ĈTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 2, N°1 (1977)

ОТДЕЛЕННОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

HOÀNG HỮU ĐƯỜNG

Ханойский государственный университет.

Целью этой статьи является изучение эквивалентных условий с отделенностью линейной дифференциальной системы. Теорема 1 устанавливает связь отделенности с распределением характеристических показателей возмущенной системы. Из этой теоремы следует известное необходимое и достаточное условие для устойчивости характеристических показателей. Теоремы 2, 3 устанавливают связь отделенности с методом функций Ляпунова и с поведением решений неоднородной системы. Эта связь вытекает из эквивалентности отделенности с слабой дихотомией (по приведенному ниже определению). В дальнейших теоремах рассматривается отделенность сопряженной системы и из этого следует известное необходимое и достаточное условие для одновременной устойчивости характеристических показателей взаимно сопряженных линейных дифференциальных систем.

1. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ — ограниченная, кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$ матрица.

Пусть $X(t) = \{X_1(t), \dots X_q(t)\}$ — фундаментальная система решений системы (1.1), где $X_k(t)$ — группа решений системы (1.1). Пусть $M_k(t)$ — подпространство, порожденное группами решений $X_1(t), \dots, X_k(t)$ и $N_{k+1}(t)$ — подпространство, порожденное группами решений $X_{k+1}(t), \dots, X_q(t)$.

Полагаем

$$\overline{p} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t p(\tau)\,d\tau, \ \underline{p} = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t p(\tau)\,d\tau,$$

обозначим $\quad \overline{\Omega_k} = \inf\limits_{(R_k)} \overline{R_k}\,, \quad \overline{\omega}_{k+1} = \sup\limits_{(r_{k+1})} \overline{r_{k+1}}\,,$

$$\underline{\Omega}_k = \inf_{(R_k)} \underline{R}_k \ , \ \underline{\omega}_{k+1} = \sup_{(r_{k+1})} \underline{r}_{k+1},$$

где $R_k(t)$ — верхняя функция [1] $M_k(t)$, $r_{k+1}(t)$ — нижняя функция [1] $N_{k+1}(t)$.

Определение 1. Будем говорить, что $M_k(t)$ индуцирует отделенность (с парой $R_k(t)$, $r_{k+1}(t)$) если существуют верхняя и нижняя функции $R_k(t)$, $r_{k+1}(t)$, что при всех $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\int_s^t (r_{k+1}(\tau) - R_k(\tau))\,d\tau \geqslant \alpha\,(t-s) - d\ , \tag{1.2}$$

где $\alpha > 0$, $d \geqslant 0$.

Замечание: При произвольном $\varepsilon > 0$ существуют верхняя и нижняя функции $r_{k+1}^{(1)}(t)$, $R_k^{(1)}(t)$ удовлетворяющие (1.2) и неравенствам

$$\overline{R}_k^{(1)}(t) < \overline{\Omega}_k + \varepsilon\ , \qquad \overline{r}_{k+1}^{(1)}(t) > \overline{\omega}_{k+1} - \varepsilon.$$

В дальнейщем постоянно используется это замечание.

Определение 2. Будем говорить, что $M_k(t)$ индуцирует слабую дихотомию (с функцией $F(t)$) если при $\forall\, \varepsilon > 0$ существует ограниченная измеримая $F(t)$ такая, что

$$\| x(t) \| \leqslant A_\varepsilon \| x(s) \| \exp \int_s^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \tag{1.3}$$

при $x(t) \in M_k(t)$

$$\| x(t) \| \geqslant B_\varepsilon \| x(s) \| \exp \int_s^t (F(\xi) + \alpha - \varepsilon)\, d\xi \tag{1.4}$$

при $x(t) \in N_{k+1}(t)$ где $\alpha > 0$, A_ε, B_ε — постоянные зависящие от ε, $t \geqslant s \geqslant 0$.

