова,

в) $\alpha, \beta, \gamma \in C_\nu(\Gamma)$, $0 < \nu \leqslant 1$ причем $|\lambda(z)|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \equiv 1$.

Решения задачи будем искать в классе $W_p^1(G)$, $p > 2$. В силу известных теорем вложения С.Л. Соболева, они непрерывны по Гёльдеру в замкнутой области $G + \Gamma$ (см [4]).

Наряду с задачей А, рассмотрим однородную сопряжённую задачу, которую для удобства сформулируем в следующей форме:

Задача A_0^*. *Требуется отыскать в области* G *решение* $w^*(z)$ *уравнения :*

$$\mathcal{L}^*(w^*) = -\frac{\partial w^*}{\partial z} + \overline{A(z)}\, w^* + B(z)\overline{w^*} = 0 \tag{1.3}$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\mathcal{P}^*(w)\ |_{\Gamma} = \mathrm{Re}\,[\lambda(z)\, z'(s)\, \overline{w^*}]_{\Gamma} = 0. \tag{1.4}$$

Отметим сразу, что сопряженная задача рассматриваемая нами здесь по существу не отличается от сопряженной задачи введенной в [1].

Очевидно, что :

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} w\,\overline{w^*}\,dz = \mathrm{Re} - \frac{i}{2}\int_{\Gamma}\overline{\lambda}\, w\,.\,\lambda\,\overline{w^*}\,z'(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\mathrm{Im}\left(\overline{\lambda}\, w\,.\,\lambda\overline{w^*}\,z'(s)\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left\{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}w\,.\,\mathrm{Im}\,\lambda\,\overline{w^*}\,z'(s) + \mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\,w\,.\,\mathrm{Re}\lambda\,\overline{w^*}\,z'(s)\right\}ds \tag{1.5}$$

так, что вводя обозначения

$$Q(w) = \mathrm{Im}\,\overline{\lambda(z)}\,w,$$

$$Q^*(w^*) = \mathrm{Im}\,\lambda(z)\,z'(s)\,\overline{w}^* \tag{1.6}$$

можем записать известную формулу Грина [1] в форме :

$$\mathrm{Re}\iint_G\left[\overline{w^*}\,\mathcal{L}(w) - \overline{w}\,\mathcal{L}^*(w^*)\right]d\sigma = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} w\,\overline{w^*}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left\{\mathcal{P}(w)\quad Q^*(w^*)\quad \mathcal{P}^*(w^*)\quad Q(w)\right\}ds. \tag{1.7}$$

Для дальнейщего, нам удобно ввести в рассмотрение функций

$$Z_1(z,\zeta) = +\frac{2}{\pi} X_1(z,\zeta) = x'_1(z,\zeta) + i\, x''_1(z,\zeta)$$

$$Z_2(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi} X_2(z,\zeta) = x_2'(z,\zeta) + i x_2''(z,\zeta) \tag{1.8}$$

где $X_1(z,\zeta)$, $X_2(z,\zeta)$ — основные элементарные обобщенные аналитические функций [1], а $x'_1(z, \xi)$, $x''_1(z,\zeta)$ и $x'_2(z,\zeta)$, $x''_2(z,\zeta)$ — соответственно вещественные и мнимые части $Z_1(z,\zeta)$ и $Z_2(z.\zeta)$.

Наряду с (1.8) рассмотрим ещё систему функций:

$$\begin{aligned} Z_1^*(z,\zeta) &= x_1'(\zeta,z) + ix'_2(\zeta,z), \\ Z_2^*(z,\zeta) &= x_1''(\zeta,z) + ix_2''(\zeta,z), \end{aligned} \tag{1.9}$$

Пусть $X'_1(z,\zeta)$, $X'_2(z,\zeta)$—основные элементарные решения уравнения $\frac{\partial w'}{\partial \bar z} - Aw' - \overline{B}\,\overline{w'} = 0$ (см. формулу (10.5а) стр. 185, [1]). Очевидно, что:

$$Z_1^*(z,\zeta) = x'_1(\zeta,z) + ix_2'(\zeta,z) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[X_1(\zeta,z) + \overline{X_1(\zeta,z)}\right] - \frac{i}{\pi}\left[X_2(\zeta,z) + \overline{X_2(\zeta,z)}\right] = -\frac{2}{\pi}\overline{X'_1(z,\zeta)}.$$

Аналогично вычисляется $Z_2^*(z,\zeta)$ и имеют место соотнощения:

$$Z_1^*(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\overline{X_1'(z,\zeta)},$$

$$Z_2^*(z,\zeta) = -\frac{2}{\pi}\overline{X_2'(z,\zeta)}. \tag{1.10}$$

Из того, что $X_i(z,\zeta)$, $X_i'(z,\zeta)$, $i = 1, 2$, как функции от z, являются решениями уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} + Aw + B\overline{\omega} = 0; \quad \frac{\partial w'}{\varrho \bar z} - Aw' - \overline{B}\,\overline{w'} = 0$$

соответственно, легко следует, что

$$\mathcal{L}_z\Big(Z_i(z,\zeta)\Big) = 0, \quad \mathcal{L}_z^*\Big(Z_i^*(z,\zeta)\Big) = 0 \tag{1.11}$$

$$i = 1, 2.$$

Определение 1. *Функции $Z_i(z,\zeta)$, $Z_i^*(z,\zeta)$, $i = 1, 2$ назовём фундаментальными решениями уравнений*

$$\mathcal{L}(w) = 0, \qquad \mathcal{L}^*(w^*) = 0$$

соответственно.

Функции $Z_i(z,\zeta)$, $Z_i^*(z,\zeta)$, $i = 1, 2$ имеют следующие главные части при $z \to \zeta$:

$$
\begin{aligned}
&Z_1(z,\zeta) \sim \frac{-1}{\pi(z-\zeta)}, \quad Z_2(z,\zeta) \sim \frac{-i}{\pi(z-\zeta)} \\
&Z_1^*(z,\zeta) \sim \frac{1}{\pi(\bar{z}-\bar{\zeta})}, \quad Z_2^*(z,\zeta) \sim \frac{i}{\pi(\bar{z}-\bar{\zeta})}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

которые легко получаются из соответственных главных частей основных элементарных функций $X_i(z,\zeta)$, $X_i^*(z,\zeta)$ [1].

