ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

TOM 2, N° 1 (1977)

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES MATRICES IRRÉDUCTIBLES

HỒ THUẦN

Centre de calcul du Comité d'État des Sciences et Techniques, Hanoi.

Dans ce travail, l'auteur donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée appartenant à la classe FR soit irréductible. On en déduit facilement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice d'ordre n soit irréductible. Ces résultats permettent d'élaborer quelques algorithmes effectifs pour la reconnaissance de l'irréductibilité d'une matrice carrée quelconque. En outre, nous donnons une condition assez générale garantissant la convergence des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution des systèmes d'équations linéaires $Ax = b$, où A est une matrice satisfaisant à la condition de faible dominance. Nous prouvons aussi l'équivalence de cette condition avec celles données dans [3] et [4].

§ 0

Tout d'abord rappelons quelques définitions et résultats bien connus.

Définition 0.1. Soit $A = (a_{ij})$, une matrice complexe d'ordre $n \geqslant 2$. La matrice A est dite réductible s'il existe une partition de l'ensemble des indices $N = \{1, 2, \dots, n\}$ en deux sous ensembles non vides disjoints I et J tels que $a_{ij} = 0$ si $(i, j) \in I \times J$.

Quand une telle partition n'existe pas, A est dite irréductible. Dans le cas où $n = 1$, A est irréductible si et seulement si l'élément unique est non nul.

De cette définition, on déduit facilement que A est réductibe si et seulement s'il existe une matrice permutative P tel que

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & 0 \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right],$$

où A_{11} et A_{22} sont des matrices d'ordre r $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ et $(n-r)$; respectivement.

Définition 0.2. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice complexe d'ordre n. Construisons le graphe orienté $G(A)$ de n sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ tel que P_i et P_j sont reliés par un arc allant de P_i à P_j si et seulement si $a_{ij} \neq 0$. Alors $G(A)$ est appelé le graphe orienté associé à la matrice A.

Rappelons le résultat fondamental suivant [2].

Théorème 0.1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice complexe d'ordre n. Alors A est irréductible si et seulement si $G(A)$ est fortement connexe (c'est à dire pour tout couple (i, j), il existe au moins un chemin allant de P_i à P_j).

§ 1.

Définition 1.1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice complexe d'ordre n et $G(A)$ le graphe orienté associé à A. Nous dirons que A appartient à la classe FR si $G(A)$ possède au moins un sommet P_{i_0} tel que de P_{i_0} à un sommet arbitraire P_j, $j \neq i_0$, il existe toujours un chemin. Autrement dit $A \in FR$ si l'ensemble

$$H = \{ i \mid \forall\ j \neq i, \text{ il existe un chemin de } P_i \text{ à } P_j \} \neq \varnothing$$

De la définition 1. 1., nous avons immédiatement les remarques suivantes:

Remarque 1. $H \subseteq N$ et si $H = N$, A est irréductible.

Remarque 2. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n. Si l'ensemble

$$K = \{ k \mid a_{kj)} \neq 0\ \forall\ j \neq k \} \neq \varnothing$$

Alors $A \in FR$.

En effet, il est évident que si $k \in K$, alors de P_k à P_j, $j \neq k$, il existe un chemin de longueur 1 (composé d'un arc unique).

Remarque 3. Soit $A = (a\ \ )$ une matrice d'orde n. S'il existe au moins un indice i tel que l'ensemble

$$K_i = \{ k \mid a_{ik} \neq 0,\ k \neq i \}$$

est non vide et satisfait à la condition

$$\sum_{k \in K_i} a_{kl}^2 \neq 0 \text{ avec chaque } t \in N \setminus (\{ K_i \} \cup \{ i \}),$$

Alors $A \in FR$.

En effet, il est clair que de P_i à P_j, $j \neq i$, il existe toujours un chemin de longueur au plus égale à 2.

Remarque 4. La classe des matrices irréductibles est un sous ensemble propre de la classe FR.

En effet, si A est irréductible, l'ensemble $H = N = \{1, 2, ..., n\}$ et par suite $A \in FR$.

D'autre part il est facile d'indiquer des matrices appartenant à la classe FR mais réductibles.

