ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 2, № 1 (1977)

УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА
В ЛИНЕЙНЫХ АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

PHẠM HỮU SÁCH
Институт математики
Ханой

Известно, что условия экстремума в нелинейных задачах с операторными ограничениями хорошо разработаны. Однако, к линейным задачам они применимы не всегда. Поэтому в линейных задачах возник вопрос о нахождении новых условий экстремума, которые не следуют из нелинейных случаев. В этом направлении имеются работы [1, 2], где изучаются задачи минимизации некоторого функционала f при заданных ограничениях. В предлагаемой статье исследуются аналогичные задачи, где вместо f рассматривается некоторый оператор S и, кроме того, ограничения имеют более общий вид чем в [1, 2]. Из полученных теорем легко получить некоторые результаты работ [1, 2].

§ 1. Условия несовместности систем неравенств.

Для установления необходимых и достаточных условий экстремума нам понадобятся некоторые леммы, справедливость которых доказывается в этом разделе.

Всюду в этой работе, если не специально оговорено противное, будем считать, что U, Y — локально выпуклые отделимые линейные топологические пространства Z — линейное нормированное пространство; $D \subset U$ — непустое выпуклое множество; $N \subset Y$ — непустое выпуклое замкнутое множество; $M \subset Z$ — непустой выпуклый замкнутый конус. Будем рассматривать только конусы с вершиной в нулевой точке. Нулевую точку любого пространства будем обозначать через O, а совокупность всех выпуклых компактных содержащихся в D множеств — через $\mathcal{D}$.

Пусть $T_1 : D \to Y$, $S_1 : D \to Z$ — многозначные выпуклые на D операторы. Напомним [3], что многозначный оператор $T_1 : D \to Y$, сопоставляющий каждому элементу $u \in D$ некоторое непустое множество $T_1 u \subset Y$, называется выпуклым на D, если

$$T_1(\alpha u_1 + (1-\alpha) u_2) \supset \alpha T_1 u_1 + (1-\alpha) T_1 u_2$$
для всех $\alpha \in [0,1]$ и $u_1, u_2 \in D$.

Положим

$$h^{T_1}(u, y^*, N) = \sup \{ < y^*, y > : y \in T_1 u \} - \inf \{ < y^*, y > : y \in N \},$$
$$N^* = \{ y^* \in Y^* : \inf_{y \in N} < y^*, y > > -\infty \},$$

где Y^* — сопряженное к Y пространство, а $< y^*, y >$ означает значение функционала $y^* \in Y^*$ на элементе y. Аналогично определяются $h^{S_1}(u, z^*, M)$ и M^*. Отметим, что M^* совпадает с множеством всех линейных непрерывных функционалов, неотрицательных на M (в силу того, что M — конус).

Положим

$$f(D_1) = \inf_{\substack{y^* \in N^* \\ z^* \in M_1^*}} \sup_{u \in D_1} \{ h^{T_1}(u, y^*, N) + h^{S_1}(u, z^*, M) \},$$

где

$$D_1 \in \mathcal{D}, \quad M_1^* = \{ z^* \in M^* : \| z^* \| = 1 \} \quad (\| \cdot \| \text{ означает норму}).$$

Пусть $\varnothing$ — пустое множество, $\mathring{M}$ — внутренность множества M, а $M_0 = M \setminus \{0\}$.

Основная лемма. I. Пусть $T_1 : D \to Y$, $S_1 : D \to Z$ многозначные полунепрерывные сверху выпуклые на D операторы. Предположим, что совместна система

$$u \in D, \; T_1 u \cap N \neq \varnothing \tag{1.1}$$

и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

А. Найдётся такая точка $m \in M$, для которой $-m \overline{\in} M$, и несовместна система

$$u \in D, \;\; T_1 u \cap N \neq \varnothing, \;\; S_1 u \cap M_0 \neq \varnothing. \tag{1.2}$$

Б. $\mathring{M} \neq \varnothing$ и несовместна система

$$u \in D, \;\; T_1 u \cap N \neq \varnothing, \;\; S_1 u \cap \mathring{M} \neq \varnothing. \tag{1.3}$$

Тогда

$$\sup_{D_1 \in \mathcal{D}} f(D_1) \leqslant 0. \tag{1.4}$$

II. Обратно, пусть имеет место неравенство (1. 4). Если выполняется условие А', то система (1. 2) несовместна. Если выполняется условие Б', то система (1. 3) несовместна

Условие А'. При каждой точке $u \in D$, для которой $S_1 u \cap M_0 \neq \varnothing$, найдётся такая константа $\rho > 0$, что.

$$\inf_{z^* \in M_1^*} \sup_{z \in S_1 u} < z^*, z > \geqslant \rho. \tag{1.5}$$

Условие Б'. При каждой точке $u \in D$, для которой $S_1 u \cap \mathring{M} \neq \varnothing$, найдётся константа $\rho > 0$, удовлетворяющая неравенству (1. 5).

Рассмотрим теперь условие

В. Для каждого ненулевого $y^* \in N^*$ найдётся такая точка $u \in D$, что

$$\sup_{y \in T_1 u} < y^*, y > \; > \; \inf_{y \in N} < y^*, y >.$$

Условие B совпадает с условием R_c'', приведённым в главе 5 книги [4], если оператор T_1 однозначен и N — конус. Условие B выполняется, например, в случае, когда совместна система

$$u \in D\ ,\ T_1 u \cap N' \neq \phi\ , \tag{1.6}$$

где

$$N' = \left\{ n \in N : < y^*, n > \; > \inf_{y \in N} < y^*, y > \text{ для всех } 0 \neq y^* \in N^* \right\}.$$

Следствие. 1. Пусть выполняются условия, приведённые в первой части основной леммы. Пусть, далее, D — компактное множество, Y, Z — банаховы сепарабельные пространства. Тогда найдутся одновременно не равные нулю функционалы $(y^*, z^*) \in N^* \times M^*$, удовлетворяющие неравенству

$$\sup_{u \in D} \left\{ h^{T_1}(u,\ y^*,\ N) + h^{S_1}(u,\ z^*,\ M) \right\} \leqslant 0. \tag{1. 7}$$

(Если выполняется и дополнительное условие В, то можно убедиться, что $Z^* \neq 0$).

II. Обратно, пусть неравенство (1. 7) имеет место для некоторых $(y^*, z^*) \in N^* \times M_1^*$. Если выполняется условие A' ($Б'$), то система (1. 2) ((1. 3) соответственно) несовместна.