Из определений 1 и 2 легко видеть что если $M_k(t)$ индуцировало отделенность то оно индуцирует слабую дихотомию и обратно (поэтому в следующем используем по удобству определение 1 или 2).

В дальнейщем если нет противной оговорки то всегда считаем, что $X(t)$ — нормальная упорядоченная фундаментальная система решений системы (1. 1) ($\chi(x_i) = \Lambda_i$ при $x_i \in X_k(t)$, $\Lambda_1 < \dots < \Lambda_q$).

Все характеристические показатели системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t, x),$$

где

$$f(t, 0) = 0\ ,\ \ \|f(t, x') - f(t, x'')\| < \delta\,\|x' - x''\| \qquad (1.5$$

при достаточно малом $\delta > 0$ назовем возмущенными показателями (при малых возмущениях) системы (1.1).

Теорема 1. *Для отделенности системы (1.1) индуцированной $M_k(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\Omega}_k < \overline{\omega}_{k+1}$ и при произвольном $\varepsilon > 0$ никакой возмущенный показатель λ не удовлетворял*

$$\overline{\Omega}_k + \varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \overline{\omega}_{k+1} - \varepsilon \qquad (1.6)$$

при достаточно малых возмущениях.

Теорема, в основном, доказана с использованием методов Миллионщикова — Былова — Изобова [3] [4].

Набросок доказательства.

Необходимость. В силу (1. 2) [1] $r^H_{k+1}(t) - R^H_k(t) \geqslant \alpha - \varepsilon > 0$ при $\forall\, H > H(\varepsilon)$. При $H \to \infty$ получим $\overline{\omega}_{k+1} \geqslant \overline{\Omega}_k + \alpha$. С другой стороны, полагая

$$z(t) = x(t)\exp - \int_0^t (R_k(\xi) + \beta)\,d\xi \qquad \text{где } 0 < \beta < \alpha\ ,\ x(t) -$$

решение системы (1.1), видим, что $\{z_0(t)\}$ где $z_0(t) \equiv z(t)$; $z(0) \in M_k(0)$, индуцирует экспоненциальную дихотомию [2]. Тогда существует ляпуновское преобразование, переводящее систему (1. 1) к блочно-треугольному виду и по [1] (стр. 210) никакой возмущенный показатель системы (1. 1) не удовлетворяет (1. 6).

Достаточность. Применяя метод возмущения поворота как в [4] (стр. 1795 — 1798) мы видим, что система (1. 1) приведена к блочно-треугольному виду. Снова с помощью метода возмущения поворота [3], [4] (стр. 1801 — 1802) доказывается отделенность последней системы.

Следствие 1: *Отделенность системы (1. 1) по всем $M_k(0)$ $(k = 1, \dots q-1)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы все возмущенные показатели системы (1.1), при малых возмущениях, попадали в непересекающиеся интервалы $(\overline{\omega}_k - \varepsilon, \overline{\Omega}_k + \varepsilon)$ $(k = 1, \dots, q)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало*

Следствие 2: (*условие устойчивости показатели Миллионщикова — Былова—Изобова* [4]) *Для устойчивости показатели системы (1. 1) необходимо и достаточно чтобы система (1. 1) была отделена по всем* M_k (*t*) ($k = 1,\dots, q-1$) и $\overline{\omega}_k = \overline{\Omega}_k$ $(= \wedge_k)$, $(k = 1, \dots, q)$

2. В этом параграфе рассматривается связь отделенности с функцией Ляпунова.

Определение. Будем говорить, что $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел m - го порядка (где $m \geqslant 1$) если $|V(t,x)| \leqslant c_1 \| x \|^m$. Если $V(t,x) > c_2 \| x \|^m$ при $c_2 > 0$ будем говорить, что $V(t,x)$ — определенно - положительная m - го порядка.

Пусть P_0 проектор $X(0)$ на $M_k(0)$ и P_1 — на $N_{k+1}(0)$.