Лемма 1. *Пусть* $w(z)$ *— непрерывная функция,* γ_ε *— окружность с центром* ζ *и с радиусом* ε. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma\varepsilon} Z_1(z,\zeta)\overline{w(z)}\,dz = -\operatorname{Re} w(\zeta), \tag{1.13}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma\varepsilon} Z_2(z,\zeta)\overline{w(z)}\,dz = -\operatorname{Im} w(\zeta), \tag{1.14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma\varepsilon} \overline{Z_1^*(z,\zeta)}\, w(z)\,dz = \operatorname{Re} w(\zeta), \tag{1.15}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Re \frac{1}{2i} \int_{\gamma\varepsilon} \overline{Z_2^*(z,\zeta)}\, w(z)\,dz = \operatorname{Im} w(\zeta). \tag{1.16}$$

Эти соотношения сразу вытекают из (1.12). Имеем например:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma\varepsilon} Z_1(z,\zeta)\overline{w(z)}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma\varepsilon} \frac{-1}{z-\zeta}\overline{w(z)}\,dz = \operatorname{Re} - \overline{w(\zeta)} =$$

$$= -\operatorname{Re} w(\zeta).$$

§2. Система функций Грина задачи Римана — Гильберта.

Как известно [1], однородные задачи A_0 и A_0^*:

$$A_0 \begin{cases} \mathcal{L}(w) = 0 & (2.1) \\ \mathcal{P}(w)|_\Gamma = 0 & (2.2) \end{cases}$$

$$A_0^* \begin{cases} \mathcal{L}^*(w^*) = 0 & (2.3) \\ \mathcal{P}^*(w^*)|_\Gamma = 0 & (2.4) \end{cases}$$

имеют конечное число независимых решений. Обозначим их через $w_1(z), \ldots, w_k(z)$ и $w^*_1(z), \ldots, w^*_{k'}(z)$. Отметим сразу, что линейная зависимость здесь понимается в поле действительных коэффициентов.

Всегда в дальнейщем мы считаем системы решений $w_1(z), \ldots, w_k(z)$ и $w^*_1(z), \ldots, w^*_{k'}(z)$ ортонормированными в следующем смысле:

$$\operatorname{Re}\iint_G \overline{w_i(z)}\, w_j(z)\, d\sigma = \delta_{ij}\,;\ i, j = 1, \ldots, k. \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}\iint \overline{w^*_i(z)}\ w^*_j(z) d\sigma = \delta_{ij}\,;\ i, j = 1, \ldots, k' \tag{2.6}$$

Эти системы, мы раз на всегда, фиксируем на протяжении дальнейщих рассуждений.

Лемма 2. Пи фиксированном $\zeta \in G$, следующие задачи разрешимы и имеют единственные решения:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \mathcal{L}_z(Y_1(z, \zeta)) = \sum\limits_{j=1}^{k'} w^*_j(z) \operatorname{Re} w^*_j(\zeta) & (2.7)\\ \mathcal{P}(Y_1(z, \zeta)|_{z\in\Gamma} = -\mathcal{P}(Z_1(z, \zeta)|_{z\in\Gamma} & (2.8)\\ \operatorname{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\ (Y_1(z,\zeta) + Z_1(z,\zeta))\ d\sigma_z = 0\,;\ j = 1,\ldots, k & (2.9)\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \mathcal{L}_z(Y_2(z,\zeta)) = \sum\limits_{j=1}^{k'} w^*_j(z) \operatorname{Im} w^*_j(\zeta) & (2.10)\\ \mathcal{P}(Y_2(z,\zeta))|_{z\in\Gamma} = -\ \mathcal{P}\ (Z_2(z,\zeta))|_{z\in\Gamma} & (2.11)\\ \operatorname{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\ (Y_2(z, \zeta) + Z_2(z, \zeta))\ d\sigma_z = 0\,;\ j = 1,\ldots, k & (2.12)\end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} \mathcal{L}^*_z(Y^*_1(z, \xi)) = \sum\limits_{j=1}^{k} w_j(z) \operatorname{Re} w_j(\zeta) & (2.13)\\ \mathcal{P}^*(Y^*_1(z, \zeta))|_{z\in\Gamma} = -\ \mathcal{P}(Z^1(z, \zeta))|_{z\in\Gamma} & (2.14)\\ \operatorname{Re}\iint\limits_G \overline{w^*_1(z)}(Y^*_1(z, \zeta) + Z^*_1(z, \zeta))\, d\sigma_z = 0\,;\ j = 1,\ldots, k'. & (2.15)\end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}) \begin{cases} \mathcal{L}^*_z(Y^*_2(z, \zeta)) = \sum\limits_{j=1}^{k} w_j(z) \operatorname{Im} w_j(\zeta) & (2.16)\\ \mathcal{P}^*(Y^*_2(z, \zeta)|_{z\in\Gamma} = -\ \mathcal{P}^*(Z^*_2(z, \zeta))|_{z\in\Gamma} & (2.17)\\ \operatorname{Re}\iint\limits_G \overline{w^*_j(z)}\ (Y^*_2(z, \zeta) + Z^*_2(z, \zeta)) d\sigma_z = 0\,;\ j = 1,\ldots, k'. & (2.18)\end{cases}$$

Докажем например существование и единственность решения $Y_1(z, \zeta)$ задачи (I). Существование такого решения обеспечивается при выполнении следующими равенствами (см. [1], стр. 234 формулу (2.5)):

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}\lambda(z)\overline{w_i^*(z)}\,\mathcal{P}(Z_1(z,\zeta))dz+\mathrm{Re}\iint_G\overline{w_i^*(z)}\sum_{j=1}^{k'}w_j^*(z)\,\mathrm{Re}\,w_j^*(\zeta)d\sigma_z=0$$
$$i=1,\dots,k'. \tag{2.19}$$

В силу (1.4), первый член левой части (2.19) упрощается в виде:

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}\lambda(z)\ \overline{w_i(z)}\,\mathcal{P}\ (Z_1(z,\zeta))dz=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\mathrm{Im}\,(\lambda(z)\ \overline{w_i(z)}\ z'(s)).\ \mathcal{P}(Z_1(z,\zeta))\ ds_z$$

так, что вместо (2.19) нам достаточно доказать:

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\mathrm{Im}\,(\lambda(z)\ \overline{w_i^*(z)}\ z'(s))\ \mathcal{P}(Z_1(z,\zeta))\ ds_z+$$
$$+\ \mathrm{Re}\iint_G\overline{w_i^*(z)}\sum_{j=1}^{k'}w_j^*(z)\ \mathrm{Re}\ w_j^*(\zeta)\ d\sigma_z=0 \tag{2.20}$$
$$i=1,\dots,k'$$

Учитывая (2.6), легко находим:

$$\mathrm{Re}\iint_G\overline{w_i^*(z)}\sum_{j=1}^{k'}w_j^*(z)\,\mathrm{Re}\,w_j^*(\zeta)d\sigma_z=$$
$$=\sum_{j=1}^{k'}\left(\mathrm{Re}\iint_G\overline{w_i^*(z)}\,w_j^*(z)\ d\sigma_z\right)\mathrm{Re}\ w_j^*(\zeta)=\mathrm{Re}\ w_i^*(\zeta). \tag{2.21}$$

Чтобы вычислить первый член левой части (2.20), в формуле Грина (1.7) в качестве $w(z)$ и $w^*(z)$ возьмём $Z_1(z, \zeta)$ и $w^*(z)$ соответственно и область G заменим областей $G_\varepsilon = G\diagdown K_\varepsilon$, где K_ε, — круг с центорм ζ и с радиусом ε.