Доказательство основной леммы и её следствия опирается на схему доказательства леммы 2 из работы [5]. Утверждения второй части основной леммы и её следствия можно доказать от противного. Пусть теперь выполняются условия, приведённые в первой части леммы. Пусть D_1 — произвольное множество из $\mathcal{D}$. Так как система (1. 1) совместна, то без ограничения общности можно считать, что совместна система

$$u \in D_1\ ,\ T_1 u \cap N \neq \phi.$$

Возьмём теперь произвольную последовательность $m_i \in \widetilde{M}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к нулю. Здесь

$$\widetilde{M} = \begin{cases} M', & \text{если выполняется условие } A. \\ \overset{\circ}{M}, & \text{если выполняется условие } Б. \end{cases}$$

(M' — множество всех точек $m \in M$, для которых $-m \,\overline{\in}\, M$).

При фиксированном i ясно, что $K_i \cap H = \phi$, где

$$H = \bigcup_{u \in D_1} T_1 u \times S_1 u \subset Y \times Z, \quad K_i = N \times (M + m_i).$$

Легко видеть, что множество H выпукло и компактно, а K_i выпукло и замкнуто (в произведении $Y \times Z$ пространств Y и Z). В силу теоремы об отделимости выпуклых множеств найдутся линейные одновременно не равные нулю функционалы $\left(y_i^*,\ z_i^* \right) \in Y^* \times Z^*$, удовлетворяющие следующему неравенству для всех $(y, z) \in H$

$$< y_i^*, y > + < z_i^*, z > < \inf_{y \in N} < y_i^*, y > + \inf_{z \in M} < z_i^*, z + m_i >. \qquad (1.8)$$

Отсюда вытекает неравенство (1.4), Пусть теперь выполняются дополнительные условия, приведенные в первой части следствия основной леммы. Положим $D_1 = D$. Так как $\left(y_i^*, z_i^* \right) \neq 0$, то можно считать, что $\left\| \left(y_i^*, z_i^* \right) \right\| = 1$. Из (1. 8) получим неравенства

$$\left\langle y_i^*, y \right\rangle + \left\langle z_i^*, z \right\rangle - \left\langle y_i^*, n \right\rangle < \left\langle z_i^*, m_i \right\rangle \leqslant \| m_i \| \qquad (1.9)$$

для всех $(y, z) \in H$ и $n \in N$. В силу слабой компактности единичного шара пространства $Y^* \times Z^*$ можно считать без ограничения общности, что последовательность функционалов (y_i^*, z_i^*) слабо сходится к некоторым функционалам $(y^*, z^*) \neq 0$ при $i \to \infty$. Отсюда и из (1. 9) легко проверить справедливость неравенства (1. 7). Если выполняется и условие В, то $z^* \neq 0$, что можно доказать от противного.

Всюду в дальнейшем, если не специально оговорено противное, будем предполагать, что $D = U$, и будем обозначать через $T : U \to Y$, $S : U \to Z$ (однозначные) линейные непрерывные операторы, а через T^* и S^* линейные сопряжённые к T, S операторы.

Лемма 1. Пусть $T_1 = T$ и $S_1 = S$ *).

I. Пусть $0 \in N$ и выполянется одно из условий A, $Б$. Тогда

$$0 \overline{\in} E, \qquad (1.10)$$

где

$$E = \left\{ (T^* y^* + S^* z^*, \inf_{y \in N} < y^*, y >) : y^* \in N^*, z^* \in M_1^* \right\},$$

а черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma(U \times R)^*, U \times R)$ (R — прямая).

II. Обратно, если выполняются включение (1. 10) и условие A' ($Б'$), то система (1. 2) ((1. 3) соответственно) несовместна.

Доказательство. 1. Условие $0 \in N$ показывает, что система (1. 1) совместна и $\inf_{y \in N} < y^*, y > \leqslant 0$ для всех $y^* \in Y^*$. В силу основной леммы для каждой пары $\gamma = (\varepsilon, D_1)$, где $\varepsilon > 0$ и $D_1 \in \mathcal{D}$, найдутся функционалы $(y_\gamma^*, z_\gamma^*) \in N^* \times M_1^*$, удовлетворяющие неравенству

$$\sup_{u \in D_1} \left\{ \left\langle T^* y_\gamma^* + S^* z_\gamma^*, u \right\rangle - \inf_{y \in N} \left\langle y_\gamma^*, y \right\rangle \right\} < \varepsilon. \qquad (1.11)$$

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$ и произвольные точки $u_1, \ldots, u_k$ из U. Будем обозначать через D_1^k выпуклую оболочку множества точек $u_1, \ldots, u_k, -u_1, \ldots, -u_k$. Ясно, что $D_1^k \in \mathcal{D}$ (см. [6], стр. 104). Таким образом, найдутся функционалы (y_γ^*, z_γ^*)

*) Лемма 1 может быть доказана для конечного числа онораторов S и конусов M.

$\in N^* \times M_1^*$, удовлетворяющие (1.11), где $D_1 = D_1^k$. Так как точки u_i, $-u_i$ и 0 принадлежат D_1^k, то при $i = 1,\ldots, k$ имеем

$$\left\langle T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma, u_i \right\rangle < \varepsilon + \inf \left\{ \left\langle y^*_\gamma, y \right\rangle : y \in N \right\},$$

$$\left\langle T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma; -u_i \right\rangle < \varepsilon + \inf \left\{ \left\langle y^*_\gamma, y \right\rangle : y \in N \right\}, -\varepsilon < 0 \leqslant -\inf_{y \in N} \left\langle y^*_\gamma, y \right\rangle < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| \left\langle T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma, u_i \right\rangle \right| < \varepsilon + \inf_{y \in N} \left\langle y^*_\gamma, y \right\rangle \leqslant \varepsilon \ (i = 1, \ldots k), \tag{1.12}$$

$$\left| \inf_{y \in N} \left\langle y^*_\gamma; y \right\rangle \right| < \varepsilon. \tag{1.13}$$

Неравенства (1. 12), (1. 13) и произвольность числа $\varepsilon > 0$ и точек u_i $(i = 1, \ldots, k)$ доказывают включение (1.10).

II. Пусть теперь выполняются (1. 10) и условие A', но система (1. 2) совместна, т.е. существует некоторая точка u_0, удовлетворяющая системе (1. 2). Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу (1. 10) можно найти функционалы $\left(y^*_\gamma, z^*_\gamma\right) \in N^* \times M_1^*$, для которых имеет место условие

$$-\inf_{y \in N} < y^*_\gamma, y > + < T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma, u_0 > < \varepsilon. \tag{1.14}$$

С другой стороны,

$$0 < \rho_0 \leqslant \inf_{z^* \in M_1^*} < z^*, Su_0 > \leqslant < z^*_\gamma, Su_0 > . \tag{1.14}$$

Неравенства (1. 14), (1. 15) и условие $Tu_0 \in N$ дают

$$0 < \rho \leqslant \varepsilon,$$

что невозможно в силу произвольности ε. Таким образом, система (1. 2) несовместна. Доказательство несовместности системы (1. 3) можно провести аналогично. Лемма доказана.