Пусть $U(t)$ — матрица решений системы (1.1), удовлетворящая $U(0) = E$. Тогда всякое решение $x(t)$ системы (1.1) удовлетворяет равенству

$$x(t) = U(t)U^{-1}(\tau)x(\tau) = U(t)P_0U^{-1}(\tau)x(\tau) + U(t)P_1U^{-1}(\tau)x(\tau).$$

Лемма 1. *Если* $M_k(t)$ *индуцирует слабую дихотомию с функцией* $F(t)$ *то*

$$\| U(t) P_0 U^{-1}(\tau) \| \leqslant K_\varepsilon \exp \int_\tau^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \quad при\ t \geqslant \tau \geqslant 0, \qquad (2.\ 1)$$

$$\| U(t) P_1 U^{-1}(\tau) \| \leqslant \overline{K}_\varepsilon \exp \int_\tau^t (F(\xi) + \alpha - \varepsilon)\, d\xi \ при\ \tau \geqslant t \geqslant 0, \quad (2.\ 2)$$

где $\varepsilon < 0$ *произвольное малое число,* K_ε, $\overline{K}_\varepsilon$ — *зависящие от* ε *постоянные.*

Доказательство. Полагаем

$$x_i(t) = U(t)\, P_i\, U^{-1}(\tau)\, x(\tau) \ (i = 0,1),\ x(t) — \text{решение системы (1.1)}$$

$$z_i(t) = x_i(t) \exp - \int_0^t (F(\xi) + \beta)\, d\xi, \qquad \beta > 0.$$

Из экспоненциальной дихотомии ([2] стр. 20) сдедует что $\left\| \frac{z_0(t)}{\| z_0(t) \|} - \frac{z_1(t)}{\| z_1(t) \|} \right\| \geqslant$ $\geqslant a > 0$. Итак $\| x_i(t) \| \leqslant \frac{2}{a} \| x(t) \|$. Отсюда вытекает справедливость леммы 1.

Лемма 2. *Пусть существует функция* $V(t, x)$, *допускающая бесконечно малый высший предел* m*-го порядка, производная которой, составленная в силу системы (1.1) удовлетворяет почти всюду равенству*

$$\frac{dV}{dt} = mF(t)\, V(t,x) - W(t,x), \qquad (2.3)$$

где $W(t,x)$ — *определенно-положительная* m*-го порядка,* $F(t)$ — *ограниченная и измеримая функция при* $0 \leqslant t < \infty$. *Тогда множество решений* $M_k(t)$ *системы*

(1.1), вдоль которого $V(t, x(t)) \geqslant 0$ индуцирует слабую дихотомию с функцией $F(t)$.

Доказательство. При произвольно малом ε, можем написать уравнение (2.3) в виде

$$\frac{dV}{dt} = m(F(t) + \varepsilon)\, V(t,x) - W_1(t,x), \tag{2.4}$$

$$W_1(t,x) = W(t,x) + m\varepsilon\, V(t,x).$$

Но $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел m-го порядка, поэтому $W_1(t,x)$ будет определенно-положительной m-го порядка при достаточно малом ε.

Пусть $x(t)$ — любое нетривиальное решение системы (1. 1). Из (2.4) получим

$$\frac{d}{dt}\left[V(t,x(t)) \exp - m\int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi\right] = - W_1(t,x(t)) \exp - m\int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\, d\xi < 0. \tag{2.5}$$

Из этого следует, что вдоль движения $x(t)$ случится только один из двух случаев

1) $V(t,x(t)) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < \infty$,

2) $V(t,x(t)) \exp - m\int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi < 0$ при $T \leqslant t < \infty$, T — достаточно большое число.

Полалаем $z(t) = x(t) \exp - \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi$.

