ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 2, N° 1 (1977)

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С КУСОЧНО – НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

NGÔ VĂN LƯỢC
Институт Математики, Ханой

В работах [1 —4] были рассмотрены формулы суммарных представлений для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)-2\delta\rho(x, y)u=f(x, y), \tag{1}$$

где δ — постоянная, $\rho(x, y)$ и $f(x, y)$ —заданные непрерывные или кусочно-постоянные функции. В этой статье строятся формулы суммарных представлений для уравнения [1] в случае, когда $\rho(x, y)$ и $f(x, y)$ являются кусочно-непрерывными функциями. Далее, эти формулы суммарных представлений используются для численного решения некоторых задач фильтрации в неоднородной среде.

§ 1. Формулы суммарных представлений для слоистонеоднородных сред с вертикальными линиями раздела.

В настоящем параграфе мы приведем формулы суммарных представлений решения краевых задач для уравнения [1] в областях, составленных из прямоугольников и полуполос с линиями раздела в виде отрезков вертикальных прямых.

Для простоты рассмотрим сначала случай одной вертикальной линии раздела. Пусть область D состоит из двух прямоугольников D_1 и D_2 одинаковой ширины, соприкасающихся вдоль отрезка прямой $x = x_0$ (рис. 1). Пусть далее

$$\rho(x, y)=\begin{cases} k_1\ \omega_1^2(x)\ \omega_2^2(y) & (x, y)\in D_1 \\ k_2\ \omega_1^2(x)\ \omega_2^2(y) & (x, y)\in D_2 \end{cases} \tag{2}$$

где k_1, k_2 — положительные константы и функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(y)$ принимают вид

$$\omega_\mu(t) = A_\mu t + B_\mu,$$
$$\omega_\nu(t) = A_\nu \cos\beta_\nu t + B_\nu \sin\beta_\nu t, \qquad (3)$$
$$\omega_s(t) = A_s \operatorname{ch} \beta_s t + B_s \sin \beta_s t,$$
$$(\mu, \nu, s = 1, 2),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, β_1, β_2 — постоянные

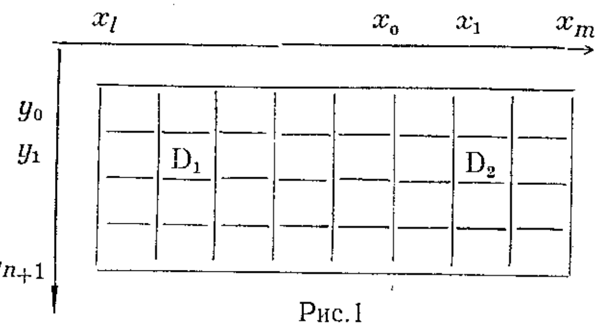

Рис.1

Задачу об определении решений уравннения (1), в котором $\rho(x, y)$ задано равенствами (2), (3), ставим следующим образом. Для уравнения (1) в области D_1 требуется найти решение $u(x, y)$, а в области D_2 — решение $v(x, y)$, удовлетворяющие на линии раздела условиями сопряжения

$$u(x, y) \mid_{x=x_0} = v(x, y) \mid_{x=x_0}, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{k_1} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \bigg|_{x=x_0}, \qquad (5)$$

а на горизонтальных участках границы области — тем или иным граничным условиям основных краевых задач математической физики.

Вводим замены функций

$$U(x, y) = \omega_1(x)\ \omega_2(y)\ u(x, y) \qquad (x, y) \in D_1,$$
$$V(x, y) = \omega_1(x)\ \omega_2(y)\ v(x, y) \qquad (x, y) \in D_2. \qquad (6)$$

Тогда уравнение (1) будет преобразовано к виду

$$\Delta U - 2\lambda U = f_1, \qquad f_1 = \frac{f(x, y)}{k_1} \qquad (x, y) \in D_2, \qquad (7)$$

$$\Delta V - 2\lambda V = f_2, \qquad f_2 = \frac{f(x, y)}{k_2} \qquad (x, y) \in D_2. \qquad (8)$$

где λ — известная постоянная, зависящая от конкретного вида функций $\omega_1(x)$, $\omega_2(y)$ и величины δ.

Условия сопряжения (4), (5) для новых функций имеют вид

$$U(x, y) \mid_{x=x_0} = V(x, y) \mid_{x=x_0}, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{k_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + k_0 U \right]_{x=x_0} = \frac{1}{k_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x} + k_0 V \right]_{x=x_0}, \qquad (10)$$

где

$$k_0 = - \frac{\omega_1'(x_0)}{\omega_1(x_0)}. \qquad (11)$$

Что касается краевых условий на горизонтальных участках границы для новых функцй, то условие Дирихле сохраняется, а условие Неймана переходит к третьему условию.

Задачу (7) — (11) будем решать методом суммарных представлений. Введем окаймленные сеточные прямоугольники $D_1^*(x_i, y_k)$ ($i = -l, -l+1, \ldots, -1, 0, 1$; $k = 0, 1, \ldots, n+1$, и $D_2^*(x_i, y_k)$ ($i = -1, 0, 1, \ldots, m$; $k = 0, 1, \ldots, n+1$), покрывающие область D таким образом, чтобы линия раздела совпадла с линией $x = x_0$.