Par exemple, pour la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on a $H \neq \emptyset$ car $1 \in H$. C'est pourquoi $A \in FR$. Mais it est évident que A est réductible car elle satisfait à la définition 0. 1. avec

$$I = \{4\}, J = \{1, 2, 3, 5\}$$

Lemme 1. 1. Soit $A \in FR$ et soit $H \neq \emptyset$, l'ensemble décrit dans la definition 1.1. Nous formons la suite suivante des sous ensembles de $N = \{1, 2, ..., n\}$ $H_1 = H$, $H_m = \{ i \mid i \in N \setminus (H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_{m-1})$ et $\exists\ a_{ij} \neq 0$ avec $j \in H_{m-1} \}$ (1.1)

$$m = 2, 3, ..., n$$

Alors les ensembles H_m sont disjoints et si H_e est le premier ensemble vide de la suite, alors $e \leqslant n + 1$. D'autre part, si $e < n$, on a

$$H_e = H_{e+1} ... = H_n = \emptyset.$$

Démonstration. Considérons deux ensembles H_i et H_j avec $i < j$. Si l'un d'eux est side alors $H_i \cap H_j = \emptyset$.

Dans le cas où H_i et H_j sont non vides, nous avons :

$$H_j = \{ k \mid k \in N \setminus (H_1 \cup ... \cup H_i \cup H_{i+1} \cup ... \cup H_{j-1})$$
$$\text{et } \exists\, a_{kt} \neq 0 \quad t \neq k,\ t \in H_{j-1} \}$$

de sorte que $k \in H_j$, entraîne $k \notin H_i$. Donc $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Comme N est un ensemble fini de n éléments, les autres conclusions du lemme sont évidentes.

Théorème 1. 2. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice complexe d'ordre n, $A \in FR$ et $\{H_m\}$ est la suite formée suivante le lemme 1. 1.

Alors A est irréductible si et seulement si

$$H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n = N = \{1, 2, ..., n\}.$$

Démonstration. a) Condition suffisante: Supposons que $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = N$. Soit (i, j), un élément quelconque de $N \times N$. Alors $i \in H_t$, $1 \leqslant t \leqslant n$. Par la définition des ensembles H_m, nous avons

$$a_{il_1} \neq 0 \text{ avec } l_1 \in H_{t-1},$$

$$a_{l_1 l_2} \neq 0 \text{ avec } l_2 \in H_{t-2},$$

$$\vdots$$

$$a_{l_{t-2} l_{t-1}} \neq 0 \text{ avec } l_{t-1} \in H_{t-(t-1)} = H_1.$$

Cela signifie que sur le graphe $G(A)$, il existe un chemin de P_i à $P_{l_{t-1}}$ avec $l_{t-1} \in H_1 \equiv H$. Si j est confondu avec un l_k quelconque $(1 \leqslant k \leqslant t-1)$, la condition suffisante est établie. Dans le cas contraire $l_{t-1} \neq j$. Suivant la définition de H_1, il existe au moins un chemin de $P_{l_{t-1}}$ à P_j.

En un mot, avec le paire arbitraire (i, j), $i \neq j$, il existe toujours un chemin de P_i à P_j Par le théorème 0. 1., A est donc irréductible.

b) Condition néccessaire. Nous démontrons par contradiction. Supposons que A est irréductible et $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n \neq N$. Prenons (i, j) quelconque avec $i \in H \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_n)$ et $j \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$. Dans ce cas il est clair que

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{e-1},$$

avec $e_{-1} < n$, H_{e-1} est le dernier ensemble non vide dans la suite $\{H_m\}$. Alors il ne peut pas avoir un arc partant de P_i à P_j parce que, dans le cas contraire, suivant la définition des ensembles H_m, si $j \in H_t$; i doit appartenir à H_{t+1} où H_{t+1} est l'un des ensembles H_2, H_3, ..., H_{e-1}, $H_e = \varnothing$. Mais cette situation est impossible. C'est pourquoi, de plus, il ne peut pas exister un chemin de P_i à P_j. D'où A est réductible. C'est là une contradiction.

Donc si A est irréductible

$$H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = N.$$

Remarque 5. Dans la démonstration du théorème 1. 2., nous trouvons que, si au lieu de H, nous prenons un sous ensemble propre $\overline{H}$ de H et nous contruisons, au lieu de $\{H_m\}$, la suite $\{\overline{H}_m\}$ de la manière suivante :

$$\overline{H}_1 \equiv \overline{H}$$

$$\bar{H}_m = \{ i \mid i \in N \setminus (\bar{H}_1 \cup \dots \cup \bar{H}_{m-1}) \text{ et } \exists\, a_{ij} \neq 0,\ j \neq i,\ j \in \bar{H}_{m-1} \} \quad (1.\ 2)$$
$$m = 2, 3, \dots, n,$$

le théorème 1. 2 restera valable.

La démonstration n'est que la répétition (mot à mot) de celle du théorème 1. 2, remplaçant H_m par $\bar{H}_m$.