Замечание 1. Если $Z = R$, $M = R^-$ — отрицательная полуось прямой, то $S^*M_1^* = \{-S\}$ и условия A', $Б'$ выполняются. Отсюда следует, что в данном случае несовместность системы (1. 2) эквивалентна выполнению включения

$$(S, 0) \in \overline{E_1},$$

где

$$E_1 = \left\{ (T^*y^*, \inf_{y \in N} < y^*, y >) : y^* \in N^* \right\}.$$

Если N — конус, то это утверждение не что иное как утверждение леммы 1. 2 работы [2].

Следствие 1. Пусть пространство Y, (не обязательно замкнутое) множество N и операторы T_1, S_1 имеют вид $Y = Y^1 \times Y^2$, $N = N^1 \times N^2$,

$$T_1 u = (T^1 u - t^1, T^2 u - t^2), \ S_1 u = Su,$$

где Y^i — локально выпуклое отделимое линейное топологическое пространство; $N^i \subset Y^i$ — (не обязательно замкнутое) выпуклое множество; t^i — некоторая фиксированная точка из $-N^i$; $T^i : X \to Y^i$, $S: X \to Z$ — линейные непрерывные операторы. Положим

$$N_{t^i} = \left\{ \lambda (n + t^i) : \lambda \geqslant 0,\ n \in N^i \right\}.$$

I. Пусть N_{t^i} $(i = 1, 2)$ замкнуто и выполняется хотя бы одно из условий A, $Б$ Тогда

$$0 \in \overline{E}_{t^1,\ t^2}, \tag{1.16}$$

где

$$E_{t^1,\ t^2} = \Big\{ T^{1*} y^{1*} + T^{2*} y^{2*} + S^* z^* : \inf_{y \in N^i} < y^{i^*}, y > +$$
$$+ < y^{i^*}, t^i > = 0,\ y^{i^*} \in N^{i^*}\ (i = 1, 2),\ z^* \in \overset{*}{M}_1 \Big\},$$

T^{i^*} — сопряженный к T^i оператор, а черта означает замыкание в слабой тополонии σ (U^*, U).

II. Обратно, если выполняются условие (1. 16) и условие A' $(Б')$, то система (1.2) ((1. 3) соответственно) несовместна.

Доказательство. Положим

$$\widehat{N} = N_{t^1} \times N_{t^2} \subset Y^1 \times Y^2,\ \widehat{T} u = (T^1 u,\ T^2 u).$$

Ясно, что совместна система

$$u \in U,\ \widehat{T} u \in \widehat{N}.$$

Докажем несовместность системы

$$u \in U,\ \widehat{T} u \in \widehat{N},\ \ S u \in \widetilde{M}, \tag{1.17}$$

где

$$\widetilde{M} = \begin{cases} M_0, & \text{если выполняется условие } A; \\ \overset{\circ}{M}, & \text{если выполняется условие } Б. \end{cases}$$

Действительно, пусть система (1. 17) имеет решение $\overline{u}$. Тогда для некоторых $\lambda^i \geqslant 0$ и $n^i \in N^i$ имеем $T^i \overline{u} = \lambda^i (n^i + t^i)$ и $S \overline{u} \ni \widetilde{M}$. Ясно, что для любого $\beta > 0$

$$S(\beta \overline{u}) = \beta S \overline{u} \in \widetilde{M} \text{ и } T^i(\beta \overline{u}) - t^i = \beta \lambda^i n^i + (1 - \beta \lambda^i)(-t^i).$$

Если взять β такое, что $0 < \beta \lambda^i \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$, то $T^i (\beta\ \overline{u}) - t^i \in N^i$, так как N_i — выпукло. Отсюда следует, что система (1. 2) или (1. 3) имеет решение $\beta \overline{u}$, что невозможно. Лемма 1 и соотношение

$$\hat{N}^* = \left\{ y^* = (y^{1*}, y^{2*}) : y^{i^*} \in N^{i^*}, < y^{i^*}, t^i > + \inf_{y \in N^i} < y^{i^*}, y > = 0 \ (i = 1, 2) \right\}$$

показывает справедливость следствия.

Следствие 2. Пусть $0 \in N$, где N — некоторое выпуклое (не обязательно замкнутое) множество.

I. Пусть $\mathring{M} \neq \phi$ и имеет место соотношение

$$T^{-1}(\overline{N}) = \overline{T^{-1}(N)}, \tag{1.18}$$

где черта означает сильное замыкание. Если система

$$Tu \in N, \ Su \in \mathring{M} \tag{1.19}$$

несовместна, то выполняется включение (1. 10).

II. Обратно, если выполняются включение (1. 10) и условие $Б'$ то система (1. 19) несовместна.

Доказательство. Ясно, что несовместность системы (1. 19) влечёт за собой несовмест ность системы

$$Tu \in \overline{N}, \ Su \in \mathring{M}. \tag{1.20}$$

В самом деле, пусть последняя система имеет решение u_0. Соотношение (1. 18) показывает, что существует обобщенная последовательность $\{u_\alpha\}$, сходящаяся к u_0 и удовлетворяющая включению $Tu_\alpha \in N$. Из непрерывности оператора T следует, что обобщенная последовательность $\{Su_\alpha\}$ сходится к Su_0. Это противоречит включению $Su_0 \in \mathring{M}$, так как $Su_\alpha \in \mathring{M}$. Таким образом, система (1. 20) несовместна. Отметим, что

$$N^* = (\overline{N})^*; \ \inf_{y \in \overline{N}} < y^*, y > = \inf_{y \in N} < y^*, y >.$$

Отсюда вытекает справедливость следствия.

Рассмотрим теперь операторы

$$T_1 u = Tu - t \qquad (u \in U), \tag{1.21}$$

$$S_1 u = Su - s \qquad (u \in U), \tag{1.22}$$

где $t \in Y$, $s \in Z$ — фиксированные точки. Норму элемента (z, α) из произведения $Z \times R$ линейных нормированных пространств Z и R определим следующим образом

$$\| (z, \alpha) \| = \| z \| + | \alpha |.$$

Тогда, как известно, норма элемента (z^*, α^*) из пространства $(Z \times R)^*$ имеет вид

$$\| (z^*, \alpha^*) \| = \max (\| z^* \|, | \alpha^* |).$$

Положим $R^+ = - R^-$, $\overset{+}{R_0} = R^+ \setminus \{ 0 \}$,

$$M_1^{'*} = \left\{ (z^*, \alpha^*) : z^* \in M^*, \ \alpha^* \in R^+, \| (z^*, \alpha^*) \| = 1 \right\},$$

$$F = \left\{ (T^* y^* + S^* z^*, - < y^*, t > - < z^*, s > + \alpha^*) : y^* \in N^*, (z^*, \alpha^*) \in M_1^{'*} \right\} \tag{1.23}$$

Следствие 3. Пусть операторы T_1 и S_1 принимают вид (1. 21), (1. 22).