Тогда имеем:

$$\mathrm{Re}\iint_{G_\varepsilon}[w_i^*(z)\mathcal{L}_z(Z_1(z,\zeta))-\overline{Z_1(z,\zeta)}\ \mathcal{L}^*(w_i^*)]\ d\sigma_z=$$
$$=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int_{\Gamma+\gamma_\varepsilon^-}Z_1(z,\zeta)\overline{w_i^*(z)}\ dz=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left\{\mathcal{P}(Z_1(z,\zeta)\,{}^*Q(w_i^*)+\mathcal{P}^*(w_i^*)\ (Z_1\,Q(z,\zeta))\right\}ds_z+\mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int_{\gamma_\varepsilon^-}Z_1(z,\zeta)\,\overline{w_i^*(z)\,dz} \tag{2.22}$$

причем через γ_ε^- обозначается граница K_ε на которой интеграл берется по направлению часовой стрелки.

Учитывая (1. 11), $\mathcal{L}^*(w_i^*) = 0$, $\mathcal{P}^*(w_i^*)\big|_\Gamma = 0$, можем переписать (2.22) в виде :

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \mathcal{P}(Z_1(z,\zeta))\,Q^*(w_i^*)ds_z = \operatorname{Re}\frac{1}{2i}\int_{\gamma_\varepsilon} Z_1(z,\zeta)\,\overline{w_i^*(z)}\,dz.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, в силу леммы 1, имеем :

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma \mathcal{P}(Z_1\ (z,\ \zeta))\ Q^*(w_i^*)ds = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re}\frac{1}{2i}\int_{\gamma_\varepsilon} Z_1\,(z,\,\zeta)\overline{w_i^*(z)}\,dz = -\operatorname{Re} w_i^*(\zeta). \tag{2.23}$$

Сравняя (2.23) и (2.21) убедимся в справедливости (2.20).

Существование $Y_1(z,\ \zeta)$ доказано. Общее решение задачи (2.7) — (2.8) имеет вид :

$$Y_1(z,\zeta) = Y_1^0(z,\zeta) + \sum_{i=1}^{k} c_i\,(\zeta)\ w_i\,(z),$$

где $c_i\,(\zeta)$ — действительные произвольные функции. Эти функции совершенно определяются. при выполнении условий (2.9) :

$$0 = \operatorname{Re}\iint_G \overline{w_i\,(z)}\,[Y_1(z,\zeta) + Z_1(z,\zeta)]\,d\sigma_z =$$

$$= \operatorname{Re}\iint_G \overline{w_j\,(z)}\,[Y_1^0(z,\zeta) + Z_1(z,\zeta)]\,d\sigma_z + \sum_{i=1}^{k} c_i\,(\zeta)\operatorname{Re}\iint_G \overline{w_j\,(z)}\,w_i\,(z)\,d\sigma =$$

$$= \operatorname{Re}\iint_G \overline{w_j\,(z)}\,[Y_1^0(z,\zeta) + Z_1(z,\zeta)]\,d\sigma_z + c_j\,(\zeta).$$

Единственность функции $Y_1(z,\ \zeta)$ также доказана.

Доказательство существования и единственности $Y_2\,(z,\ \zeta)$, $Y_1^*\,(z,\zeta)$, $Y_2^*\,(z,\ \zeta)$ проводится аналогично как и выше, лишь только нам нужно принимать во внимание на то, что условия разрешимости задачи

$$\mathcal{L}^*(w^*) = F^*(z)$$
$$\mathcal{P}^*(w^*)\big|_\Gamma = \gamma^*(z)$$

имеют вид :

$$\frac{1}{2i}\int_\Gamma \overline{\lambda(z)}w_i(z)\gamma^*(z)ds + \operatorname{Re}\iint_G \overline{w_i(z)}\,F^*(z)d\sigma_z = 0\,,$$

где $\{w_i(z)\}$ $i = 1,\ldots,k$ — полная система линейно независимых решений задачи A_0

Определение 2. *Системами функций Грина задачи* A_0 *и* A_0^* *соответственно назовём пары функций* $H_1(z, \zeta)$, $H_2(z, \zeta)$ *и* $H_1^*(z, \zeta)$, $H_2^*(z, \zeta)$ *определенных равенствами :*

$$\begin{cases} H_1(z, \zeta) = Z_1(z, \zeta) + Y_1(z, \zeta) \\ H_2(z, \zeta) = Z_2(z, \zeta) + Y_2(z, \zeta) \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\begin{cases} H_1^*(z, \zeta) = Z_1^*(z, \zeta) + Y_1^*(z, \zeta) \\ H_2^*(z, \zeta) = Z_2^*(z, \zeta) + Y_2^*(z, \zeta) \end{cases} \tag{2.25}$$

Из (1. 11) и леммы 2, легко вытекает следующая :

Теорема 1. *Системы функций Грина* $H_1(z, \zeta)$, $H_2(z, \zeta)$, *и* $H_1^*(z, \zeta)$, $H_2^*(z,\zeta)$ *обладают следующими свойствами :*

$$\mathscr{L}_z(H_1(z, \zeta)) = \sum_{j=1}^{k'} w_j^*(z)\,\mathrm{Re}\, w_j^*(\zeta) \tag{2.26}$$

$$\mathscr{P}(H_1(z, \zeta))\big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{2.27}$$

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\,H_1(z,\zeta)\,d\sigma_z = 0, \qquad j = 1,\ldots, k, \tag{2.28}$$

$$\mathscr{L}_z(H_2(z, \zeta)) = \sum_{j=1}^{k'} w_j^*(z)\,\mathrm{Im}\, w_j^*(\zeta) \tag{2.29}$$

$$\mathscr{P}(H_2(z, \zeta))\big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{2.30}$$

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\,H_2(z,\zeta)\,d\sigma_z = 0, \qquad j = 1,\ldots, k, \tag{2.31}$$

$$\mathscr{L}_z^*(H_1^*(z, \zeta)) = \sum_{j=1}^{k} w_j(z)\,\mathrm{Re}\, w_j(\zeta) \tag{2.32}$$

$$\mathscr{P}^*(H_1^*(z, \zeta))\big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{2.33}$$

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j^*(z)}\,H_1^*(z,\zeta)\,d\sigma_z = 0, \qquad j = 1,\ldots, k', \tag{2.34}$$

$$\mathscr{L}_z^*(H_2^*(z, \zeta)) = \sum_{j=1}^{k} w_j(z)\,\mathrm{Im}\, w_j(\zeta) \tag{2.35}$$

$$\mathscr{P}^*(H_2^*(z, \zeta))\big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{2.36}$$

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j^*(z)}\,H_2^*(z,\zeta)\,d\sigma_z = 0, \qquad j = 1,\ldots, k', \tag{2.37}$$

причем $\zeta \in G$.