Dans ce qui suit, en particulier dans les applications, nous employons le théorème 1. 2 sous la forme suivante :

Théorème 1. 3. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice d'ordre $n, A \in FR$, $\bar{H} \subseteq H$ et $\{\bar{H}_m\}$ est la suite déterminée par (1. 2).

Alors A est irréductible si et seulement si

$$\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 \cup \dots \cup \bar{H}_n = N = \{1, 2, \dots, n\}$$

Remarque 6. Le lemme 5 (§ 1.) dans [3] peut déduire facilement du théorème 1. 3.

En effet, suivant les hypothèses de ce lemme, la matrice A appartient à la classe FR car

$$L = \{ k \mid a_{kj} \neq 0\ \forall j \neq k \} \neq \emptyset.$$

Et avec $L = \bar{H}_1$ nous avons immédiatement :

$$\bar{H}_2 = N \setminus L = N \setminus \bar{H}_1 .$$

D'où $\quad \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 = N$. C'est pourquoi A est irréductible.

Du théorème 1. 3, on peut déduire facilement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée quelconque d'ordre n soit irréductible.

Posons $\tilde{H}_1^{(i)} = \{ i \}$ $\quad i = 1, 2, \dots, n.$

Avec chaque fixe i, nous formons les suites $\{\tilde{H}_m^{(i)}\}$ de la façon suivante :

$$\tilde{H}_1^{(i)} = \{ i \},$$

$$\tilde{H}_m^{(i)} = \{ k \mid k \in N \setminus (\tilde{H}_1^{(i)} \cup \dots \cup \tilde{H}_{m-1}^{(i)} \text{ et } \exists\, a_{kj} \neq 0,\ j \neq k,\ j \in \tilde{H}_{m-1}^{(i)} \}$$
$$m = 2, 3, \dots, n.$$

Désignons par

$$T^{(i)} = \tilde{H}_1^{(i)} \cup \dots \cup \tilde{H}_n^{(i)},\ i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Théorème 1. 4. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n. La condition nécessaire et suffisante pour A soit irréductible est que

$$T^{(1)} = T^{(2)} = \dots = T^{(n)} = \{1, 2, \dots n\}.$$

Démonstration. a) La condition nécessaire est tout à fait évidente car si A est irréductible, on a $H = N$ et $\widetilde{H}_1^{(i)} = \{ i \}, i = 1, 2, \ldots, n$ sont les sous ensembles propres de H. C'est pourquoi, d'après le théorème 1. 3, nous avons

$$T^{(1)} = T^{(2)} = \ldots = T^{(n)} = N.$$

b) Condition suffisante.

Supposons que $T^{(1)} = T^{(2)} = \ldots = T^{(n)} = N$. Considérons le paire arbitraire

$$(i, j) \in N \times N, \; i \neq j.$$

Car $T^{(j)} = N$ et suivant la construction des ensembles $\widetilde{H}_m^{(j)}$, on peut affirmer que de tous les sommets P_i, $i \neq j$, il existe des chemins partant à P_j. Donc, par le théorème 0. 1., la matrice A est irréductible.

Voici quelques exemples :

Avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous avons :

$$\widetilde{H}_1^{(1)} = \{1\},$$

$$\widetilde{H}_2^{(1)} = \{3, 4\},$$

$$\widetilde{H}_3^{(1)} = \{2\},$$

$$T^{(1)} = \widetilde{H}_1^{(1)} \cup \widetilde{H}_2^{(1)} \cup \widetilde{H}_3^{(1)} = N \equiv \{1, 2, 3, 4\},$$

$$\widetilde{H}_1^{(2)} = \{2\}$$

$$\widetilde{H}_2^{(2)} = \{3\}$$

$$\widetilde{H}_3^{(2)} = \{3, 4\}$$

$$T^{(2)} = \{1, 2, 3, 4\} \equiv N$$

$$\widetilde{H}_1^{(3)} = \{3\}$$

$$\widetilde{H}_2^{(3)} = \{2\}$$

$$\widetilde{H}_3^{(3)} = \{1\}$$

$$\widetilde{H}_4^{(3)} = \{4\}$$

$$T^{(3)} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\widetilde{H}_1^{(4)} = \{4\}$$

$$\widetilde{H}_2^{(4)} = \{2, 3\}$$

$$\widetilde{H}_3^{(4)} = \{1\}.$$

$$T^{(4)} = \{1, 2, 3, 4\} \equiv N$$

donc A est irréductible.