Прежде всего докажем, что в случае 2 соответствующее $z(t)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} \| z(t) \| = + \infty$. В самом деле в силу (2. 5) существует t_1 так, что

$$V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \leqslant - \varepsilon \qquad \text{при} \qquad t \geqslant t_1.$$

Но

$$\left| V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \right| < c_1 \| x \|^m \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi$$

$$\leqslant c_1 \| z \|^m, \qquad \text{поэтому}$$

$$\varepsilon \leqslant - V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \leqslant c_1 \| z(t) \|^m. \tag{2. 6}$$

Итак,
$$\| z(t) \| \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{c_1}\right)^{\frac{1}{m}} = \gamma.$$

Из (2. 5) следует, что

$$V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi - V(t_1, x(t_1)) \exp - m \int_0^{t_1} (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi =$$

$$= - \int_{t_1}^{t} \Big[W(\xi, x(\xi)) \exp - m \int_0^{\xi} (F(\theta + \varepsilon)\, d\theta \Big] d\xi \leqslant - c_2\, \gamma^m (t - t_1). \tag{2. 7}$$

Следовательно, $V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \to - \infty$ при $t \to + \infty$

и в силу (2. 6)

$$\lim_{t \to \infty} \| z(t) \| = + \infty. \tag{2. 8}$$

Обратно, (2 . 8) влечет $V(t, x(t)) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi < 0$ при $T \leqslant t < \infty$.

В самом деле, тогда $\exists\, t_1 \geqslant 0$, $\gamma > 0$ такие, что $\| z(t) \| \geqslant \gamma$ при $t \geqslant t_1$, следовательно имеем (2 . 7).

Отсюда вытекает, что если $V(t, x(t)) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < \infty$, то $V(t, \sigma x(t)) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < \infty$, $\sigma \neq 0$.

1) Докажем в первом случае

$$\| z(t) \| \leqslant A_\varepsilon \, \| z(\tau) \| , \quad t \geqslant \tau. \tag{2. 9}$$

В самом деле, при определенных в п. 2 постоянных c_1, c_2 возьмем $r_\varepsilon > 0$ так, что

$$c_1 r_\varepsilon^m < c_2 e^{-mL_\varepsilon} \tag{2. 10}$$

при $L_\varepsilon = \sup\limits_t \| A(t) - (F(t) + \varepsilon) E \|$. Докажем, что при $t > \tau + 1$ выполняется неравенство

$$\| z(t) \| \leqslant r_\varepsilon^{-1} \| z(\tau) \| . \tag{2. 11}$$

В самом деле, в противном случае, найдется такое $t^* > \tau + 1$, что

$$\| z(t^*) \| > r_\varepsilon^{-1} \| z(\tau) \| \quad \text{или} \quad \| \sigma z(t^*) \| > 1, \tag{2. 12}$$

где $\sigma = r_\varepsilon \| z(\tau) \|^{-1}$.

С другой стороны $z(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) - (F(t) + \varepsilon) E]\, z. \tag{2. 13}$$

Из этого следует, что

$$\| z(t^*) \| \leqslant \| z(t) \| \exp \left\{ \int_t^{t^*} \| A(\xi) - (F(\xi) + \varepsilon) E \| \, d\xi \right\} \leqslant \| z(t) \| .$$

$$\exp \int\limits_{t^*-1}^{t^*} \| A(\xi) - F(\xi) + \varepsilon) E \| \, d\xi \leqslant \| z(t) \| \, e^{L_\varepsilon} \quad \text{где} \quad t^* - 1 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Отсюда $\| \sigma z(t) \| > \dfrac{\| z(t) \|}{\| z(t^*) \|}$ (в силу (2. 12)) $\geqslant e^{-L_\varepsilon}$.

По высшедоказанному $V(t, \partial x(t)) \geqslant 0$ вдоль $\sigma x(t)$, следовательно

$$- c_1 r_\varepsilon^m = - c_1 \| \sigma z(\tau) \|^m \leqslant V(t^*, \sigma x(t^*)) \exp - m \int\limits_0^{t^*} (F(\xi) + \varepsilon) \, d\xi -$$

$$V(\tau, \sigma x(\tau)) \exp - m \int\limits_0^{\tau} (F(\xi) + \varepsilon) \, d\xi \leqslant - \int\limits_{\tau}^{t^*} [W_1(\xi, \sigma x(\xi)).$$

$$\exp - m \int\limits_0^{\xi} (F(\theta + \varepsilon) \, d\theta] \, d\xi \leqslant - c_2 \int\limits_{t^*-1}^{t^*} \| \sigma z(\xi) \|^m \, d\xi < - c_2 e^{-mL_\varepsilon}$$

Итак, $c_1 r_\varepsilon^m > c_2 e^{-mL_\varepsilon}$, что противоречит (2. 10), следовательно доказано (2. 11).