Теорема 2. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\operatorname{Re} H_1(z, \zeta) = \operatorname{Re} H_1^*(\zeta, z) \tag{2.38}$$

$$\operatorname{Im} H_1(z, \zeta) = \operatorname{Re} H_2^*(\zeta, z) \tag{2.39}$$

$$\operatorname{Re} H_2(z, \zeta) = \operatorname{Im} H_1^*(\zeta, z) \tag{2.40}$$

$$\operatorname{Im} H_2(z, \zeta) = \operatorname{Im} H_2^*(\zeta, z) \tag{2.41}$$

при произвольных точках z, ζ *в* G.

Докажем, например, второе соотношение. Пусть ζ_1, ζ_2 две произвольные точки в области G. После выделении два маленьких кругов $K_{1\varepsilon}$, $K_{2\varepsilon}$ с центрами ζ_1, ζ_2 соответственно и с радиусами ε, применим в области $G_\varepsilon = G \setminus (K_{1\varepsilon} + K_{2\varepsilon})$ формулу Грина (1.7) в которой в качестве $w(z)$ и $w^*(z)$ возмём $H_1(z, \zeta_1)$ и $H_2^*(z, \zeta_2)$, получим:

$$\operatorname{Re} \iint_{G_\varepsilon} \left[\overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, \mathcal{L}_z (H_1(z, \zeta_1)) - \overline{H_1(z, \zeta_1)}\, \mathcal{L}_z^* (H_2^*(z, \zeta_2)) \right] d\sigma_z =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Gamma \left\} \mathcal{P}(H_1(z, \zeta_1))\, Q^*(H_2^*(z, \zeta_2) + \mathcal{P}^*(H_2^*(z, \zeta_2))\, Q(H_1(z, \zeta_1)) \right\{ ds_z +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma_{1\varepsilon}} H_1(z, \zeta_1)\, \overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, dz + \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \int_{\gamma_{2\varepsilon}} H_1(z, \zeta_1)\, \overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, dz \tag{2.42}$$

В силу (2.26), (2.37), (2.35), (2.28) левая часть (2.42) стремитя к нулю при $\varepsilon \to 0$. Действительно, она равна:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Re} \iint_{G_\varepsilon} [\overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, \mathcal{L}_z (H_1(z, \zeta_1)) - \overline{H_1(z, \zeta_1)}\, \mathcal{L}_2^* (H_2^*(z, \zeta_2))]\, d\sigma_z =$$

$$= \sum_{j=1}^{k'} \left(\operatorname{Re} \iint_G \overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, w_j^*(z)\, d\sigma_z \right) \operatorname{Re} w_j^*(\zeta_1) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left(\operatorname{Re} \iint_G \overline{H_1(z, \zeta_1)} w_j(z)\, d\sigma_z \right) \operatorname{Im} w_j(\zeta_2) = 0.$$

Учитывая (2.27) и (2.36) можем тогда переписать (2.42) в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_{1\varepsilon}} H_1(z, \zeta_1)\, \overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, dz + \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_{2\varepsilon}} H_1(z, \zeta_1)\, \overline{H_2^*(z, \zeta_2)} dz = 0.$$

В левой части последнего равенства, сохраняя только те величины которые не стремятся к нулю и применяя лемму 1, будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_{1\varepsilon}} Z_1(z, \zeta_1)\, \overline{H_2^*(z, \zeta_2)}\, dz + \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_{2\varepsilon}} H_1(z, \zeta_1)\, \overline{Z_2^*(z, \zeta_2)}\, dz =$$

$$= -\operatorname{Re} H_2^*(\zeta_1, \zeta_2) + \operatorname{Im} H_1(\zeta_2, \zeta_1) = 0,$$

то есть:

$$\operatorname{Im} H_1(\zeta_2, \zeta_1) = \operatorname{Re} H_2^*(\zeta_1, \zeta_2).$$

Итак (2.39) доказано.

Для докатзательства других соотношений (2.38), (2.40), (2.41), нам достаточно в качестве $w(z)$, $w^*(z)$ в формуле Грина (1.7) взять $H_1(z, \zeta_1)$, $H_1^*(z, \zeta_2)$ и $H_2(z, \zeta_1)$, H_1^* (z, ζ_2), и $H_2(z, \zeta_1)$, $H_2^*(z, \zeta_2)$ соответственно.

§ 3. Представление решения задачи Римана – Гильберта через данные задачи с помощью системы функций Грина.

Пусть задача А разрешима. Общее решение её имеет вид:

$$w(z) = w_0(z) + \sum_{i=1}^{k} c_i w_i(z), \tag{3.1}$$

где $w_0(z)$ — частное решение задачи, $\{w_i(z)\}$, $i = 1, \ldots, k$ — полная ортонормированная система линейно независимых решений однородной задачи, а c_i — произвольные вещественные постоянные.