Avec la matrice

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

nous avons

$$\widetilde{H}_1^{(1)} = \{1\}$$

$$\widetilde{H}_2^{(1)} = \{2, 4\}$$

$$\widetilde{H}_3^{(1)} = \{3\}$$

$$T^{(1)} = \{1, 2, 3, 4\} \equiv N$$

$$\widetilde{H}_1^{(2)} = \{2\}$$

$$\widetilde{H}_2^{(2)} = \{3\}$$

$$\widetilde{H}_3^{(2)} = \emptyset$$

$$T^{(2)} = \{2, 3\} \neq N .$$

Donc B est réductible.

Remarque 7. Dans le cas où A est une matrice réductible, alors, d'après le théorème 1.4, il existe au moins un indice $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $T^{(j_0)} \neq N$ et les ensembles $T^{(j_0)}$ et $N \setminus T^{(j_0)}$ sont respectivement les ensembles I et J satisfaisant la definition 0. 1 pour une matrice réductible.

§ 2

Dans cette section nous présentons quelques algorithmes pour la récognition de l'irréductibilité d'une matrice carrée d'ordre n quelconque.

Les lemmes suivants nous seront utiles.

Lemme 2. 1. Soit $A = (a_{ij})$, la matrice d'ordre n. De A nous formons la matrice $A_R = (\alpha_{ij})$ de la façon suivante :

$$\alpha_{ii} = 1 , \forall\, i = 1, 2, , \dots , n,$$

$$\alpha_{ij} = 1 \text{ si } a_{ij} \neq 0 \,,\ i \neq j,$$

$$\alpha_{ij} = 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \,,\ i \neq j.$$

Alors A et A_R sont équivalentes au point de vue irréductible.
Autrement dit A est irréductible si et seulement si et si A_R est irréductible.

La démonstration est tout à fait évidente.

Lemme 2. 2. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice non négative d'ordre n. A est irréductible si et seulement si

$$(I + A)^{n-1} > 0.$$

Démonstration.

a) La condition nécessaire est démontrée dans [2] (lemme 2. 1 p. 26)

b) Condition suffisante. Nous démontrons par contradiction. Supposons que $A \geqslant 0$, $(I + A)^{n-1} > 0$ et A est réductible. Alors il existe une matrice permutative P d'ordre n tel que PAP^T a la forme :

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

dans la quelque A_{11} et A_{22} sont les matrices carrées respectivement d'ordre r et $(n-r)$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Il est clair que

$$PA^m P^T = \underbrace{(PAP^T)\ (PAP^T) \ldots (PAP^T)}_{m \text{ fois}}$$

possède la même structure de PAP^T. D'autre part,

$$(I + A)^{n-1} = C^0_{n-1}\, I + C^1_{n-1}\, A + \ldots + C^{n-1}_{n-1}\, A^{n-1}.$$

C'est pourquoi :

$$P\,(I + A)^{n-1}\, P^T = C^0_{n-1}\, I + C^1_{n-1}\, PAP^T + \ldots + C^{n-1}_{n-1}\, PA^{n-1}\, P^T$$

possède la même structure de PAP^T.

D'où la matrice $(I + A)^{n-1}$ ne peut être positive. C'est une contradiction.

Donc si $A \geqslant 0$ et $(I + A)^{n-1} > 0$, la matrice A est irréductible. Du lemme 2.2 et la forme spéciale de A dans le lemme 2. 1, nous avons :

Corollaire 2. 3. Soit $A_R = (\alpha_{ij})$, la matrice d'ordre n. Alors A est irréductible si et seulement si $A_R^{n-1} > 0$.

ALGORITHME 1. Cet algorithme est basé sur le théorème 1. 4 et peut être décrit par le bloc schéma suivant (Fig. 1)