I. Пусть N — конус и выполняется одно из условий A, $Б$. Тогда

$$0 \in \overline{F}\,, \tag{1.24}$$

где черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma((U \times R)^*, U \times R)$.

II. Обратно, если выполняются включение (1. 24) и условие A' ($Б$'), то система (1.2) ((1. 3) соответственно) несовместна.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$T'(u, \alpha) \in N\,;\ \ S'(u, \alpha) \in \widetilde{M'}\ , \tag{1.25}$$

где

$$\widetilde{M'} = \begin{cases} M_0 \times R_0^+, \text{ если выполняется условие } A\,; \\ M \times R_0^+\ , \text{ если выполняется условие } Б, \end{cases}$$

а операторы $T' : U \times R \to Y$ и $S' : U \times R \to Z \times R$ определяются следующим образом :

$$T'(u, \alpha) = Tu - \alpha t, \quad S'(u, \alpha) = (Su - \alpha s, \alpha).$$

Система (1. 25) несовместна потому, что N и M конусы. Применяя лемму 1*), получим включение (1. 24). Для доказательства утверждений второй части следствия достаточно показать несовместность системы (1. 25), т.е. согласно лемме 1 показать, что условие A' ($Б$') имеет место и для оператора S', если условие A' ($Б$' соответственно) имеет место для S_1. Предположим, что $S'(u, \alpha) \in \widetilde{M'}$, т.е. $Su - \alpha s \in \widetilde{M}$ (определение $\widetilde{M}$ см. в доказательстве следствия 1) и $\alpha > 0$. Так как $Su_1 - s \in \widetilde{M}$, где $u_1 = \dfrac{u}{\alpha}$, то для всех $z^* \in M_1^*$ имеем $< z^*, Su_1 - s > \geqslant \rho > 0$. Возьмём произвольную точку $(z^*, \alpha) \in M'^*_1$.

Имеются два случая :

1. $\| z^* \| = 1$. Тогда $< z^*, Su_1 - s > + \alpha^* \geqslant \rho$.
2. $| \alpha^* | = 1$. Тогда $\alpha^* = 1, < z^*, Su_1 - s > + \alpha^* \geqslant 1$.

Таким образом, для всех $(z^*, \alpha^*) \in M'^*_1$ выполняются неравенства

$$< z^*, Su_1 - s > + \alpha^* \geqslant \min\,(1, \rho) > 0.$$

Следовательно,

$$\inf_{(z^*,\alpha^*) \in M'^*_1} \{< z^*, Su - \alpha s > + \alpha^*\alpha\} \geqslant \rho',$$

где $\rho' = \alpha \min\,(1, \rho) > 0$. Следствие доказано.

---

* См. сноску на стр. 66.

Замечание 2. Предположим, что система (1. 1) совместна и множество F замкнуто в слабой топологии $\sigma\,((U \times R)^*, U \times R)$. Тогда включение (1. 24) показывает существование функционалов $y^* \in N^*$, $(z^*, \alpha^*) \in M'^*_1$, для которых

$$T^*y^* + S^*z^* = 0, \tag{1.26}$$

$$-< y^*, t > - < z^*, s > = -\alpha^*. \tag{1.27}$$

Ясно, что $z^* \neq 0$. В самом деле, в противном случае условия (1. 26) и (1. 27) дают

$$< y^*, Tu - t > = < T^* y^*, u > - < y^*, t > = -\alpha^* = -1 < 0$$

для всех $u \in U$, что противоречит совместности системы (1. 1). Таким образом, из (1. 24) следует существование функционалов $(y^*, z^*) \in N^* \times M_1^*$, удовлетворяющих равенству (1. 26) и условию

$$-< y^*, t > - < z^*, s > \leqslant 0. \tag{1.28}$$

Следствие 4. Пусть операторы T_1 и S_1 принимают вид (1. 21), (1. 22).

I. Пусть N — конус и имеет место один из следующих случаеб:

а. Система

$$Tu - t \in N, \; Su - s = 0 \tag{1 29}$$

совместна и выполняется условие А.

б. Система (1. 1) совместна и выполняется условие Б.

Тогда справедливо включение

$$0 \in \overline{G}, \tag{1.30}$$

где

$$G = \{(T^*y^* + S^*z^*, -< y^*,t > - < z^*, s > + \alpha^*) : y^* \in N^*, \alpha^* \in R^+, z^* \in M_1^*\},$$

а черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma((U \times R)^*, U \times R)$.

II. Обратно, если выполняются включение (1. 30) и условие A' ($Б'$), то систем (1. 2) ((1. 3) соответственно) несовместна.

Доказательство. Утверждения второй части следствия можно доказать от противного. Рассмотрим утверждение первой части. Пусть $N' = N \times R^+ \subset Y \times R$ и $T' : U \times R \to Y \times R$, $S' : U \times R \to Z$ — операторы, определяемые формулами

$$T'(u,\alpha) = (Tu - \alpha t, \alpha) \;, \; S'(u,\alpha) = Su - \alpha s.$$

Пусть имеет место случай а. Докажем несовместность системы

$$T'(u,\alpha) \in N' \;, \quad S'(u,\alpha) \in M_0.$$

В самом деле, пусть она имеет решение (u,α). Имеются два случая:

1. $\alpha > 0$. Тогда точка $u_1 = \dfrac{u}{\alpha}$ — решение системы (1. 2), что невозможно.

2. $\alpha = 0$, т.е. $Tu \in N$, $Su \in M_0$. Ясно, что для некоторого решения u_0 системы (1. 29) имеем

$$T(u+u_0)-t=Tu+Tu_0-t\in N,$$
$$S(u+u_0)-s=Su+Su_0-s=Su\in M_0,$$

т.е. точка $u+u_0$ — решение системы (1. 2), что невозможно.

Пусть имеет место случай б. Докажем несовместность системы

$$T'(u,\alpha)\in N', \quad S'(u,\alpha)\in \overset{\circ}{M}.$$

В самом деле, пусть она имеет решение (u,α). Если $\alpha>0$, то точка $\frac{u}{\alpha}$ — решение системы (1. 3), что невозможно. Если $\alpha=0$, то для всех $\beta>0$ имеем

$$T(u_0+\beta u)-t=Tu_0-t+\beta Tu\in N,$$

где u_0 — некоторое решение системы (1. 1). Так как Su — внутренняя точка конуса M, то для достаточно больших $\beta>0$

$$\frac{1}{\beta}(Su_0-s)+Su\in \overset{\circ}{M},$$

т.е. $S(u_0+\beta u)-s\in\overset{\circ}{M}$. Это означает, что $u_0+\beta u$ — решение системы (1.3), что невозможно.