Всегда мы можем считать часное решение $w_0(z)$ ортогональным ко всем $w_i(z)$. Действительно, если это не так, то в качестве его, возьмём другое частное решение $\widetilde{w}(z)$:

$$\widetilde{w}(z) = w_0(z) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i(z)$$

где коэффициенты α_i выбраны так, чтобы

$$\operatorname{Re} \iint\limits_{G} \overline{w_j(z)}\, \widetilde{w}(z)\, d\sigma =$$

$$= \mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\; w_0(z)\, d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \,\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\; w(z) d\sigma =$$

$$= \mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_j(z)}\; w_0(z)\, d\sigma + \alpha_j = 0.$$

Итак в дальнейщем положим:

$$\mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{w_0(z)}\; w_i(z)\, d\sigma = 0, \quad i = 1,\dots, k. \tag{3.2}$$

Пусть $G_\varepsilon = G \setminus K_\varepsilon$, где K_ε — малый круг радиуса ε с центром $z \in G$. Применим в области G_ε формулу Грина (1.7) беря $w_0(\zeta)$ и $H_1^*(\zeta, z)$ в качестве $w(\zeta)$ и $w^*(\zeta)$ соответственно имеем:

$$\mathrm{Re}\iint\limits_{G_\varepsilon} [\overline{H_1^*(\zeta, z)}\, \mathscr{L}_\zeta(w_0) - \overline{w_0(\zeta)}\, \mathscr{L}_\zeta^*(H_1^*(\zeta, z))]\, d\sigma_\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \{\mathscr{P}(w_0)\, Q^*(H_1^*(\zeta, z)) + \mathscr{P}^*(H_1^*(\zeta, z))\, Q(w_0)\}\, ds_\zeta +$$

$$+ \mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} w_0(\zeta)\, \overline{H_1^*(\zeta, z)}\, d\zeta. \tag{3.3}$$

Замечая, что $\mathscr{L}_\zeta(w_0) = F(\zeta)$, $\mathscr{P}(w_0)\big|_\Gamma = \gamma(\zeta)$, имеем в силу (2.32), (2.33):

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} w_0(\zeta)\, \overline{H_1^*(\zeta, z)}\, d\zeta = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \gamma(\zeta)\, Q^*(H_1^*\zeta, z))\, ds_\zeta -$$

$$- \mathrm{Re}\iint\limits_{G_\varepsilon} \overline{H_1^*(\zeta, z)}\, F(\zeta)\, d\sigma_\zeta + \sum_{j=1}^{k}\Big(\mathrm{Re}\iint\limits_{G_\varepsilon} \overline{w_0(\zeta)}\, w_j(\zeta) d\sigma\Big) \mathrm{Re}\, w_j(z).$$

Стремляя $\varepsilon \to 0$ и учитывая (3.2), лемму 1, найдём:

$$\mathrm{Re}\, w_0(z) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \gamma(\zeta)\, Q^*(H_1^*(\zeta, z))\, ds_\zeta - \mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{H_1^*(\zeta, z)}\, F(\zeta)\, d\sigma. \tag{3.4}$$

Проводя аналогичное рассуждение для $w_0(\zeta)$ и $H_2^*(\zeta, z)$ вместо (3.4) получим:

$$\mathrm{Im} w_0(z) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \gamma(\zeta) Q^*(H_2^*(\zeta, z))\, ds_\zeta - \mathrm{Re}\iint\limits_G \overline{H_2^*(\zeta, z)}\, F(\zeta)\, d\sigma_\zeta. \tag{3.5}$$

После умножения (3.5) на i и сложения полученного равенства с (3.4), нетрудно убедимся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть задача А — разрешима. Тогда любое её решение представимо через правые части уравнения (1.1) и краевого условия (1.2) в виде:*

$$w(z)=\frac{1}{2}\int\gamma(\zeta)\left[Q^*H_1^*(\zeta,\ z))+iQ^*(H_2^*(\zeta,\ z))\right]ds_\zeta -$$

$$-\operatorname{Re}\iint\limits_G\overline{H_1^*(\zeta,z)}\,F(\zeta)\,d\sigma_\zeta-i\operatorname{Re}\iint\limits_G\overline{H_2^*(\zeta,z)}\,E(\zeta)\,d\sigma_\zeta+\sum_{i=1}^{k}c_iw_i(z), \tag{3.6}$$

где c_i — произвольные вещественные постоянные.

Замечание. Используя теорему 2 можно ещё записать формулу (3.6) в другой форме:

$$w(z)=\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma\gamma(\zeta)\left[H_1(z,\ \zeta)\operatorname{Im}\lambda(\zeta)\zeta'-H_2(z,\zeta)\operatorname{Re}\lambda(\zeta)\zeta'\right]ds_\zeta -$$

$$-\iint\limits_G[H_1(z,\ \zeta)\operatorname{Re}F(\zeta)+H_2(z,\zeta)\operatorname{Im}F(\zeta)]\,d\sigma_\zeta+\sum_{i=1}^{k}c_i\,w_i(\zeta) \tag{3.6'}$$

§ 4. Частный случай

В этом параграфе будут приведены в явной форме системы функций Грина одной задачи Римана — Гильберта в единичном круге для системы Коши — Римана. Из полученных результатов можно восстановить некоторые классические формулы.

Пусть задана задача Римана — Гильберта:

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}=F(z) \tag{4.1}$$

$$\operatorname{Re}\bar z^n\ w(z)\Big|_\Gamma=\gamma(z) \tag{4.2}$$

в единичном круге. Здесь n — целое число. Отметим, что краевое условие (4.2) является каноническим для задачи Римана — Гильберта в случае односвязной области [1]. Построим в явном виде системы функции Грина для задачи (4.1) — (4.2).

Теорема 4. *Для задачи (4.1) — (4.2), системы функций Грина являюсюя следующими функциями:*

1°) *в случае* $n\geqslant 0$:

$$H_1(z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{z^{2n+1}}{1-\bar\zeta z}+\sum_{k=-n}^{+n}\frac{n-k+1}{2(n+1)}\left(\zeta^{n+k+1}z^{n-k}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\bar\zeta^{n+k+1}z^{n+k}\right)\right] \tag{4.3}$$

$$H_2(z, \zeta) = \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{z^{2n+1}}{1 - \bar{\zeta} z} - \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \left(\zeta^{n+k+1} z^{n-k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\zeta}^{n+k+1} z^{n+k}\right)\right] \tag{4.4}$$

$$H_1^*(z, \zeta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{\zeta}} + \frac{\zeta^{2n+1}}{1 - \zeta \bar{z}} + \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \left(\zeta^{n-k} - \bar{\zeta}^{n+k}\right) z^{n+k+1}\right] \tag{4.5}$$

$$H_2^*(z, \zeta) = \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - \frac{\zeta^{2n+1}}{1 - \zeta \bar{z}} - \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \left(\zeta^{n-k} + \bar{\zeta}^{n+k}\right) z^{n+k+1}\right] \tag{4.6}$$