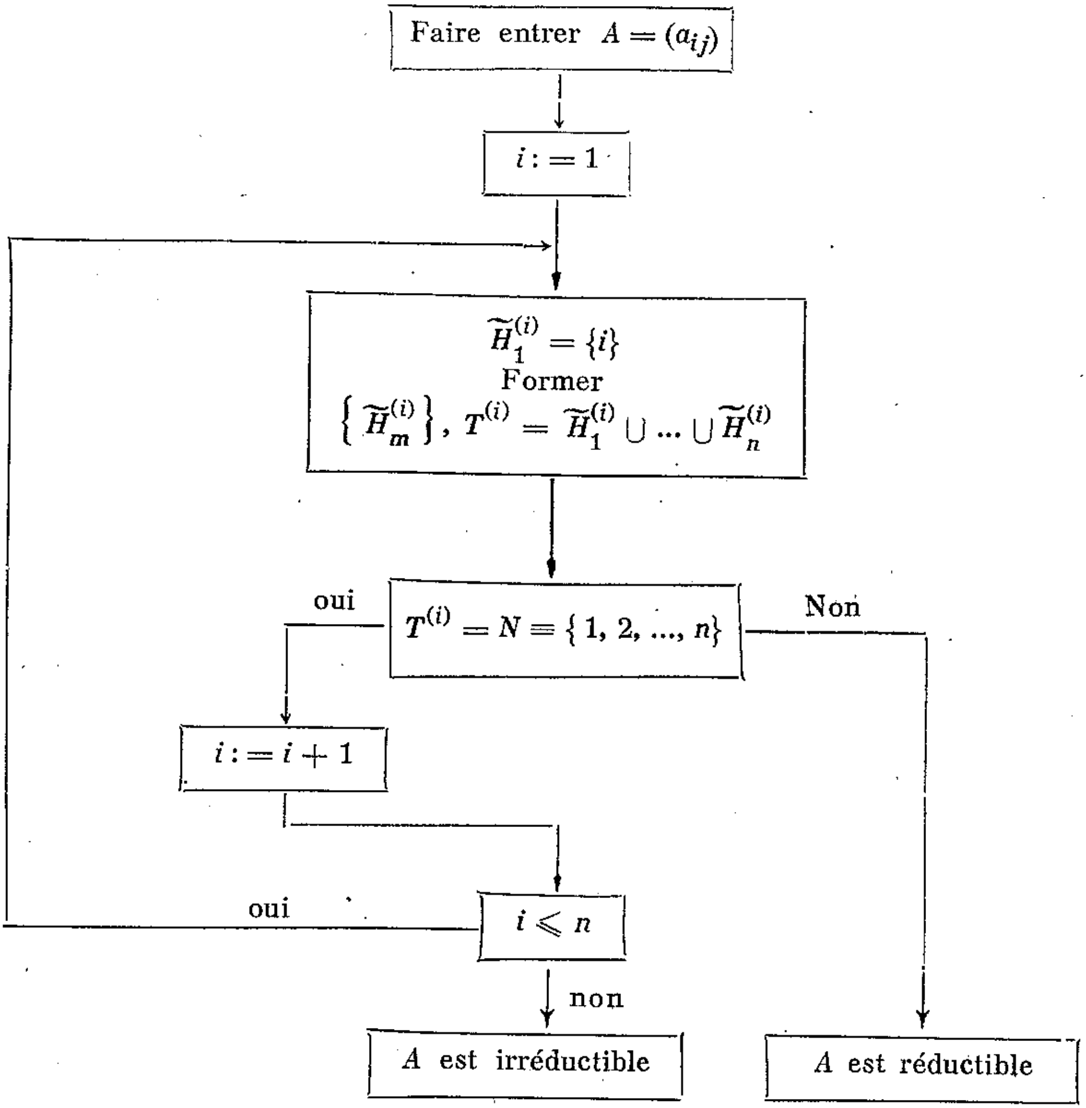


Fig 1

ALGORITHME 2. Cet algorithme est basé sur le corollaire 2. 3 et peut être décrit par le bloc-schéma suivant (Fig. 2)