Для завершения доказательства достаточно воспользоватся леммой 1.

Замечание 3. Если множество G замкнуто в слаоой тополонии $\sigma((U\times R)^*, U\times R)$, то включение (1. 30) показывает существование функционалов $(y^*,z^*)\in N^*\times M_1^*$, удовлетворяющих условиям (1. 26), (1. 28).

Замечание 4. Во всех полученных леммах и следствиях замкнутость множств N, M не использовалась при доказательстве достаточности.

Лемма 2. Пусть

$$G'=\left\{(T^*y^*+S^*z^*,-\langle y^*,t\rangle-\langle z^*,s\rangle):y^*\in N^*,z^*\in M_1^*\right\}$$

и совместна система (1. 29). Включение $0\in\overline{G}$ имеет место тогда и только тогда, когда $0\in\overline{G'}$. Здесь черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma((U\times R)^*,U\times R)$.

Доказательство. Ясно, что из $0\in\overline{G'}$ следует, что $0\in\overline{G}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $0\in\overline{G}$, т.е. найдётся обобщённая последовательность

$$\left\{\left(T^*y^*_\gamma+S^*z^*_\gamma,-\langle y^*_\gamma,t\rangle-\langle z^*_\gamma,s\rangle+\alpha^*_\gamma\right)\right\},$$

сходящаяся слабо к 0, где

$$(y^*_\gamma,\ z^*_\gamma,\ \alpha^*_\gamma)\in N^*\times M_1^*\times R^+.$$

Имеем

$$-<y^*_\gamma,t>-<z^*_\gamma,s>+\alpha^*_\gamma\geqslant-<y^*_\gamma,t>-<z^*_\gamma,s>=$$

$$=<y^*_\gamma,Tu-t>-<S^*z^*_\gamma+T^*y^*_\gamma,u>\geqslant-<T^*y^*_\gamma+S^*z^*_\gamma,u>, \qquad (1.31)$$

где u — любое решение системы (1. 29). Из (1. 31) ясно, что обобщенная последовательность $\{-<y^*_\gamma, t> - <z^*_\gamma, s>\}$ сходится к нулю. Таким образом, обобщенная последовательность

$$\{(T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma, -<y^*_\gamma, t> - <z^*_\gamma, s>)\}$$

слабо сходится к нулю, что и требовалось доказать.

2. Условия экстремума в линейных абстрактных задачах.

Рассмотрим теперь задачу нахождения точки экстремума линейного непрерывного оператора $S: D \to Z$ при ограничениях

$$u \in D, \qquad Tu - t \in N, \tag{2.1}$$

т.е. задачу нахождения допустимой точки u_0, обладающей тем свойством, что для любой допустимой точки u из условия $Su - Su_0 \in M$, следует, что $Su_0 - Su \in M$. Здесь M — заданный выпуклый замкнутый конус пространства Z. Напомним, что точка u называется допустимой, если она удовлетворяет системе (2. 1).

Введём в рассмотрение следующие условия:

А''. $\{<\inf \{<z_*, Su> : z_* \in M^*_1\} > 0$ при любой U, для которой $T(u+u_0) - t \in N$, $Su \in M_0$*).

Ясно, что условие А'' выполняется, если $Z = R$.

Г. $M \neq \{0\}$ и М — острый конус (т.е. если $0 \neq m \in M$, то $-m \overline{\in} M$).

Д. $M \neq Z$, $\overset{o}{M} \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Пусть $D = U$ и выполняется хотя бы одно из условий Г, Д. Пусть далее, u_0 — допустимая точка. Для того чтобы u_0 была точкой экстремума оператора S при ограничениях* (**2.1**)*, необходимо, а в случае выполнения услвия А'' и достаточно, чтобы нашлась обобщенная последовательность $\{(y^*_\gamma, z^*_\gamma)\} \subset N_* \times M^*_1$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *Обобщенная последовательность $\{T^*y^*_\gamma + S^*z^*_\gamma\}$ сходится к нулю в слабой топологии $\sigma(U^*, U)$.*

2. *Обобщенная последовательность*

$$\{<y^*_\gamma, t - Tu_0> + \inf_{y \in N} <y^*_\gamma, y>\} \tag{2.2}$$

сходится к нулю.

---

*) Для теорем 4 — 8 условие А'' может быть заменено на следующее: $<z,^* Su> > 0$ при любом $z^* \in M^*$ и любой u, для которой $T(u+u_0) - t \in N$, $Su \in M_0$.

Доказательство I. Необходимость. Пусть u_0 —точка экстремума оператора S при ограничениях (2. 1). Покажем несовместность системы

$$Tu \in \widetilde{N} \quad , \quad Su \in \widetilde{M}, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{N} = t - Tu_0 + N$,

$$\widetilde{M} = \begin{cases} M_0, & \text{если выполняется условие Г;} \\ \overset{\circ}{M}, & \text{если выполняется условие Д.} \end{cases} \tag{2.4}$$

В самом деле, пусть система (2. 3) имеет решение u_1. Тогда $u = u_1 + u_0$ — доспутимая точка и

$$Su - Su_0 = Su_1 \in \widetilde{M}. \tag{2.5}$$

Так как u_0 —точка экстремума, то

$$Su - Su_0 \in \widetilde{M}. \tag{2.6}$$

Если $\widetilde{M} = M_0$, то (2.5) и (2.6) показывает, что конус M не является острым, что противоречит условию Г. Если $\widetilde{M} = \overset{\circ}{M}$, то нулевая точка является внутренней конуса M, т.е. $M = Z$, что невозможно. Таким образом, система (2.3) несовместна. Так как u_0 — допустимая точка, то $0 \in \widetilde{N}$. Применяя лемму 1, получим включение

$$0 \in \overline{E'},$$

где

$$E' = \{(T^* y^* + S^* z^*, \langle y^*, t - Tu_0 \rangle + \inf_{y \in N} \langle y^*, y \rangle) : y^* \in N^*, z^* \in M_1^*\}. \tag{2.7}$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

II. *Достаточность.* Пусть u_1 —такая допустимая точка, что $Su_1 - Su_0 \in M$. Для доказательства того, что u_0 — точка экстремума, достаточно показать, что $Su_1 - Su_0 = 0$. В самом деле, в противном случае, положив $u = u_1 - u_0$, имеем

$$Su \in M_0, \tag{2.8}$$

$$T(u + u_0) - t \in N. \tag{2.9}$$

Пусть $\{(y^*_\gamma, z^*_\gamma)\}$ — обобщенная последовательность, о которой идёт речь в теореме 1. Включения (2.8), (2.9) дают

$$0 \leqslant \langle z^*_\gamma, Su \rangle \leqslant \langle T^* y^*_\gamma + S^* z^*_\gamma, u \rangle -$$

$$- \langle y^*_\gamma, t - Tu_0 \rangle - \inf\{\langle y^*_\gamma, y \rangle : y \in N\}. \tag{2.10}$$

Из (2.10) ясно, что обобщенная последовательность $\{\langle z^*_\gamma, Su \rangle\}$ стремится к нулю, что противоречит условию A''.