2) *в случае* $n < 0$:

$$H_1(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}^{-2n-1}}{1 - \bar{\zeta} z} + \sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{n+k}{2n} \left(\bar{\zeta}^{-n-k-1} + \zeta^{-n+k-1}\right) \bar{z}^{-n+k}\right] \tag{4.7}$$

$$H_2(z,\zeta) = \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta}^{-2n-1}}{1 - \bar{\zeta} z} - \sum_{k=n+1}^{-n+1} \frac{n+k}{2n} \left(\bar{\zeta}^{-n-k-1} - \zeta^{-n-k-1}\right) \bar{z}^{-n+k}\right] \tag{4.8}$$

$$H^*(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}^{-2n-1}}{1 - \zeta \bar{z}} + \sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{n+k}{2n} \left(\bar{\zeta}^{-n+k} \bar{z}^{-n+k-1} + \zeta^{-n+k} \bar{z}^{-n+k-1}\right)\right] \tag{4.9}$$

$$H_*(z,\zeta) = \frac{i}{\pi}\left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - \frac{\bar{z}^{-2n-1}}{1 - \zeta \bar{z}} - \sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{n+k}{2n} \left(\bar{\zeta}^{-n+k} \bar{z}^{-n-k+1} - \zeta^{-n+k} \bar{z}^{-n+k-1}\right)\right] \tag{4.10}$$

I) Рассмотрим первый случай $n \geqslant 0$

Задача A_0

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 && (4.11) \\ &\operatorname{Re} \bar{z}^n w(z)\Big|_{\Gamma} = 0 && (4.12) \end{aligned}\right.$$

имеет тогда $2n + 1$ следующих линейно независимых ортонормированных решений:

$$w_1(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, i z^n$$

. . . .

$$w_{2k}(z) = \sqrt{\frac{(n+k+1)\ (n-k+1)}{2\pi(n+1)}}\, \left(z^{n+k} - z^{n-k}\right) \tag{4.13}$$

$$w_{2k+1}(z) = \sqrt{\frac{(n+k+1)\ (n-k+1)}{2\pi(n+1)}}\, i(z^{n+k} + z^{n-k})$$

. . . .

$k = 1, 2, \ldots, n$

Задача A^*:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial w^*}{\partial z} = 0 & (4.14) \\ \operatorname{Re}\,[z^n z'(s)\overline{w}^*]_\Gamma = \operatorname{Re}\,[iz^{n+1}\overline{w}^*]_\Gamma = 0 & (4.15) \end{cases}$$

не имеет решений кроме тривиальных.

Нам досточно проверить, что функции $H_1^*(z,\zeta)$, $H_2^*(z,\zeta)$ определенные равенствами (4.5), (4.6) являются решениями задачи (2.32), (2.33), (2.34), и (2.35), (2.36), (2.37) соответственно. После этого, для функций $H_1(z,\zeta)$, $H_2(z,\zeta)$ определенных равенствами (4.3), (4.4), нам остается убедиться в справедливости соотнощений (2.38), (2.39), (2.40), (2.41).

а) Уравнение (2.32) в нашем случае, в силу (4.13) запищется в виде:

$$-\frac{\partial H_1^*(z,\zeta)}{\partial z} = \frac{n+1}{\pi}\, iz^n \operatorname{Re}\,(i\zeta^n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k+1)\ (n-k+1)}{2\pi(n+1)} (z^{n+k} - z^{n-k}) \times$$

$$\times \operatorname{Re}\,(\zeta^{n+k} - \zeta^{n-k}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k+1)(n-k+1)}{2\pi(n+1)}\, i(z^{n+k} + z^{n-k}) \operatorname{Re} i\,(\zeta^{n+k} - \zeta^{n-k})$$

Поэтому задача (2.32), (2.33), (2.34) имеет вид:

$$-\frac{\partial H_1^*(z,\zeta)}{\partial z} = \sum_{k=-n}^{+n} \frac{(n+k+1)\,(n-k+1)}{2\pi\,(n+1)} (\overline{\zeta}^{n+k} - \zeta^{n-k})\, z^{n+k} \qquad (4.16)$$

$$\operatorname{Re}\,[\,i\, z^{n+1}\, \overline{H_1^*(z,\zeta)}\,]_{z\in\Gamma} = 0. \qquad (4.17)$$

Очевидно, что правая часть (4.5) удовлетворяет уравнению (4.16). Для проверки условия (4.17), нам достаточно показать, что на единичной окружности Γ величина $\overline{z}^{n+1} H_1^*(z,\zeta)$ вещественна. Учитывая, что на Γ $z\overline{z} = 1$ имеем:

$$\pi\,\overline{z}^{n+1} H_1^*(z,\zeta)\big|_{z\in\Gamma} = \frac{\overline{z}^{n+1}}{\overline{z}-\overline{\zeta}} + \frac{\zeta^{2n+1}\,\overline{z}^{n+1}}{1-\zeta\,\overline{z}} + \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} (\zeta^{n-k} - \overline{\zeta}^{n+k}) z^k =$$

$$= \frac{\overline{z}^{n}}{1-\overline{\zeta}\,z} + \frac{\zeta^{2n+1}\,\overline{z}^{n+1}}{1-\zeta\overline{z}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} (\zeta^{n-k} - \overline{\zeta}^{n+k})\, z^k + \frac{1}{2}(\zeta^n - \overline{\zeta}^n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{2(n+1)} (\zeta^{n+k} - \overline{\zeta}^{n-k})\, \overline{z}^k \qquad (4.18)$$

Складывая в две части (4.18) вещественную величину

$$J_1 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{2(n+1)} (\zeta^{n+k} - \bar{\zeta}^{n-k}) \bar{z}^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{2(n+1)} (\bar{\zeta}^{n+k} - \zeta^{n-k}) z^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}^{n+k} z^k + \sum_{k=1}^{n} \zeta^{n+k} \bar{z}^k$$

и замечая, что:

$$\frac{\bar{z}^n}{1-\bar{\zeta} z} = \bar{z}^n [1 + \bar{\zeta} z + \dots + \bar{\zeta}^{n-1} z^{n-1}] + \bar{\zeta}^n + \bar{\zeta}^n \frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k \bar{\zeta}^{n-k} + \bar{\zeta}^n + \bar{\zeta}^n \frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z}.$$

получим:

$$\pi \bar{z}^{n+1} H_1^*(z,\zeta)\big|_{z\in\Gamma} + J_1 = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}^k \bar{\zeta}^{n-k} + \frac{1}{2}(\zeta^n + \bar{\zeta}^n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (\zeta^{n-k} - \bar{\zeta}^{n+k}) z^k + \sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}^{n+k} z^k + \sum_{k=1}^{n} \zeta^{n+k} \bar{z}^k + \frac{\zeta^{2n+1} \bar{z}^{n+1}}{1-\zeta \bar{z}} +$$

$$+ \bar{\zeta}^n \frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z} = \frac{1}{2}(\zeta^n + \bar{\zeta}^n) + \sum_{k=1}^{n} (\bar{z}^k \bar{\zeta}^{n-k} + z^k \zeta^{n-k}) +$$

$$+ \left(\zeta^n \frac{\zeta \bar{z}}{1-\zeta \bar{z}} + \bar{\zeta}^n \frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta} z} \right) = \text{вещественная величина.}$$

Итак (4.17) доказано.