Пусть h и h_1 — шаги сетки по x и по y, и $\gamma = \dfrac{h_1}{h}$. Уравнения (7) и (8) и условия (9), (10) в дискретной постановке принимают соответственно вид

$$\Delta_h U - 2\lambda U = f_1(x_i, y_k), \qquad (x_i, y_k) \in D_1^*, \tag{12}$$

$$_h V - 2\lambda V = f_2(x_i, y_k), \qquad (x_i, y_k) \in D_2^*, \tag{13}$$

$$U_k(x_0) = V_k(x_0), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\frac{1}{k_1}\Big[U_k(x_1) - U_k(x_{-1}) + 2h k_0 U_k(x_0)\Big] = \frac{1}{k_2}\Big[V_k(x_1) - V_k(x_{-1}) + 2hk_0 V_k(x_0)\Big]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

где Δ_h — дискретный оператор Лапласа. Для любой дискретной функции $u(x_i, y_k)$ обозначаем

$$u_k(x_i) = u(x_i, y_k),$$

$$\vec{u}(x_i) = \{u_1(x_i), u_2(x_i), \ldots, u_n(x_i)\}.$$

Предполагаем, что $\lambda \geqslant 0$. Тогда согласно [2] общее решение уравнения (12) имеет вид

$$\vec{U}(x_i) = P\Big\{\mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} - \sum_{p=l+1}^{0} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} \vec{\hat{H}}_1(x_p)\Big\} \tag{16}$$

$$(i = -l, -l+1, \ldots, -1, 0, 1),$$

и общее решение уравнения (13) будет

$$\vec{V}(x_i) = P\Big\{\mu^i \vec{C} + \nu^i \vec{D} - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} \vec{\hat{H}}_2(x_p)\Big\}, \tag{17}$$

$$(i = -1, 0, 1, \ldots, m),$$

где в зависимости от типа краевых условий на горизонтальных участках границы матрица P совпадает с матрицей P_1, P_2, P_3 или P_4 (см. [2]);

$$\vec{\hat{H}}_1(x_p) = P^* \vec{H}_1(x_p) = P^*(h^2 \vec{f}_1(x_p) - \gamma^2 \vec{W}_1(x\ ), \tag{18}$$

$$\vec{\hat{H}}_2(x_p) = P^* \vec{H}_2(x_p) = P^*(h^2 \vec{f}_2(x_p) - \gamma^2 \vec{W}_2(x_p), \tag{19}$$

P^* — матрица, транспонированная к матрице P; $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ — постоянные векторы; $\vec{W}_1(x)$, $\vec{W}_2(x_p)$ — векторы, выражаемые через краевые условия на горизонтальных участках границы; μ и ν — диагональные матрицы с диагональными элементами μ_k, ν_k:

$$\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \tag{20}$$

$$\eta_k = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\lambda_k}{2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

где λ_k является собственными значениями матрицы P.

Подчиняя решения (16) и (17) условиям (14), (15), получаем

$$\vec{A} + \vec{B} - \sum_{p=l+1}^{0} \frac{\nu^{-p}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_p) = \vec{C} + \vec{D} - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\nu^p}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_2(x_p), \tag{22}$$

$$(\mu-\nu+2hk_0)\vec{A} + (\nu-\mu+2hk_0)\vec{B} - \sum_{p=l+1}^{0} \frac{\nu^{1-p}\nu^{|p+1|} + 2hk_0\nu^{-p}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_p) \tag{23}$$

$$= \frac{k_1}{k_2}\left\{(\mu-\nu+2hk_0)\vec{C} + (\nu-\mu+2hk_0)\vec{D} - \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\nu^{|1-p|} - \nu^{p+1} + 2hk_0\nu^p}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_2(x_p)\right\}$$

Решая систему (22) (23), мы можем выразить $\vec{A}$ и $\vec{B}$ через $\vec{C}$ и $\vec{D}$. После этого подставляя полученные величины $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в формулы (16), (17), имеем

$$\vec{U}(x_i) = P\left\{\left[\frac{(1-\rho_0^2)(1+\widetilde{k}_0)}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\mu^i + \nu^i\right]\vec{B} + \frac{2\rho_0(1+\rho_0) + 4(1-\rho_0)\widetilde{k}_0}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\nu^i\vec{C}\right.$$

$$- \sum_{p=l+1}^{-1}\left[\nu^{|i-p|} + \frac{(1-\rho_0^2)(1+\widetilde{k}_0-\widetilde{k}_0^2)}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\nu^{-i-p}\right]\frac{\vec{\widehat{H}}_1(x_p)}{\mu-\nu} - \frac{\nu^i}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_p)$$

$$\left. - \frac{2\rho_0[1+\rho_0+\widetilde{k}_0(1-\rho_0) - \widetilde{k}_0^2(1-\rho_0)^2]}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_6(1-\rho_0)(3-\rho_0)} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_2(x_p)\right\}, \tag{24}$$

$$(i = 0, -1, -2, \ldots, l)$$

$$\vec{V}(x_i) = P\left\{\frac{2(\rho_0+1)}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\nu^i\vec{B} + \left[\frac{(\rho_0-1)(\rho_0+1+\widetilde{k}_0(3-\rho_0))}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\nu^i + \mu^i\right]\vec{C} - \right.$$

$$- \frac{2(\rho_0+1) + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)^2}{(1+\rho_0)^2 + \widetilde{k}_0(1-\rho_0)(3-\rho_0)} \sum_{p=l+1}^{-1} \frac{\nu^{i-p}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_p) - \frac{\nu^i}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_0) -$$

$$-\sum_{p=1}^{m-1}\left[\frac{(\rho_0-1)(\rho_0+1+2\widetilde{k_0})}{(1+\rho_0)^2+\widetilde{k_0}(1-\rho_0)(3-\rho_0)}\nu^{i-p}+\nu^{|i-p|}\right]\frac{\vec{\widehat{H}}_2(x_p)}{\mu-\nu}\Bigg\}, \tag{25}$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m),$$