Замечание 5. Пусть $D = U$ и выполняется условие Д. Пусть, далее, (необязательно замкнутое) выпуклое множество N удовлетворяет соотношению

$$T^{-1}\overline{(\overline{t - Tu_0 + N})} = \overline{T^{-1}(t - Tu_0 + N)}.$$

Тогда утверждение теоремы 1 остаётся в силе. Доказательство следует из следствия 2 и несовместности системы (2. 3) при $\widetilde{M} = \mathring{M}$.

Замечание 6. При доказательстве достаточности не использовалась замкнутость множеств N, M (см. замечание 4).

Теорема 2. *Пусть $D = U$ и выполняется хотя бы одно из условий Г, Д. Пусть, далее, пространство Y, (необязательно замкнутое) множество N и оператор T имеют вид*

$$Y = Y^1 \times Y^2 \; , \; N = N^1 \times N^2 \; , \; T = (T^1 \; , \; T^2)$$

(определения Y^i, N^i и T^i см. в следствии 1). Пусть наконец, $t = (t^1 \; , t^2)$ $(t^i \in Y^i)$, u_0 — допустимая точка, и конус

$$N_{t^i - T^i u_0} = \left\{ \lambda (n + t^i - T^i u_0) : \lambda \in R^+ , n \in N \right\} \qquad (i = 1,2)$$

является замкнутым. Для того чтобы u_0 была точкой экстремума оператора S при ограничениях (2.1), необходимо, а в случае выполнения условия A'' и достаточно, чтобы нашлась обобщённая последовательность

$$\left\{ (y^{1*}_\gamma \; , y^{2*}_\gamma \; , z^*_\gamma) \right\} \subset N^{1*} \times N^{2*} \times M^*_1 \, ,$$

удовлетворяющая условиям:

1. *Обобщенная последовательность $\left\{ T^{1*} y^{1*}_\gamma + T^{2*} y^{2*}_\gamma + S^* z^*_\gamma \right\}$ сходится к нулю в слабой топологии $\sigma\,(U^*, U)$.*

2. $$\langle y^{i*}_\gamma \; , t^i - T^i u_0 \rangle + \inf_{y \in N^i} \langle y^{i*}_\gamma \; , y \rangle = 0 \qquad (i = 1,2).$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1 и замечания 6, необходимость из несовместности системы (2.3) и следствия 1.

Теорема 1.3 работы [2] представляет собой частный случай теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $D = U$ и выполняется условие Д. Пусть, далее, N — любое (необязательно замкнутое) множество, а u_0 — допустимая точка. Пусть, наконец имеет место соотношение*

$$T^{-1}\left(\overline{N_{t - Tu_0}}\right) = \overline{T^{-1}\left(N_{t - Tu_0}\right)}, \tag{2.11}$$

где

$N_{t - Tu_0} = \left\{ \lambda(n + t - Tu_0) : \lambda \in R^+ , \; n \in N \right\}$, а черта означает сильное замыкание в пространстве U. Для того чтобы U_0 была точкой экстремума оператора S при, ограничениях (2.1), необходимо, а в случае выполнения условия A'' И достаточно чтобы нашлась обобщенная последовательность, $\{(y^*_\gamma, z^*_\gamma)\} \subset N_* \times M^*_1$, удовлетворяющая первому условию теоремы 1 и равенству

$$< y^*_\gamma, \; t - Tu_0 > + \inf_{y \in N} < y^*_\gamma, \; y > = 0. \tag{2.12}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1 и замечания 6, а необходимость из несовместности системы

$$Tu \in N_{t-Tu_0}, \quad Su \in \overset{0}{M},$$

из следствия 2 и из того, что включение $y^* \in (N_{t-Tu_0})^*$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$< y^*, \ t - Tu_0 > + \inf_{y \in N} < y^*, \ y > = 0. \qquad (2.13)$$

Замечание 7. Если конус N_{t-Tu_0} замкнут, то имеет место соотношение (2.11). Отметим ещё, что теорему 1 работы [1] легко получить из теоремы 3.

Теорема 4 *В дополнение к условиям теоремы I предположим, что множество E' (см. (2.7)) замкнуто в слабой топологии* σ $((U \times R)^*, U \times R)$. *Для того чтобы* u_0 *была точкой экстремума оператора S при ограничениях (2.1), необходимо, а в случае выполнения условия A'' и достаточно, чтобы нашлись функционалы* $(y^*, z^*) \in N^* \times M_1^*$, *удовлетворяющие условиям (1.26) и (2.13).*

Утверждение теоремы верно и для случая, когда вместо замкнутости выпуклогог. множества N предполагается, что выполняются условия, приведённые в замечании

Теорема 5. *В дополнение к условиям теоремы 2 предположим, что множество*

$$E_{t^1-T^1u_0,\ t^2-T^2u_0} = \Big\{ T^{1*}y^{1*} + T^{2*}y^{2*} + S^*z^* : <y^{i^*}, \ t^i - T^iu_0> + \inf_{y \in N^i} <y^{i^*}, y>,$$

$$y^{i^*} \in N^{i^*} \ (i = 1,2), \ z^* \in M_1^* \Big\}$$

замкнуто, в слабой топологии σ (U^*, U). *Для того чтобы* u_0 *была точкой экстремума оператора S при ограничениях (2.1), необходимо, а в случае выполнения условия A'' и достаточно, чтобы нашлись функционалы* $(y^{1*}, y^{2*}, z^*) \in N^{1*} \times N^{2*} \times M_1^*$, *для которых:*

1. $T^{1*}y^{1*} + T^{2*}y^{2*} + S^*z^* = 0.$
2. $<y^{i^*}, t^i - T^iu_0> + \inf\limits_{y \in N^i} <y^{i^*}, y> = 0 \quad (i = 1,2).$

Теорема 6. *В дополнение к условиям теоремы 3 предположим, что множество*

$$E_{t - Tu_0} = \Big\{ T^*y^* + S^*z^* : \inf_{y \in N} < y^*, y > + < y^* \ t - Tu_0 > = 0,$$

$$y^* \in N^*, \ z^* \in M_1^* \Big\}$$

замкнуто в слабой топологии σ (U^*, U). *Тогда верно утверждение теоремы 4.*

Доказательство теорем 4—6 можно провести на основе доказательства теорем 1—3 и слабой замкнутости множеств E', $E_{t^1-T^1u_0,\ t^2-T^2u_0}$ и E_{t-Tu_0}.