Затем при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + 1$ имеем

$$\| z(t) \| \leqslant \| z(\tau) \| \exp \int\limits_{\tau}^{t} \| A(\xi) - (F(\xi) + \varepsilon) E \| \, d\xi \leqslant \| z(\tau) \| .$$

$$\exp \int\limits_{\tau}^{\tau+1} \| A(\xi) - (F(\xi) + \varepsilon) E \| \, d\xi \leqslant \| z(\tau) \| \, e^{L\varepsilon},$$ поэтому полагая

$A_\varepsilon = \max(e^{L_\varepsilon}, r_\varepsilon^{-1})$ получим (2. 9) и следовательно (1. 3).

2. Рассмотрим $x(t) \in N_{k+1}(t)$ при $N_{k+1}(0) \oplus M_k(0) = X(0)$ докажем (1. 4).

Прежде всего докажем существование такого T_0, что $\| z(t) \| > \| z(0) \|$ при $t > T_0$, где T_0 не зависит от $z(t)$. Положим

$$V(t, x(t)) \exp - m \int\limits_0^t (F(\xi) + \varepsilon) \, d\xi = V(t, z(t) \exp \int\limits_0^t (F(\xi) + \varepsilon) \, d\xi).$$

$$\exp - m \int\limits_0^t (F(\xi) + \varepsilon) d\xi = \overline{V}(t, z(t)) = \overline{V}(t, Z(t) \, z(0)),$$

где $Z(t)$ — матрица решений системы (2. 13), удовлетворящая начальному условию $Z(0) = E$

В силу убывания $\overline{V}(t,\ z(t))$, на множестве $S: \{z \in N_{k+1}(0)\ ;\ \| z \| = 1\}$ существует такое $T_0 > 0$, что при $t \geqslant T_0$

$$\overline{V}(t,\ Z(t)\ z) < -c_1.$$

Итак $\| Z(t)\ z \| > 1$ при $z \in S$, $t \geqslant T_0$. Отсюда

$$\| z(t) \| = \| Z(t)z(0) \| > \| z(0) \| \tag{2.14}$$

при $t \geqslant T_0$. Полагая $N_\varepsilon = e^{-nL_\varepsilon}$, где n — положительное целое число, докажем, что

$$\| z(t) \| \geqslant N_\varepsilon \| z(\tau) \| \tag{2.15}$$

при $t \geqslant \tau \geqslant T_0$. В самом деле, в противном случае существуют такие $t_1 > t_0 > T_0$, что $\| z(t_1) \| < N_\varepsilon \| z(t_0) \|$. Легко видеть, что тогда существуют такие t', t'', $t_0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_1$ что

$$\| z(t'') = N_\varepsilon\ \| z(t') \| \tag{2. 16}$$

$\| z(t') \| > \| z(t) \| > \| z(t'') \|$ при $t' < t < t''$. Из (2. 16) следует, что $t'' - t' > n-1$. Возьмем такое n, что

$$n-1 > \frac{2\,c_1}{c_2} \tag{2.17}$$

и положим $\sigma = \| z(t'') \|^{-1}$. По (2. 14) $\| \sigma\ z(0) \| \leqslant 1$, затем

$$-2c_1 \leqslant -c_1 \| \sigma z(t'') \|^m - c_1 \| \sigma z(0) \|^m \leqslant \overline{V}(\sigma z(t''),\ t'') - \overline{V}(\sigma z(0),0)$$