где $\rho_0=\frac{k_1}{k_2}$, $\widetilde{k_0}=\frac{2hk_0}{\mu-\nu}$. (26)

Наконец в силу (6) формулы суммарных представлений для уравнения (1) принимают вид

$$\vec{u}(x_i)=\frac{\vec{U}(x_i)}{\omega} \qquad (x_i,\ y_k)\in D_1^*, \tag{27}$$

$$\vec{v}(x_i)=\frac{\vec{V}(x_i)}{\omega} \qquad (x_i,\ y_k)\in D_2^*, \tag{28}$$

где ω — диагональная матрица: $\omega=[\omega_k(x_i)]_{k=1}^n$, (29)

$$\omega_k(x_i)=\omega_1(x_i)\,\omega_2(y_k),$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Если $\rho(x,\ y)$ зависит только от y, т.е. $\omega_1(x)=\text{const}$, то $\widetilde{k_0}=0$. В этом случае формулы суммарных представлений для уравнения (1) будут

$$\vec{u}(x_i)=\frac{1}{\omega_2}P\Bigg\{\left(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\mu^i+\nu^i\right)\vec{B}+\frac{2\rho_0}{1+\rho_0}\nu^i\vec{C}-\sum_{p=l+1}^{-1}\Bigg[\nu^{|i-p|}+$$

$$+\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\nu^{-p-i}\Bigg]\frac{\vec{\widehat{H}}_1(x_p)}{\mu-\nu}-\frac{\nu^i}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_0)-\frac{2\rho_0}{1+\rho_0}\sum_{p=1}^{m-1}\frac{\nu^{|p-i|}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_2(x_p)\Bigg],$$

$$(i=0,\ -1,\ -2,\ldots,\ l), \tag{30}$$

$$\vec{v}(x_i)=\frac{1}{\omega_2}P\Bigg\{\frac{2}{1+\rho_0}\nu^i\vec{B}+\left(\mu^i+\frac{\rho_0-1}{\rho_0+1}\nu^i\right)\vec{C}-\frac{2}{1+\rho_0}\sum_{p=l+1}^{-1}\frac{\nu^{i-p}}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_1(x_p)-$$

$$-\frac{\nu^i}{\mu-\nu}\vec{\widehat{H}}_2(x_p)-\sum_{p=1}^{m-1}\left(\nu^{|i-p|}+\frac{\rho_0-1}{\rho_0+1}\nu^{i+p}\right)\frac{\vec{\widehat{H}}_2(x_p)}{\mu-\nu}\Bigg\}, \tag{31}$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m),$$

де

$$\omega_2=[\omega_2(y_k)]_{k=1}^n. \tag{32}$$

Заметим, что если $\omega_2(y) = \mathrm{const}$, то из (30) и (32) получаем известные формулы суммарных представлений в случае, когда ρ является кусочно-постоянной [2]. В случае, когда $\rho = \rho(y)$, мы имеем также формулы суммарных представлений для уравнения (1) в полосе:

$$\vec{\psi}(x_i) = -\frac{1}{\omega_2} P \sum_{p=-\infty}^{\infty} G(i, p) \vec{\widehat{H}}(x_p), \tag{33}$$

где

$$\vec{\Phi}(x_i) = \begin{cases} \vec{u}(x_i) & i \leqslant 0, \\ \vec{v}(x_i) & i > 0, \end{cases} \tag{33'}$$

$$\vec{\widehat{H}}(x_p) = \begin{cases} \vec{\widehat{H}}_1(x_p) & p \leqslant 0 \\ \vec{\widehat{H}}_2(x_p) & p > 0 \end{cases} \tag{33''}$$

$$G(i, p) = \begin{cases} \left[\nu^{|i-p|} + \dfrac{1-\rho_0}{1+\rho^0} \nu^{-p-i}\right] (\mu - \nu)^{-1}, & p \leqslant -1 \\ (\mu - \nu)^{-1} \nu^{-i} & p = 0 \\ \dfrac{2\rho_0}{1+\rho_0} \dfrac{\nu^{p-i}}{\mu - \nu} & p \geqslant 1 \end{cases} \quad i \leqslant 0$$

$$ \begin{cases} \dfrac{2}{1+\rho_0} \dfrac{\nu^{i-p}}{\mu - \nu} & p \leqslant -1 \\ (\mu - \nu)^{-1} \nu^{i} & p = 0 \\ \left[\nu^{|i-p|} - \dfrac{1-\rho_0}{1+\rho_0} \nu^{i+p}\right] (\mu - \nu)^{-1}, & p \geqslant 1 \end{cases} \quad i > 0 \tag{33'''}$$

Заметим еще, что аналогично можем построить формулы суммарных представлений в многослойной области с несколькими вертикальными линиями раздела.