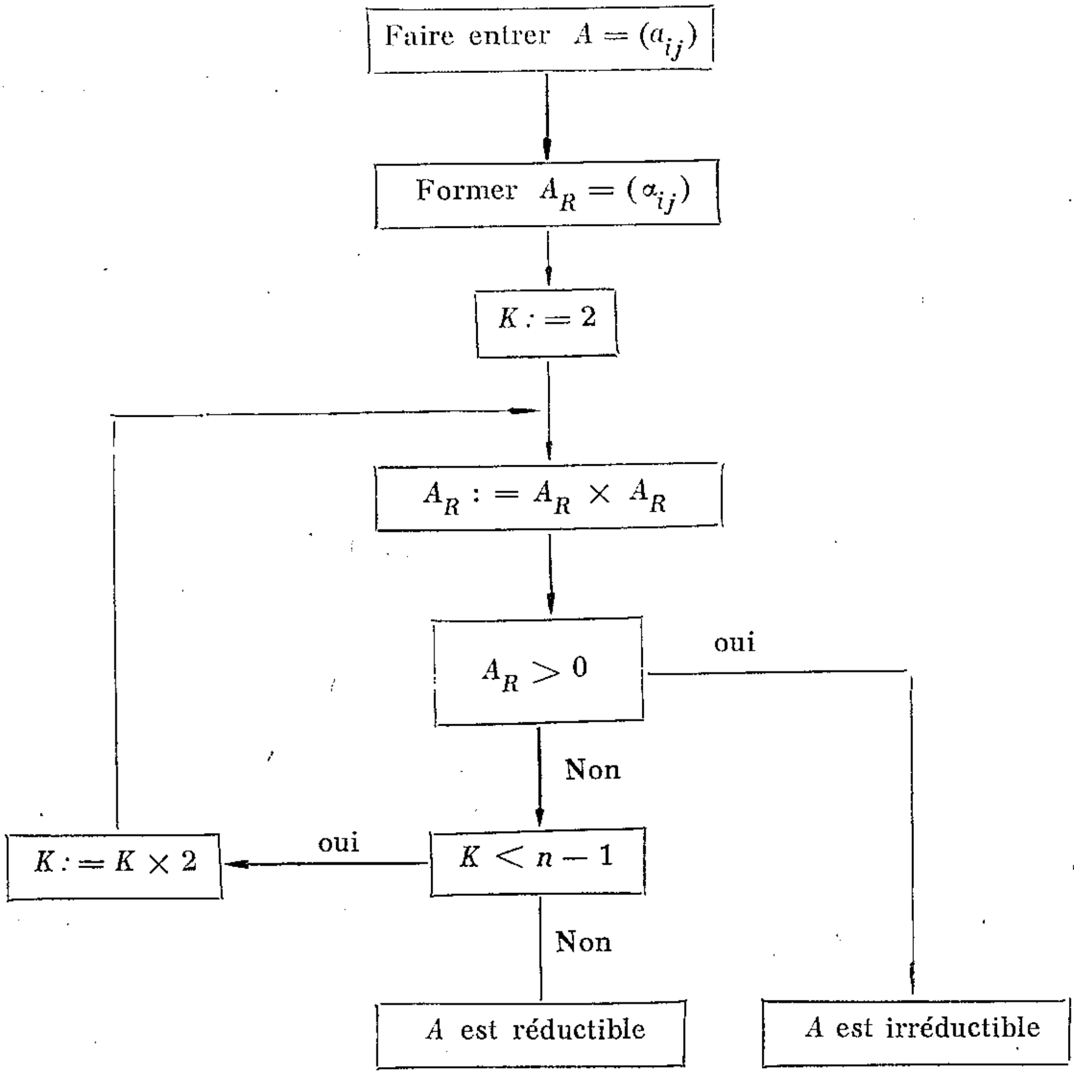


Fig 2

Remarque. Quand on écrit un programme pour réaliser l'algorithme 2 sur un ordinateur électronique, la matrice A_R peut occuper la place de A. En accomplissant la multiplication

$$A_R \times A_R = C = (c_{ij})$$

nous devons seulement garder dans la mémoire la matrice $\widetilde{C} = (\widetilde{c}_{ij})$ avec les éléments

$$\widetilde{c}_{ij} = 1 \text{ si } c_{ij} \neq 0$$

$$\widetilde{c}_{ij} = 0 \text{ si } c_{ij} = 0 .$$

C'est pourquoi, au lieu de déterminer c_{ij} on doit seulement vérifier sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_R pour connaitre qu'y a t'il des éléments respectifs non nuls simultanément.

Cette remarque diminue considérablement la quantité des opérations nécessaires à exécuter.

ALGORITHME 3. Cet algorithme est la combinaison de deux algorithmes 1 et 2 exposés ci-dessus. En même temps, le résultat donné par le théorème 1. 2 est aussi employé.

L'algorithme 3 est decrit par le bloc schéma suivant (Fig. 3)

§ 3

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice complexe d'ordre n satisfaisant à la condition de faible dominance, c'est à dire il existe deux sous ensembles δ et τ de l'ensemble

$$N = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tels que}$$

$$\delta \neq \varnothing, \ \delta \cap \tau = \varnothing, \ \delta \cup \tau = N,$$

$$| a_{ij} | > \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \quad \text{si } i \in \delta$$

$$| a_{ij} | = \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \quad \text{si } i \in \tau$$

De A nous contruisons la matrice $\widetilde{A}$ comme suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{ij} = \varepsilon_{ij} \neq 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \,.\ i \in \delta \\ \widetilde{a}_{ij} = a_{ij} \text{ avec les autres } i, j. \end{cases}$$

Autrement dit $\widetilde{A}$ est obtenue de A par le remplissement des lignes qui ont les indices appartenant à δ.