б) Переходим теперь к функции $H_2^*(z,\zeta)$, определенной равенством (4.6). Уравнения (2.35) запищется:

$$-\frac{\partial H_2^*(z,\zeta)}{\partial \bar{z}} = \frac{n+1}{\pi} i z^n \operatorname{Im}(i \zeta^n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k+1)(n-k+1)}{2\pi(n+1)} (z^{n+k} - z^{n-k}) \operatorname{Im}(\zeta^{n+k} - \zeta^{n-k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k+1)(n-k+1)}{2\pi(n+1)} i (z^{n+k} + z^{n-k}) \operatorname{Im} i (\zeta^{n+k} + \zeta^{n-k}).$$

Отсюда задача (2.35), (2.36), (2.37) имеет вид:

$$-\frac{\partial H^*(z,\zeta)}{\partial \bar{z}} = i \sum_{k=-n}^{+n} \frac{(n+k+1)(n-k+1)}{2\pi(n+1)} \left(\bar{\zeta}^{n+k} + \zeta^{n-k} \right) z^{n+k} \tag{4.19}$$

$$\operatorname{Re}\left[i z^{n+1} \overline{H_2^*(z,\zeta)} \right]_{z\in\Gamma} = 0 \tag{4.20}$$

Очевидно, что правая часть (4.6) удовлетворяет уравнению (4.19). Проверим (4.20) и для этого докажем, что на Γ величина $i\bar{z}^{n+1} H^*(z, \zeta)$ чисто мнима. Действительно имеем на Γ:

$$-i\pi\bar{z}^{n+1} H_2^*(z, \zeta) = \frac{\bar{z}^{-n+1}}{\bar{z}-\bar{\zeta}} - \frac{\zeta^{2n+1}\bar{z}^{-n+1}}{1-\zeta\bar{z}} -$$

$$-\sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \left(\zeta^{n-k} + \bar{\zeta}^{n+k}\right) z^k \tag{4. 21}$$

Сложив в две части (4.21) чисто мнимую величину на Γ:

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{2(n+1)} \left(\zeta^{n+k} + \bar{\zeta}^{n-k}\right) \bar{z}^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{2(n+1)} \left(\bar{\zeta}^{n+k} + \zeta^{n-k}\right) z^k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \bar{\zeta}^{n+k} z^k - \sum_{k=1}^{n} \zeta^{n+k} \bar{z}^k$$

получим:

$$-i\pi\bar{z}^{n+1} H_2^*(z, \zeta)\Big|_{z\in\Gamma} + J_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{z}^k \bar{\zeta}^{n-k} - z^k \zeta^{n-k}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{\zeta}^n - \zeta^n\right) +$$

$$+\left(\bar{\zeta}^n \frac{\bar{\zeta} z}{1-\bar{\zeta}z} - \zeta^n \frac{\zeta\bar{z}}{1-\zeta\bar{z}}\right) = \text{чисто мнимая величина.}$$

Итак (4.20) доказано.

в) и г). Чтобы убедиться в справедливости (4.3) и (4.4) введем в рассмотрение функции:

$$K_1^*(\zeta, z) = H_1^*(\zeta, z) + i\, H_2^*(\zeta, z)$$

$$K_2^*(\zeta, z) = H_1^*(\zeta, z) - i\, H_2^*(\zeta, z)$$

Из (4.5), (4.6) найдём:

$$K_1^*(\zeta, z) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z} + \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \zeta^{n+k+1} z^{n-k}\right] \tag{4. 22}$$

$$K_2^*(\zeta, z) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - \sum_{k=-n}^{+n} \frac{n-k+1}{2(n+1)} \zeta^{n+k+1} \bar{z}^{n+k}\right] \tag{4. 23}$$

Кроме того, из теоремы 2 вытекает:

$$H_1(z, \zeta) = \operatorname{Re} H_1^*(\zeta, z) + i \operatorname{Re} H_2^*(\zeta, z) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[H_1^*(\zeta, z) + \overline{H_1^*(\zeta, z)} \right] + \frac{i}{2}\left[H_2^*(\zeta, z) + \overline{H_2^*(\zeta, z)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[K_1^*(\zeta, z) + \overline{K_2^*(\zeta, z)} \right]$$

$$H_2(z, \zeta) = \operatorname{Im} H_1^*(\zeta, z) + i \operatorname{Im} H_2^*(\zeta, z) = \frac{i}{2}\left[\overline{K_2^*(\zeta, z)} - K_1^*(\zeta, z) \right]$$

Отсюда следует (4.3) и (4.4).

2) Теперь рассмотрим второй случай $n < 0$. Доказательство проводится как и выше, поэтому ограничимся только главными чертами рассуждений.

Задача A_0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \bar z} = 0 \\ \operatorname{Re} \bar z^{\,n} w(z)\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

не имеет решений кроме тривиальных, а задача A_0^*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \\ \operatorname{Re} i z^{n+1} \overline{w^*(z)}\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

имеет $-2n-1$ следующих линейно независимых ортонормированных решений:

$$w_1^*(z) = \sqrt{-\frac{n}{\pi}}\, \bar z^{\,-n-1}$$

. . . .

$$w_{2k}^*(z) = \sqrt{-\frac{(n+k)(n-k)}{2\pi n}}\; i \left(\bar z^{\,-n+k-1} - \bar z^{\,-n-k-1} \right)$$

$$w_{2k+1}^*(z) = \sqrt{-\frac{(n+k)(n-k)}{2\pi n}} \left(\bar z^{\,-n+k-1} + \bar z^{\,-n-k-1} \right)$$

. . . .