Отметим, что теорема 2 работы [1] и теоремы 1. 4 работы [2] являются непосредственными следствиями теорем 5 и 6.

Теорема 7. *Пусть $D = U$ и выполняется хотя бы одно из условий Г, Д. Пусть, далее, N — конус, u_0 — допустимая точка. Пусть, наконец, имеет место одно из следующих условий:*

1. Множество

$$F^{\cdot} = \{ (T^* y^* + S^* z^*, < y^*, Tu_0 - t > + \alpha^*) : y^* \in N^*, z^* \in M^*, \alpha^* \in R^+, \max (\| z^* \|, \alpha^*) = 1 \}$$

замкнуто в слабой топологии σ $((U \times R)^*, U \times R)$.

2. Множество

$$G^{\cdot} = \{ (T^* y^* + S^* z^*, < y^*, Tu_0 - t > + \alpha^*) ; y^* \in N^*, z^* \in M_1^*, \alpha^* \in R^+ \}$$

замкнуто в слабой топологии σ $((U \times R)^*, U \times R)$.

Тогда верно утверждение теоремы 4.

Доказательство. Достаточность получается из теоремы 1. Докажем необходимость. Пусть u_0 — точка экстремума. Тогда, как известно (см. доказательство теоремы 1), несовместна система

$$Tu - t' \in N, \ Su \in \widetilde{M},$$

где $t' = t - Tu_0$.

С другой стороны, система

$$Tu - t' \in N, \ Su = 0$$

совместна потому, что она имеет решение $u = 0$. Из замечаний 2, 3 непосредственно следует справедливость требуемого утверждения.

Замечание 8. Пусть $D = U$ и выполняется одно из условий Г, Д. Пусть, далее, N — конус и u_0 — точка экстремума. На основе несовместности системы

$$Tu - t \in N, \ Su - Su_0 \in \widetilde{M}$$

($\widetilde{M}$ определяется формулой (2.4)) можно доказать справедливость утверждения теоремы 4 если одно из следующих множеств является слабо замкнутым:

$$E^{\cdot\cdot} = \left\{ (T^* y^* + S^* z^*, - < y^*, t > - < z^*, Su_0 >) : \ y^* \in N^*, z^* \in M_1^* \right\},$$

$$F^{\cdot\cdot} = \left\{ (T^* y^* + S^* z^*, - < y^*, t > - < z^*, Su_0 > + \alpha^* : \ y^* \in N^*, \right.$$
$$\left. z^* \in M^*, \alpha^* \in R^+, \max (\| z^* \|, \alpha^*) = 1 \right\},$$

$$G^{\cdot\cdot} = \left\{ (T^* y^* + S^* z^*, - < y^*, t > - < z^*, Su_0 > + \alpha^*) : \right.$$
$$\left. y^* \in N^*, z^* \in M_1^*, \ \alpha^* \in R^+ \right\}.$$

Однако, следует отметить, что слабая замкнутость множества $E^{\cdot\cdot}$ ($F^{\cdot\cdot}$, $G^{\cdot\cdot}$) эквивалентна слабой замкнутости множества $E^{\cdot}$ ($F^{\cdot}$; $G^{\cdot}$ соответственно).

Пусть теперь z^* — произвольный фиксированный функционал из M_1^*. Положим

$$H(u, y^*, z^*) = < z^*, Su > + <y^*, Tu-t> - \inf_{y \in N} <y^*, y>,$$

где $u \in U$, $y^* \in N^*$.

Точка $(u_0, y^*) \in U \times N^*$ называется седловой точкой обобщенной функции Лагранжа $H(u, y^*, z^*)$ на множестве $U \times N^*$, если для всех $(u, y_1^*) \in U \times N^*$ имеем

$$H(u, y^*, z^*) \leqslant H(u_0, y^*, z^*) \leqslant H(u_0, y_1^*, z^*). \tag{2.14}$$

Теорема 8.*I. Пусть имеются все условия, приведённые в одной из теорем 4—7. Если u_0 — точка экстремума оператора S при ограничениях (2.1), то существуют функционалы $(y^*, z^*) \in N^* \times M_1^*$, для которых точка (u_0, y^*) является седловой точкой обобщенной функции Лагранжа $H(u, y^*, z^*)$.*

II. Обратно, пусть $D = U$, N — выпуклое замкнутое множество и $(u_0, y^*) \in U \times N^*$ — седловая точка обобщенной функции Лагранжа $H(u, y^*, z^*)$, где z^* — некоторый функционал из M_1^*. Пусть, далее, выполняется условие A''. Тогда u_0 — точка экстремума оператора S при ограничениях (2.1).

Доказательство. 1. Для доказательства утверждения первой части теоремы достаточно показать, что если выполняются условия (1. 26) и (2.13), то (u_0, y^*) — седловая точка функции $H(u, y^*, z^*)$. Действительно, в силу того, что $Tu_0 - t \in N$, имеем для любого $y_1^* \in N^*$

$$< y^*, Tu_0 - t > - \inf_{y \in N} < y^*, y > = 0$$

$$\leqslant < y_1^*, Tu_0 - t > - \inf_{y \in N} < y_1^*, y >.$$

Отсюда вытекает выполнение второго из неравенств (2.14). Для любой точки $u \in U$ равенство (1.26) даёт

$$<T^*y^* + S^*z^*, \ u> = 0 = < T^*y^* + S^*z^*, \ u_0 >,$$

т.е. $H(u, y^*, z^*) = H(u_0, y^*, z^*)$ для любой $u \in U$. Таким образом, неравенства (2.14) выполняются.

II. Так как N^* — выпуклый конус, то $y^* + \widetilde{y^*} \in N^*$ при всех $\widetilde{y^*} \in N^*$. Положив $y_1^* = y^* + \widetilde{y}^*$ во втором из неравенств (2.14), находим

$$<\widetilde{y}^*, Tu_0 - t> \geqslant \inf_{y \in N} <\widetilde{y}^*, y>$$

при всех $\widetilde{y}^* \in N^*$, т.е. $Tu_0 - t \in N$ в силу выпуклости и замкнутости множества N. Итак, u_0 — допустимая точка. Положив теперь $y_1^* = 0$, получим из (2.14)

$$<z^*, \ Su - Su_0> \leqslant - < y^*, Tu - t > + \inf_{y \in N} <y^*, y>.$$

Следовательно, если u — доспустимая точка, то $< z^*, \ Su - Su_0 > \ \leqslant 0$, т.е. $Su - Su_0 \overline{\in} M_0$ в силу условия A''. Это показывает, что u_0 — точка экстремума.