$$\leqslant \overline{V}(\sigma\ z(t''), t'') - \overline{V}(\sigma\ z(t'), t') \leqslant -\int\limits_{t'}^{t''} c_2 \| \sigma z(t) \|^m\ dt <$$

$$-(t'' - t')\ c_2\ \| \sigma z(t'') \|^m = -(t'' - t')\,c_2.$$

Отсюда $t'' - t' < \dfrac{2\,c_1}{c_2}$, что противоречит (2. 17). Итак, имеем (2. 15). Затем применяя метод Массеры и Шеффера ([2] стр. 358) имеем*)

$\| z(t) \| \geqslant M_\varepsilon\ e^{\alpha(t-\tau)} \| z(\tau) \|$ при $t \geqslant \tau \geqslant T_0$. Полагая $B_\varepsilon = M_\varepsilon e^{-(L_\varepsilon + \alpha - 2\varepsilon)\,T_0}$ получим $\| z(t) \| \geqslant B_\varepsilon\ e^{(\alpha - 2\varepsilon)(t-\tau)} \| z(\tau) \|$ при всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Откуда вытекает, что

$\| x(t) \| \geqslant B_\varepsilon\ \| x(\tau) \| \exp \int\limits_\tau^t (F(\xi) + \alpha - \varepsilon)\,d\xi$ ири $x(t) \in N_{k+1}(t)$. Наконец заметим, что множество $M_k(t)$ образует подпространство пространства $X(t)$.

Лемма 3. *Пусть $M_k(t)$ индуцирует слабую дихотомию с функцией $F(t)$. Тогда*

1) Существует такая функция $V(t,x) = V_0(t,x) - V_1(t,x)$, допускающая бесконечно малый высший предел m-го порядка, что производная которой составленная в силу (1.1) удовлетворяет почти всюду равенству (2.3) где $W(t,\ x)$ — определенно-положительная функция m-го порядка, $V\ (t,\ x) \geqslant 0$.

2) $V_0(t,\ x) + V_1(t,\ x)$ — определенно-положительная m-го порядка функция.

---

*) где α независит от ε при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

3) $V(t,x)$ непрерывно дифференцируема по x и по t (почти всюду).

Доказательство. Пусть $\overline{W}(x)$ — такая дифференцируемая функция, что $c_1 \| x \|^m \leqslant \overline{W}(x) \leqslant c_2 \| x \|^m$, c_1, c_2 полоинтжельные постоянные.

I) $V(t, x)$ определяется формулой

$$V(t,x) = V_0(t,x) - V_1(t,x),$$

где

$$V_0(t,x) = [\exp m \int_0^t (F(\xi) + \gamma)\, d\xi] \int_t^\infty [\exp - m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi].$$

$$\overline{W}(U(\tau) P_0 U^{-1}(t)\, x)\, d\tau.$$

$$V_1(t, x) = \overline{W} (P_1 U^{-1}(t)\, x) \exp m \int_0^t F(\xi) + \gamma)\, d\xi +$$

$$[\exp m \int_0^t F(\xi) + \gamma)\, d\xi] \int_0^t [\exp - m \int_0^\tau F(\xi) + \gamma)\, d\xi]\, \overline{W} (U(\tau) P_1 U^{-1}(t) x)\, d\tau.$$

Здесь γ достаточно малое фиксированное положительное число. Тогда $\frac{d}{dt} V(t, x(t))$ составленная в силу (1.1) почти всюду удовлетворяет уравнению

$$\frac{dV}{dt} = m\, (F(t) + \gamma)\, V(t, x) - W_1(t, x), \tag{2. 18}$$

где $W_1(t, x) = \overline{W}\, [U(t) P_0 U^{-1}(t)\, x] + \overline{W}\, [U(t) P_1 U^{-1}(t)\, x]$ определенно-положительная m-го порядка функция.