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Задачи (2.26), (2.27), (2.28) имеет вид:

$$\frac{\partial \dot H_1(z,\zeta)}{\partial \bar z} = -\sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{(n+k)(n-k)}{2\pi n} \times$$

$$\times \left(\zeta^{\,-n+k-1} + \bar\zeta^{\,-n-k-1} \right) z^{\,-n+k-1} \tag{4. 24}$$

$$\operatorname{Re} \bar z^{\,n} H_1(z,\zeta)\Big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{4. 25}$$

Функция $H_1(z, \zeta)$ определенная равенством (4.7) очевидно удовлетворяет (4.24). На Γ имеем:

$$\pi \bar{z}^{n} H_1(z,\zeta)\Big|_{z\in\Gamma} = -\frac{\bar{z}^{n+1}}{1-\zeta\bar{z}} + \frac{\bar{\zeta}^{-2n-1}\,\bar{z}^{-n}}{1-\bar{\zeta}z} +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{n+k}{2n}\left(\bar{\zeta}^{\,-n-k-1} + \bar{\zeta}^{\,-n+k-1}\right)\bar{z}^{-k}$$

Сложив в обе части последнего равенства чисто мнимую величину:

$$J_3 = -\sum_{k=1}^{-n-1} \frac{n-k}{2n}\left(\bar{\zeta}^{\,-n+k-1} + \zeta^{-n-k-1}\right)\bar{z}^{-k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{-n-1} \frac{n-k}{2n}\left(\zeta^{-n+k-1} + \bar{\zeta}^{\,-n-k-1}\right) z^{-k}$$

легко убедимся в том, что $\pi\,\bar{z}^{n} H_1(z,\zeta)\big|_{z\in\Gamma}$ — чисто мниная величина. Итак правая часть (4.7) является решением задачи (2.26), (2.27), (2.28).

Задача (2.29) (2.30) (2.31) имеет вид:

$$\frac{\partial H_2(z,\zeta)}{\partial z} = i \sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{(n+k)(n-k)}{2\pi n}\left(\bar{\zeta}^{\,-n-k-1} - \zeta^{-n+k-1}\right)\bar{z}^{-n+k-1} \tag{4.26}$$

$$\operatorname{Re} \bar{z}^{n} H_2(z,\zeta)\Big|_{z\in\Gamma} = 0 \tag{4.27}$$

Функция $H_2(z,\zeta)$ определенная равенством (4.8) очевидно удовлетворяет (4.26) На Γ имеем:

$$i\pi\,\bar{z}^{n} H_2(,\zeta z) = \frac{\bar{z}^{n+1}}{1-\zeta\bar{z}} + \frac{\bar{\zeta}^{-2n-1}\,\bar{z}^{n}}{1\bar{\zeta}z} + \sum_{k=n+1}^{-n-1} \frac{n+k}{2n}\left(\bar{\zeta}^{-n-k-1} - \zeta^{-n+k-1}\right)\bar{z}^{k}.$$

Сложив в обе части последнего равенства вещественную величину:

$$J_4 = -\sum_{k=1}^{-n-1} \frac{n-k}{2n}\left(\bar{\zeta}^{-n+k-1} - \zeta^{-n-k-1}\right)\bar{z}^{-k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{-n-1} \frac{n-k}{2n}\left(\zeta^{-n+k-1} - \bar{\zeta}^{-n-k-1}\right) z^{-k}$$

убедимся в справедливости условия (4.25). Итак, правая часть (4.8) является решением задачи (2,29), (2.30), (2,31).

Для доказательства (4.9), (4.10), нам остается применить теорему 2. Теорема доказана полностью.

Переходим теперь к восстановлению некоторых известных формул.

Возвратимся к задаче (4.1), (4.2) и допустим сначала, что $n \geqslant 0$. Для этой задачи в силу (4.5) — (4.6) очевидно имеем:

$$Q^*(H_1^*(\zeta, z)) + iQ^*(H_2^*(\zeta, z)) =$$

$$= \operatorname{Im}\left[i\zeta^{n+1}\overline{H_1^*(\zeta,z)}\right] + i\operatorname{Im}\left[i\zeta^{n+1}\overline{H_2^*(\zeta,z)}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\zeta^{n+1}\overline{H_1^*(\zeta,z)}\right] + i\operatorname{Re}\left[\zeta^{n+1}\overline{H_2^*(\zeta,z)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}^{n+1}z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z} + \sum_{k=-n}^{+n}\frac{n-k+1}{2(n+1)}\zeta^k z^{n-k} - \sum_{k=-n}^{+n}\frac{n-k+1}{2(n+1)}\bar{\zeta}^k z^{n+k}\right]$$

так, что формула (3.6) для решения задачи A нам даёт

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}^{n+1}z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\right]ds_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iint_G\frac{z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\overline{F(\zeta)}d\sigma_\zeta + z^n\sum_{k=0}^{n}(d_k z^k - \bar{d}_k z^{-k}) + \sum_{i=1}^{2n+1}c_i w_i(z), \tag{4.28}$$

где

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\gamma(\zeta)\left(\frac{n+k+1}{2(n+1)}\zeta^{-k} - \frac{n-k+1}{2(n+1)}\bar{\zeta}^k\right)ds_\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint_G\left[\frac{n-k+1}{2(n+1)}\bar{\zeta}^{n+k+1}F(\zeta) - \frac{n+k+1}{2(n+1)}\zeta^{n-k+1}\overline{F(\zeta)}\right]d\sigma_\zeta$$

Если $n = 0$, $F(z) \equiv 0$, то (4.28) нам даёт известную формулу Шварца:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}\right]ds_\zeta + ic = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,ds_\zeta + ic.$$

Если $n > 0$ и учитывая, что $z^n\sum_{k=0}^{n}(d_k z^k - \bar{d}_k z^{-k})$ является решением задачи A_0, из (4.28) легко получим формулу для частного решения задачи A:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\gamma(\zeta)\left[\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-z} + \frac{\bar{\zeta}^{n+1}z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\right]ds_\zeta -$$

$$- \frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\sigma_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G\frac{z^{2n+1}}{1-\bar{\zeta}z}\overline{F(\zeta)}d\sigma_\zeta$$

Эта формула также может выводиться из формулы И.Н. Векуа приведенной другим методом в [1] (см. стр. 306).

Наконец, из (3.6), (4.9), (4.10) легко найдём формулу для решения задачи А в случае $n < 0$:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}^{-n}}{1 - \bar{\zeta} z} \right] ds_{\zeta} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\sigma_{\zeta} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{G} \frac{\bar{\zeta}^{-2n-1}}{1 - \bar{\zeta} z} \overline{F(\zeta)} \, d\sigma_{\zeta}$$

Для доказательства этого равенства, мы должны при этом учесть условия разрешимости задачи.

Поступило в Редакцию 15-X-1976г

ЛИТЕРАТУРА

[1] И.Н. Векуа — *Обобщенные аналитические функции.* Москва 1959.

[2] НГУЕН-ТХЫА-ХОП — ДАН БССР 1966 том X, № 1.

[3] НГУЕН-ТХЫА-ХОП — « Дифференциальные уравнения » 1966 том II № 4.

[4] С.Л. СОБОЛЕВ — *Некоторые применения фунционального анализа в математической физике.* 1950.