В качестве приложения полученных формул суммарных представлений рассмотрим следующую задачу фильтрации:

Задача 1. Требуется найти решение задачи напорной фильтрации об обтекании флютбета в слоисто-неоднородной среде с вертикальной линией раздела $x = x_0$ (рис 2). Предполагаем, что коэффициент фильтрации имеет вид

$$\chi^{-1} = k\omega^2(y) \quad , \quad \omega(y) = c_1 \operatorname{ch} \beta y + c_2 \operatorname{sh} \beta y, \tag{34}$$

$$k = \begin{cases} k_1 & x < x_0, \\ k_2 & x > x_0, \end{cases} \tag{34'}$$

где c_1, c_2, k_1, k_2, β — положительные постоянные.

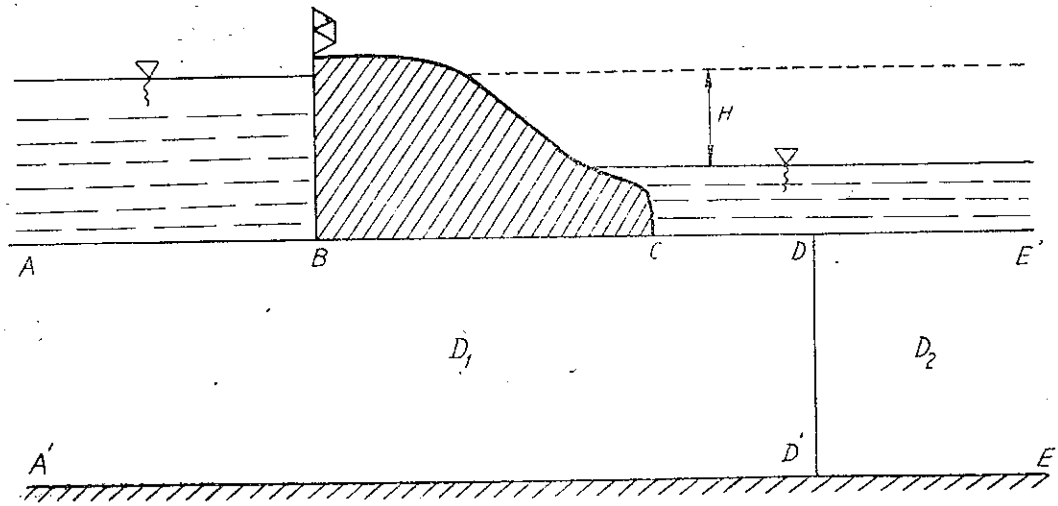

Рис. 2

обозначаем функции тока в области D_1 и D_2 соответственно через ψ_1 и ψ_2. Тогда функции тока ψ_1, ψ_2 будут решением следующей краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^2(y)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega^2(y)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)=0 \quad \text{в } D_1 \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^2(y)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega^2(y)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)=0 \quad \text{в } D_2 \end{aligned}\right\}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\bigg|_{AB}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\bigg|_{CD}=\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\bigg|_{DE}=0,\ \psi_1\bigg|_{DC}=Q,\ \psi_1\bigg|_{A'D'}=\psi_2\bigg|_{D'E'}=0, \tag{36}$$

$$\psi_1\bigg|_{DD'}=\psi_2\bigg|_{DD'}, \quad k_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\bigg|_{DD'}=k_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\bigg|_{DD'}, \tag{37}$$

где Q — фильтрационный расход. Вводим замены функций

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\omega(y)\psi_1(x,y) \qquad (x,y)\in D_1 \\ v(x,y)&=\omega(y)\psi_2(x,y) \qquad (x,y)\in D_2 \end{aligned} \tag{38}$$

Тогда получаем следующую задачу для новых функций:

$$\begin{aligned} \Delta u-\beta^2 u&=0 \qquad (x,y)\in D_1, \\ \Delta v-\beta^2 v&=0 \qquad (x,y)\in D_2, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}-k_0 u\right]_{AB}=\left[\frac{\partial u}{\partial y}-k_0 u\right]_{CD}=\left[\frac{\partial v}{\partial y}-k_0 v\right]_{DE}=0,$$

$$u\bigg|_{BC}=Q\,\omega(y_0), \quad u\bigg|_{A'B'}=v\bigg|_{D'E'}=0. \quad k_0=\frac{\omega'(y_0)}{\omega(y_0)}. \tag{40}$$

$$u\bigg|_{DD'}=v\bigg|_{DD'}; \quad k_1\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{DD'}=k_2\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{DD'}. \tag{41}$$

Краевую задачу (39) — (41) аппроксимируем следующей конечно-разностной задачей

$$\begin{aligned} \Delta_h u - \beta^2 u &= 0, \\ \Delta_h v - \beta^2 v &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

$$u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha u_1(x_i) = \begin{cases} 0 & i < m_1,\ m_1 < i < 1, \\ \alpha_i & m_0 \leqslant i \leqslant m_1, \end{cases}$$

$$v_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, v_1(x_i) = 0 \qquad -1 \leqslant i < \infty, \tag{43}$$

где α_i — параметры, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2 - h_1 k_0}{2 + h_1 k_0}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x_i) &= 0\ (-\infty < i \leqslant 1), \quad v_{n+1}(x_i) = 0\ (-1 \leqslant i < \infty), \\ u_0(x_i) &= Q\omega(y_0), \qquad\qquad m_0 \leqslant i \leqslant m_1, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} u_k(x_0) &= v_k(x_0) \\ u_k(x_{-1}) - u_k(x_1) &= \rho_0\,[v_k(x_{-1}) - v_k(x_1)], \quad \rho_0 = \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned} \tag{44}$$