Pour la solution des systèmes d'équations linéaires $Ax = b$, où A est la matrice d'ordre n satisfaisant la faible dominance, la condition suffisante pour la convergence des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss — Seidel a été donné dans [1]

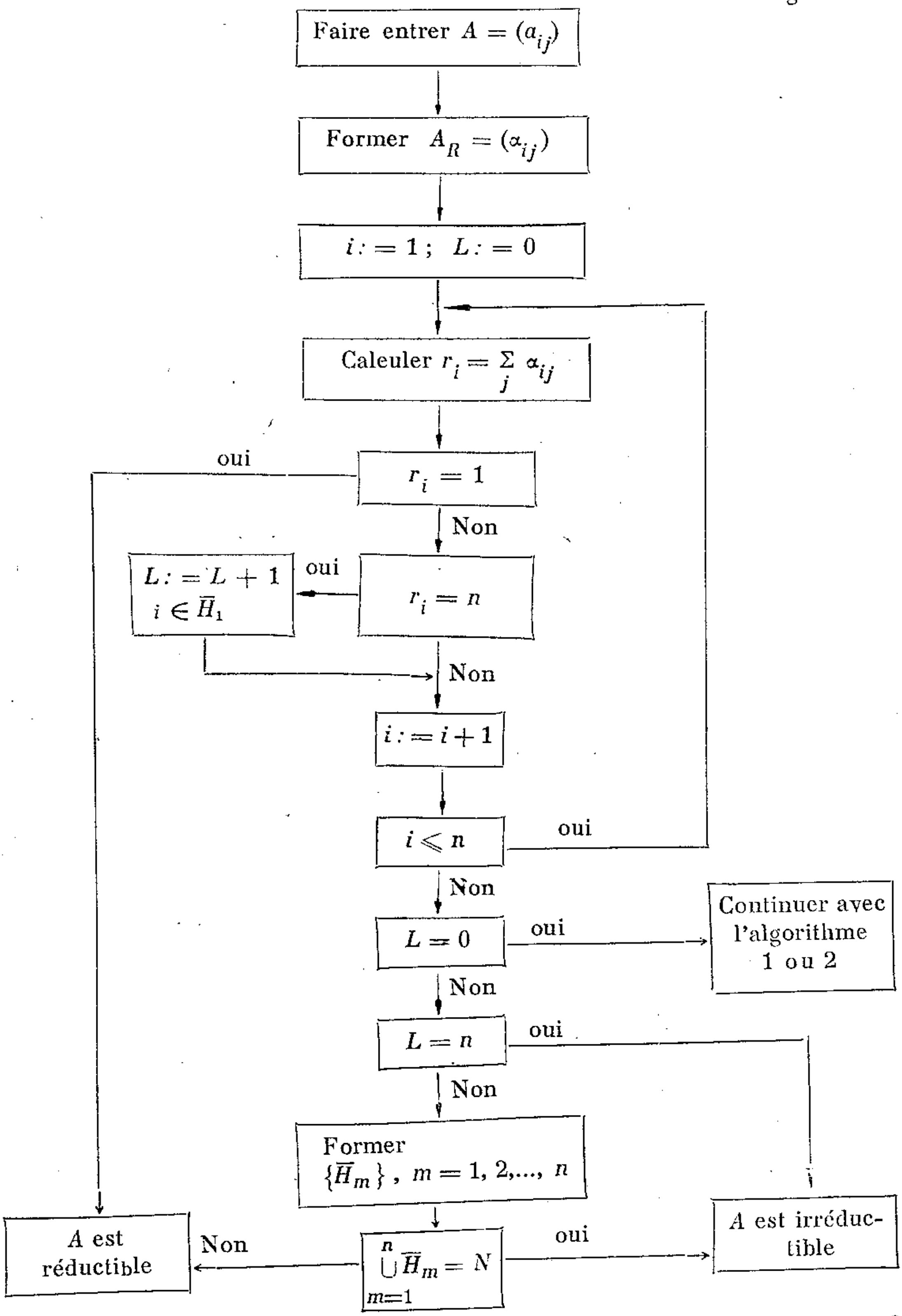
Critère (T_1). $\widetilde{A}$ est irréductible.

En basant sur le théorème 1. 3 (voir § 1), le critère (T_1) est équivalent avec le critère suivant : (avec $\overline{H}_1 \equiv \delta$)

Critère (T_2).

$$\overline{H}_1 \cup \overline{H}_2 \cup \ldots \cup \overline{H}_n = N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Fig 3



Faire entrer $A = (a_{ij})$
Former $A_R = (\alpha_{ij})$
$i := 1$; $L := 0$
Calculer $r_i = \sum_j \alpha_{ij}$
$r_i = 1$
oui
Non
$L := L + 1$
$i \in \overline{H}_1$
oui
$r_i = n$
Non
$i := i + 1$
$i \leqslant n$
oui
Non
$L = 0$
oui
Continuer avec l'algorithme 1 ou 2
Non
$L = n$
oui
Non
Former
$\{\overline{H}_m\}$, $m = 1, 2, \ldots, n$
$\bigcup_{m=1}^{n} \overline{H}_m = N$
Non
oui
A est réductible
A est irréductible