Отметим, что теорема 2' В.Л. Левина [1] является частным случаем теоремы 3.

Если N — выпуклый конус, то теорема 5 работы [1] показывает, что условие (2.11) нельзя ослабить. Аналогичная теорема верна и для случая, когда N — любое выпуклое множество. Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть $Z = R$, $M = R^-$, N — некоторое выпуклое (необязательно замкнутое) множество, а u_0 — любое решение системы*

$$u \in U,\ Tu - t \in N. \tag{2.15}$$

Пусть, далее, не выполняется условие (2.11). Тогда найдётся такой линейный непрерывный функционал $S \in U^*$, который достигает минимума на множестве решений системы (2.15) в точке u_0 и для которого не существует обобщенной последовательности $\{T^* y^*_\gamma\}$, слабо сходящейся к S, где функционалы y^*_γ удовлетворяют соотношению (2.12).

Пусть теперь $Z = R$, $M = R^-$. Тогда слабая замкнутость множества $E_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0}$ эквивалентна слабой замкнутости множества

$$E^1_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0} = \Big\{T^{1*} y^{1*} + T^{2*} y^{2*}:$$

$$\left\langle y^{i*},\ t^i - T^i u_0\right\rangle + \inf_{y \in N^i} \left\langle y^{i*}, y\right\rangle = 0,\ y^{i*} \in N^{i*}\ (i = 1, 2)\Big\},$$

так как $M^*_1 = \{-1\}$. Аналогично, слабая замкнутость множества G' эквивалентна слабой замкнутости множества

$$G^1 = \{(T^* y^*, < y^*, Tu_0 - t > + \alpha^*) : y^* \in N^*,\ \alpha^* \in R^+\}.$$

Теорема 10. *Пусть $Z = R$, $M = R^-$.*

I. Пусть u_0 — любое решение системы

$$u \in U,\quad T^i u - t^i \in N^i\ \ (i = 1{,}2)\ ^*) \tag{2.15'}$$

и множество $E^1_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0}$ не замкнуто в слабой топологии $\sigma\ (U^*, U)$. Тогда найдётся линейный непрерывный функционал $S \in U^*$, достигающий минимума на множестве решений системы (2.15)' в точке u_0 и непредставимый в виде

$$T^{1*} y^{1*} + T^{2*} y^{2*} - S = 0,$$

где $y^{i*} \in N^{i*}$ удовлетворяет условию 2 теоремы 5.

II. Пусть u_0 — любое решение системы (2.15), N — конус и G^1 не замкнуто в слабой топологии $\sigma\ ((U \times R)^*, U \times R)$. Тогда найдётся линейный непрерывный функционал $S \in U^*$, достигающий минимума на множестве решений системы (2.15) в точке u_0 и непредставимый в виде

$$T^* y^* - S = 0,$$

где $y^* \in N^*$, удовлетворяет равенству (2.13).

---

*) Определения T^i и N^i см. в следствии 1.

Доказательство. I. Если черта означает замыкание в слабой топологии $\sigma(U^*, U)$, то множество

$$\overline{E}^1_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u} \setminus \overset{1}{E}_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0}$$

непусто. Поэтому найдётся функционал S, принадлежащий последнему множеству. Так как

$$0 \in -S + \overline{E^1_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0}} = \overline{E}_{t^1 - T^1 u_0,\ t^2 - T^2 u_0},$$

то согласно теореме 1 функционал S достигает минимума на множестве решений системы (2.15)' в точке u_0, что и требовалось доказать.

II. Докажем, что найдётся точка $(S, 0)$, которая принадлежит слабому замыканию множества G^1 и не может быть представлена в виде

$$(S, 0) = (T^* y^*, < y^*, Tu_0 - t >), \tag{2.16}$$

где $Y^* \in N^*$. Действительно, в противном случае возьмём произвольную точку $(S, \widehat{\alpha^*})$ из слабого замыкания множества G^1. Ясно, что

$$\widehat{\alpha^*} \geqslant 0. \tag{2.17}$$

Условия (2.16) и (2.17) дают включение $(S, \widehat{\alpha^*}) \in G^1$, т.е. G^1 слабо замкнуто, что невозможно. Для завершения доказательства достаточно показать, что любой функционал S, для которого $(S, 0)$ принадлежит слабому замыканию множества G^1, достигает минимума на множестве решений системы (2.15) в точке u_0. Последнее утверждение, как легко видеть, следует непосредственно из теоремы 1 и леммы 2.

Отметим, что теорема 6 работы [1] является следствием теорем 9 и 10.

В заключение отметим, что основная лемма даёт возможность доказать условия экстремума не только для задач с ограничениями вида (2.1), но и для задач сограничениями вида (1. 1), где T_1 —многозначный оператор. В качестве примера сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 11. *Пусть D — компактное множество, Y, Z — банаховы сепарабельные пространства, $T_1 : D \to Y$ — многозначный выпуклый полунепрерывный сверху на D оператор. Пусть, далее, выполняется хотя бы одно из условий Г, Д. Для того чтобы точка $u_0 \in D$ была точкой экстремума оператора S при ограничениях (1.1), необходимо, чтобы нашлись такие функционалы $(y^*, z^*) \in N^* \times M^*$, что $(y^*, z^*) \neq 0$ и точка (u_0, y^*) является седловой точкой обобщенной функции Лагранжа*

$$L(u, y^*, z^*) = h^{T_1}(u, y^* N) + \langle z^*, Su \rangle,$$

на множестве, $D \times N^*$, т. е. для всех $(u, y_1^*) \in D \times N^*$ имеем

$$L(u, y^*, z^*) \leqslant L(u_0, y^*, z^*) \leqslant L(u_0, y_1^*, z^*).$$

Если выполняется иусловие В, то можно убедиться, что $z^* \neq 0$.

Поступило в Редакцию 19-5-1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левин В.Л. *Условия экстремума в бесконечномерных линейных задачах с операторными ограничениями*. В сб. «Исследования по математическому программированию», Наука, Москва, 1968.

[2] Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И., *Необходимые условия минимума в задачах с операторными ограничениями*. Кибернетика, № 3, 1971, стр. 35 — 46.

[3] Пшеничный Б.Н. *Выпуклые многозначные отображения и их сопряженные*. Кибернетика, № 3, 1972, стр. 94 — 102.

[4] Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. *Исследования по линейному и нелинейному програмированию*. ИЛ., Москва, 1962.

[5] Фам Хыу Шак. *Инвариантность в линейных абстрактных процессах*. Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 14, № 5, 1974, стр. 1104 — 1117.

[6] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства*. ИЛ., Москва, 1959.