Для решения задачи (42) — (44) используем формулу суммарных представлений (33)

$$\vec{\psi}(x_i) = \frac{\gamma^2}{\omega} P_3 \sum_{p=-\infty}^{\infty} G(i,p)\, P_3^* \,\omega_3(x_p), \tag{45}$$

где

$$P_3 = \left[a_{ik}\right]_{i,k=1}^{n}, \quad a_{ik} = c_k \sin(n+1-i)\theta_k, \quad c_k = \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2(n+1-i)\theta_k\right)^{-\frac{1}{2}},$$

а θ_j — решение уравнения

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin n\theta} = \operatorname{tg}\alpha, \quad |\operatorname{tg}\alpha| < 1,$$

$$\vec{\omega}_3(x_p) = \begin{cases} \{\alpha_p, 0, \ldots, 0\} & p = m_0,\ m_0+1, \ldots, m_1, \\ \{0, 0, \ldots, 0\} & p < m_0,\ p > m_1. \end{cases} \tag{46}$$

Подставляя (46) в (45), получаем

$$\psi_k(x_i) = -\frac{\gamma^2}{\omega(y_k)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=m_0}^{m_1} \frac{a_{kj}\, a_{1j}}{\mu_j - \nu_j}\left[\nu_j^{|i-p|} + \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\nu^{-i-p}\right]\alpha_p. \tag{47}$$

Из (43) и (43') следует

$$\omega(y_0)Q - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = \alpha_i, \qquad i = m_0,\ m_0+1, \ldots, m_1 \tag{48}$$

Подставляя (47) в (48), имеем

$$\alpha_i - \gamma^2 \operatorname{tg}\alpha \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=m_0}^{m_1} \frac{a_{1j}^2}{\mu_j - \nu_j}\left[\nu_j^{|i-p|} + \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\nu^{-i-p}\right]\alpha_p = \omega(y_0)Q \tag{49}$$

$$(i = m_0,\ m_0+1, \ldots, m_1)$$

Сейчас используем физическое условие в теории фильтрации [5]

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds = H, \tag{50}$$

где H — действующий на сооружении напор, Г — ломанная, соединяющая дно нижнего и верхнего бьефов. Как показано в [2], конечно-разностный аналог равенства (50) имеет вид

$$\gamma c \sum_{i=m_0}^{m_1} \alpha_i = H,\ c = -k_1 \left[\frac{k_1}{2} \omega'(y_0) + \omega(y_0) \right]. \tag{51}$$

Соотношения (49), (51) дают нам полную систему алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $Q, \alpha_j,\ j = m_0,\ m_0 + 1, \ldots, m_1$. Поэтому задача фильтрации решена.

Заметим, что такой методикой можем решить задачу фильтрации об обтекании флютбета с шпунтами, системы таких флютбетов, а также в случае многих вертикальных линий раздела, как это сделано в [2].

§2. Формулы суммарных представлений в многослойной области с горизонтальными линиями раздела.

В данном параграфе построим формулы суммарных представлений в полосе $D(-\infty < x < +\infty,\ a < y < d)$ для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2\delta \rho u = f(x,\ y), \tag{52}$$

где коэффициент ρ имеет вид

$$\rho(x,y) = \begin{cases} k_1 \omega_1^2(x) \omega_2^2(y) & a < y < c, \\ k_2 \omega_1^2(x) \omega_2^2(y) & c < y < d, \end{cases} \tag{53}$$

где k_1, k_2 — положительные постоянные, ω_1, ω_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции по краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=a} = g_1(x)\ ,\ \left. u \right|_{y=b} = g_2(x), \tag{54}$$

и по условиям сопряжения

$$\left. u \right|_{y=c+0} = \left. u \right|_{y=c-0}, \qquad k_1 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=c+0} = k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=c-0}. \tag{55}$$

При $k_1 = k_2$, т.е. в случае непрерывного коэффициента ρ, задача (52) — (55) была рассмотрена в [4].

Сделаем в уравнении (52) следующую замену

$$v(x,\ y) = \omega_1(x)\ \omega_2(y)\ u\ (x,\ y). \tag{56}$$

Тогда уравнение (52) будет преобразовано к виду

$$\Delta v - (\beta(x,y) + 2\delta)\, v = \frac{F}{k}, \tag{57}$$

где

$$\beta(x,y) = \frac{\omega_{1xx}}{\omega_1} + \frac{\omega_{2yy}}{\omega_2}, \qquad F = \frac{f}{\omega_1\omega_2}, \tag{57'}$$

$$k = \begin{cases} k_1 & a < y < c; \\ k_2 & c < y < d. \end{cases} \tag{57''}$$

Краевые условия для новой функции v имеют вид

$$\left[\frac{\partial v}{\partial y} - r_0 v\right] = \widetilde{g_1}(x), \; r_0 = \frac{\omega_2 y(a)}{\omega_2(a)}, \; \widetilde{g_1}(x) = \omega_2(a)\,\omega_1(x)\; g_1(x) \tag{58}$$

$$v\Big|_{y=b} = \widetilde{g_2}(x), \; \widetilde{g_2}(x) = \omega_1(x)\,\omega_2(b)\; g_2(x), \tag{59}$$

$$v\Big|_{y=c-0} = v\Big|_{y=c+0}, \; k_2 \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=c-0} - k_2 \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=c+0} - sv = 0, \tag{60}$$

$$s = (k_1 - k_2)\,\frac{\omega'_2(c)}{\omega_2(c)}. \tag{60'}$$

В дальнейшем на коэффициент $\beta(x,y)$ наложим ограничение $\beta = \beta(y)$, т.е. β зависит только от y. Это имеет место в случае, когда $\omega_1(x)$ — линейная тригонометрическую или гиперболическую функцию, а $\omega_2(y)$ — функция класса $C^2(D)$.