Dans [3] il y a la définition suivante (définition 2, § 2) : La matrice $A=(a_{ij})$ d'ordre n avec tous les éléments diagonaux non nuls est appelée une HK-matrice si elle accomplit les conditions suivantes :

1) L'ensemble

$$K = \{ k \mid | a_{kk} | > \sum_{j \neq k} a_{kj} \} \neq \emptyset ,$$

2) Ou bien $K = N$, ou bien A_k est la matrice irréductible (où $A_k = (l_{ij})$ avec $l_{ij} = 0$ si $i \notin K$ et $a_{ij} = 0$; et $l_{ij} = 1$ pour tous les autres cas)

3) $| a_{ii} | = \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \ \forall\, i \in N \setminus K$.

Ensuite dans [3] Phạm văn Ất a donné une condition suffisante pour la convergence méthodes itératives de Jacobi et de Gauss — Seidel pour la solution des systèmes d'équations linéaires $Ax = b$, où A est la matrice ayant tous les éléments diagonaux non nuls (théorème 1, § 2).

Critère (A). $A=(a_{ij})$ est une HK-matrice.

Pour le même problème ci-dessus, Walter W. dans [4] a démontré la condition suffisante suivante (avec A satisfait à la condition de faible dominance).

Critère (Z_2). Il n'existe pas une partition de l'ensemble $N=\{1, 2,..., n\}$ en deux sous ensembles α et β non vides avec $\alpha \subset \tau$ et

$$a_{ij} = 0 \text{ si } (i, j) \in \alpha \times \beta.$$

Nous démontrons l'équivalence des critères (T_1), (T_2), (A) et) (Z_2).

L'équivalence entre (T_1) et (T_2), de même entre (T_1) et (A) sont faciles à voir.

Maintenant nous démontrons l'équivalence (T_1) et (Z_2).

Tout d'abord nous montrons $(T_1) \Rightarrow (Z_2)$

Supposons que $\widetilde{A}$ est irréductible mais ne satisfait pas à la condition (Z_2). Alors il existe une partition de l'ensemble $N = \{1, 2, \ldots , n\}$ en deux sous ensembles non vides α et β avec $\alpha \subset \tau$ et $a_{ij} = 0$ si $(i, j) \in \alpha \times \beta$.

Mais suivant la construction de $\widetilde{A} = (\widetilde{a_{ij}})$, nous avons

$$\widetilde{a_{ij}} = 0 \text{ si } (i, j) \in \alpha \times \beta.$$

Cela montre que $\widetilde{A}$ est réductible et nous avons une contradiction.

Il nous reste encore à démontrer que $(Z_2) \Rightarrow (T_1)$. Nous démontrons par contradiction.

Supposons que A satisfait (Z_2) et $\widetilde{A}$ est réductible. Alors il existe une partition de N en deux sous ensembles non vides I, J, disjoints tels que

$$\widetilde{a}_{ij} = 0 \text{ si } (i, j) \in I \times J.$$

D'autre part nous savons que les lignes de $\widetilde{A}$ qui ont les indices appartenant à δ ont été remplies par les éléments non nuls, C'est pourquoi si $i \in I$, $i \overline{\in} \delta$ et $i \in \tau$. Donc $I \subset \tau$. D'où il existe deux sous ensembles non vides, disjoints I, J, $I \cup J = = N$, $I \subset \tau$ et $a_{ij} = 0$ si $(i, j) \in I \times J$. Cela montre que A ne satisfait la condition (Z_2) et c'est là une contradiction.

L'équivalence entre (T_1) et (Z_2) est établie. De cette équivalence on peut déduire facilement que la condition (Z_1) et la condition (Z_3) dans [4] ne sont que des cas particuliers du critère (Z_2).

Reçu le 16 Janvier 1976

RÉFÉRENCES

1. Hồ Thuần, *Quelques conditions suffisantes pour la convergence des méthodes itératives de Jacobi et de Gauss — Seidel,* Journal de Mathématiques (en Viet Nam), Hanoi, N°, 1, 1976.

2. Varga, R.S., *Matrix iterative analysis*, Prentice — Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

3. Phạm văn Ất, *Sur la convengence der méthodes itératives de Jacobi et de Gauss—Seidel,* Journal de Mathématique de calcul et de Physique mathématique (en russe), Tome 15 n° 4, 1975.

4. Walter, W., *Bemerkungen Iterationverfahren bei linearen Gleichungsystemten,* Numer. Math. 10, 1967.