Для решения задачи (57) — (60) будем использовать метод суммарных представлений. Область D покроем равномерной прямоугольной сеткой

$$\begin{gathered} x_i = x_0 + ih, \; y_k = y_0 + kh_1 \; (k = 1, 2, \ldots, n+l;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \\ y_0 = a, \; y_{n1} = c, \; y_{n+1} - b. \end{gathered} \tag{61}$$

Уравнение (57) аппроксимируется следующим конечно-разностным уравнением с точностью $0\,(h^2 + h_1^2)$:

$$\begin{aligned} Lv_k(x_i) + \gamma^2 [v_{k+1}(x_i + h) + v_{k-1}(x_i + h)] + q_k v_k(x_i + h) = \\ = h^2\, \Phi_k(x_i + h) \end{aligned} \tag{62}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_1 - 1, n_1 + 1, \ldots, n),$$

где

$$L\, v_k(x_i) = v_k(x_i + 2h) - 2(1 + \gamma^2)\, v_k(x_i + h) + v_k(x_i), \tag{62'}$$

$$q_k = -h^2(\beta_k + 2\delta), \; k = 1, 2, \ldots, n_1 - 1, n_1 + 1, \ldots, n, \tag{62''}$$

$$\Phi_k(x_i) = \begin{cases} \dfrac{F_k(x_i)}{k_1} & 1 \leqslant k \leqslant n_1 - 1, \\[2mm] \dfrac{F_k(x_i)}{k_2} & n_1 + 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases} \tag{62'''}$$

Условиям (58), (59) будут соответствовать дискретные условия

$$v_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha v_1(x_i) = -\frac{2h_1}{2+r_0}\widetilde{g_1}(x_i), \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2-h_1r_0}{2+h_1r_0}, \tag{63}$$

$$v_{n+1}(x_i) = \widetilde{g_2}(x_i), \tag{64}$$

Можно показать, что условие сопряжения (60) со вторым порядком точности заменяется конечно-разностным уравнением

$$Lv_{n_1}(x_i) + \gamma^2\left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}v_{n_1-1}(x_i+h) + \frac{2k_2}{k_1+k_2}v_{n_1+1}(x_i+h)\right) + q_{n_1}v_{n_1} = h^2\Phi_{n_1}(x_i+h), \tag{65}$$

где

$$\Phi_{n_1} = \frac{F^+ + F^-}{k_1+k_2}, \quad q_{n_1} = -h^2\left[\beta(y_{n_1}) + 2\delta + \frac{2s}{h_1(k_1+k_2)}\right]. \tag{65}$$

Запишем систему уравнений (62), (65) в виде:

$$\overrightarrow{Lv}(x_i) + \gamma^2(T+Q)\vec{v}(x_i+h) = h^2\vec{\Phi}(x_i+h) - \gamma^2\vec{W}(x_i+h), \tag{66}$$

где T и Q — матрицы вида

$$T = \left\|\begin{matrix} -\operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & 0 & & \\ & & \cdots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \frac{2k_1}{k_1+k_2} & 0 & \frac{2k_2}{k_1+k_2} & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & 0 & & & & \cdots & & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{matrix}\right\| n_1\text{ – я}; \quad Q = \left\|\begin{matrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & q_n \end{matrix}\right\| \tag{67}$$

и $\vec{W}(x_i+h)$ — известный вектор:

$$\vec{W}(x_i+h) = \left\{v_0(x_i+h) - \operatorname{tg}\alpha v_1(x+h),\ 0, \ldots, 0,\ v_{n+1}(x_i+h)\right\} \tag{68}$$

Для матрицы $T+Q$ строим диагональную матрицу собственных чисел $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ и фундаментальную матрицу P, решая вспомогательную задачу

$$V_{k-1} + q_kV_k + V_{k+1} - \lambda V_k = 0, \qquad k \neq n_1 \tag{69}$$

$$\frac{2k_1}{k_1+k_2}V_{n_1-1} + q_{n_1}v_{n_1} + \frac{2k_2}{k_1+k_2}V_{n_1+1} - \lambda V_{n_1} = 0, \qquad k = n_1 \tag{70}$$

$$\sin\alpha V_0 + \cos\alpha V_1 = 0 \tag{71}$$

$$V_{n+1} = 0 \tag{72}$$

Для матриц T, Q, P, $\wedge$ имеют место равенства

$$P\rho P^* = E, \ T + Q = P \wedge P^* \rho, \tag{73}$$

где ρ — известная диагональная матрица. После P-трансформации уравнение (66) принимает вид

$$L \overrightarrow{\hat{v}}(x_i) + \gamma^2 \wedge \overrightarrow{\hat{v}}(x_i + h) = h^2 \overrightarrow{\hat{\Phi}}(x_i + h) - \gamma^2 \overrightarrow{\hat{W}}(x_i + h). \tag{74}$$

Следуя далее выкладкам работ [1, 4], получаем искомую формулу суммарных представлений

$$\overrightarrow{v}(x_i) = -P \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^{|i-p|}}{\mu - \nu} P\rho^* \left[h^2 \overrightarrow{\Phi}(x_p) - \gamma^2 \overrightarrow{W}(x_p)\right], \tag{75}$$

где μ, ν определяются формулой (20), где

$$\eta_k = 1 + \gamma^2 + \frac{\lambda_k}{2}. \tag{76}$$

Заметим, что таким путём можем получить формулы суммарных представлений в многослойной области, а также для других кревых задач уравнения (52). Для иллюстрации метода рассмотрим следующую задачу фильтрации.

Задача 2. Требуется найти решение задачи напорной фильтрации об обтекании флютбета в слоисто-неоднородной среде с горизонтальной линией раздела $y = y_{n_1} = 0$ (см. рис. 3). Коэффициент фильтрации имеет вид

$$\chi^{-1}(y) = \begin{cases} k_1 \operatorname{ch}^2 \beta y & y_0 < y < y_{n_1} \\ k_2 \operatorname{ch}^2 \beta y & y_{n_1} < y < y_{n+1} \end{cases} \tag{77}$$

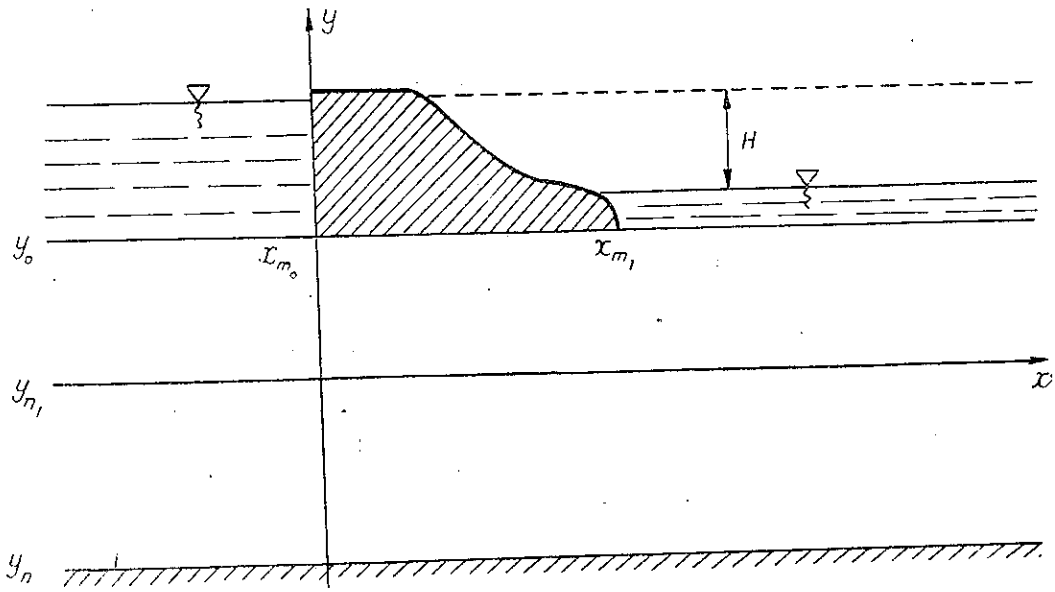

Рис. 3

В этом случае $\beta(y) = \beta^2$, $\delta = s = 0$, $f \equiv 0$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2 - h_1 \beta \operatorname{sh} \beta y_0}{2 + h_1 \beta \operatorname{sh} \beta y_0}$,

$|\operatorname{tg}\alpha| < 1$ при $\beta > 0$. Вводим оператор

$$\widetilde{L}v_k(x_i) = v_k(x_i + 2h) - 2\left(1 + \gamma^2 + \frac{\beta^2 h^2}{2}\right) v_k\ (xi + h) - v_k\,(x_i). \tag{78}$$

Тогда задача (62), (65) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\widetilde{L}v_k(x_i) + \gamma^2 (v_{k+1}(x_i + h) + v_{k+1}(x_i + h)) = 0, \qquad k \neq n_1 \tag{79}$$

$$\widetilde{L}v_{n_1}(x_i) + \gamma^2\left(\frac{2\,k_1}{k_1 + k_2} v_{n_1-1}(x_i + h) + \frac{2\,k_2}{k_1 + k_2} v_{n_1+1}(x_i + h)\right) = 0,\ k = n_1 \tag{80}$$

$$v_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, v_1(x_i) = \begin{cases} 0 & i < m_0\,,\ i > m_1, \\ \alpha_i & m_0 \leqslant i \leqslant m_1, \end{cases} \tag{81}$$

$$v_{n+1}(x_i) = 0, \tag{82}$$

где α_i, $i = m_0$, $m_0 + 1,\dots, m_1$ — параметры, которые будут определяться следующими условиями

$$v_0(x_i) = Q \operatorname{ch}\beta\, y_0 \quad i = m_0,\ m_0 + 1,\dots,\ m_1. \tag{83}$$

Запишем систему уравнений (79) — (82) в векторной форме

$$\widetilde{L}\,\vec{v}\,(x_i) + T\,\vec{v}\,(x_i + h) = -\,\gamma^2\,\vec{\omega}\,(x_i + h), \tag{84}$$

где T и $\vec{\omega}$ определяются формулами (67), (68), (81), (82). Поэтому в данном случае нам придется решить задачу собственных значений и векторов для матрицы T. Для этого мы будем решать следующую задачу Штурма — Лиувилля :

$$a_{k-1} + a_{k+1} - \lambda\, a_k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, n_1 - 1,\ n_1 + 1, \dots n, \tag{85}$$

$$\frac{2\,k_1}{k_1 + k_2}\, a_{n_1-1} + \frac{2\,k_2}{k_1 + k_2}\, a_{n_1+1} - \lambda a_{n_1} = 0, \tag{86}$$

$$\sin\alpha\ a_0 + \cos\alpha\ a_1 = 0, \tag{87}$$

$$a_{n+1} = 0, \tag{88}$$

Найдем решение задачи (85) — (88) в виде

$$a_{k_j} = c_j \begin{cases} \cos\alpha \sin k\,\theta_j + \sin\alpha \sin(k - 1)\,\theta_j, & k = 0,\ 1,\dots,\ n_1 \\ \alpha_j \sin(n + 1 - k)\,\theta_j & k = n_1,\ n_1 + 1,\dots,\ n \end{cases} \tag{89}$$

$$\lambda = \lambda_j = 2\cos\theta_j. \tag{90}$$

Тогда легко проверить, что условия (85), (87), (88) удовлетворяются при любых постоянных c_j, α_j. Осталось подчинить решение условию (86) и условию

$$\cos\alpha \sin n_1\,\theta_j + \sin\alpha \sin(n_1 - 1)\,\theta_j = \alpha_j \sin(n + 1 - n_1)\,\theta_j. \tag{91}$$

Если $\sin(n + 1 - n_1)\,\theta_j \neq 0$, то из (93) следует

$$\alpha_j = \frac{\cos\alpha \sin n_1\,\theta_j + \sin\alpha \sin(n_1 - 1)\,\theta_j}{\sin(n + 1 - n_1)\,\theta_j}. \tag{92}$$

Если $\sin(n+1-n_1)\theta_j = 0$, то из (86) получаем

$$\alpha_j = \frac{2k_1\left[\cos\alpha\sin(\ _1-1)\theta_j + \sin\alpha\sin(n_1-2)\theta_j\right]}{(k_1+k_2)\sin(n+2-n_1)\theta_j + (k_1-k_2)\sin(n-n_1)\theta_j}. \tag{93}$$

Из (92), (93) получаем уравнение для опредеения θ_j:

$$\frac{\sin(n+1)\theta_j + \dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\sin(n+1-2n_1)\theta_j}{\sin n\theta_j + \dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\sin(n+2-2n_1)\theta_j} = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{94}$$

Так как $\left|\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right|$, $|\operatorname{tg}\alpha| < 1$, то уравнение (94) имеет $n+1$ решений в интервале $(0, \pi)$. Заметим, что при $k_1 = k_2$, т. е. в случае непрерывного коэффициента фильтрации мы получаем известную формулу в [2].

Вводим диагональную матрицу

$$\rho = [\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_n] \tag{95}$$

с элементами

$$\rho_k = \begin{cases} k_1 & k = 0,1,\ldots,n_1-1, \\ \dfrac{k_1+k_2}{2} & k = n_1, \\ k_2 & k = n_1+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{95'}$$

Тогда найденные собственные векторы

$$\vec{P}_j = \{a_{0j}, a_{1j}, \ldots a_{nj}\} \tag{96}$$

ортогональны с весом ρ, т.е.

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_k a_{kj} a_{km} = \begin{cases} 0 & j \neq m, \\ 1 & j = m, \end{cases} \tag{97}$$

если выберем нормирующие множители c_j по формуле

$$c_j = \left\{k_1 \sum_{k=0}^{n_1-1} [\cos\alpha\sin k\theta_j + \sin\alpha\sin(k-1)\theta_j]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1+k_2}{2}\alpha_j^2\sin^2(n+1-n_1)\theta_j + k_2\alpha_j^2 \sum_{k=n_1+1}^{n} \sin^2(n+1-k)\theta_j\right\}^{-1/2} \tag{98}$$

После этого решение задачи 1 проводится так, как и задачи 1 в предыдущем параграфе, поэтому не будем на этом останавливаться.

Заметим, что такой методикой можем решить задачу 2 в случае флютбета с шпунтами, системы таких флютбетов, а также в более сложной области фильтрации, как это сделано в работе [2].

Поступило в Редакцию 21-IV-1976г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Положий Г.Н. *Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента.* Изд. КГУ, Киев, 1962.

[2] Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. *Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации.* Изд-во «Наукова думка», Киев, 1973.

[3] Ляшко И.И., Засько Ю.Н. *К решению краевых вадач для уравнений с циклическими коэффициентами.* Выч. и прикл. матем. Изд. КГУ, вып. 27, 1975.

[4] Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В. В., Барышев А. Н. *Об одной методике фильтрационных расчетов.* Препринт 74—39, Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1974.

[5] Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод,* Изд-во ГИТТХ, М., 1952.