Но ниже докажем, что $V(t, x)$ допускает бесконечно высший предел m—го порядка, следовательно можем написать уравнение (2. 18) в виде (2. 3), где $W(t, x) = W_1(t, x) - m\gamma\, V(t, x)$ — определенно-положительная m-го порядка функция при достаточно малом γ.

Теперь докажем, что $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел m-го порядка. В самом деле, по лемме 1 имеем

$$| V_0(t,x) | \leqslant [\exp m \int_0^t (F(\xi) + \gamma) d\xi] \int_t^\infty \{ [\exp m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma) d\xi].$$

$$c_2 K_\varepsilon^m\, [\exp m \int_t^\tau (F(\xi) + \varepsilon) d\xi]\, \| x \|^m \}\, d\tau = c_2 K_3^m \| x \|^m.$$

$$\exp m \int_0^t (F(\xi) + \gamma) d\xi \cdot \int_t^\infty [\exp - m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi]\, [\exp (m \int_t^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi$$

$$- m\, (\gamma - \varepsilon)\, (\tau - t))]\, d\tau.$$

Выбираем $\varepsilon < \gamma < \alpha$. Тогда

$$| V_0(t, x) | \leqslant c_2 K_\varepsilon^m \| x \|^m \int_t^\infty [\exp - m(\gamma - \varepsilon)(\tau - t)]\, d\tau = \frac{c_2 K_\varepsilon^m \| x \|^m}{m(\gamma - \varepsilon)},$$

$$| V_1(t, x) | \leqslant c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m + \exp \left[m \int_0^t (F(\xi) + \gamma)\, d\xi\right].$$

$$\int_0^t [\exp - m \int_0^t (F(\xi) + \gamma)\, d\xi] \quad c_2 \overline{K}_\varepsilon^m [\exp m \int_t^\tau (F(\xi) + \alpha - \varepsilon)\, d\xi] \| x \|^m\, d\tau =$$

$$= c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m + c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m [\exp m \int_0^t (F(\xi) + \gamma)\, d\xi].$$

$$\int_0^t [\exp - m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi] [\exp m \int_t^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi] [\exp m(\alpha - \varepsilon - \gamma)(\tau - t)]\, d\tau$$

$$= c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m + c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m \int_0^t \exp m(\alpha - \varepsilon - \gamma)(\tau - t)\, d\tau,$$

или окончательно

$$| V_1(t, x) | \leqslant c_2 \overline{K}_\varepsilon^m \| x \|^m \left[1 + \frac{1}{m(\alpha - \varepsilon - \gamma)}\right].$$

Итак, $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел m-го порядка.

Докажем, что на $M_k(t)$, $V(t, x) = V_0(t, x)$ является определенно-положительной m-го порядка.

Полагаем $z_0(\tau) = [\exp - \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma) d\xi]\, U(\tau)\, P_0 U^{-1}(t) x$, тогда $z_0(\tau)$ является решением системы

$$\frac{dz}{dt} = \left[A(t) - (F(t) + \gamma) E\right] z.$$

Полагаем $L = \sup_t \| A(t) - (F(t) + \gamma) E \|$, тогда

$$V_0(t, x) \exp - m \int_0^t (F(\xi) + \gamma)\, d\xi = \int_t^\infty \left[\exp - m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi\right]$$

$$\overline{W}(U(\tau) P_0 U^{-1}(t) x)\, d\tau \geqslant \int_t^{t+1} \exp - m \int_0^\tau (F(\xi) + \gamma)\, d\xi \cdot \overline{W}(U(\tau) P_0 U^{-1}(t) x)\, d\tau$$

$$\geqslant \int_{l}^{l+1} c_1 \| z_0(\tau) \|^m d\tau \geqslant c_1 e^{-mL} \| z_0(t) \|^m =$$

$$c_1 e^{-mL} \exp - m \int_0^t (E(\xi) + \gamma)\, d\xi .\ \| U(t) P_0 U^{-1}(t) x \|^m .$$

Итак, $V_0(t, x) \geqslant c_1 \| U(t) P_0 U^{-1}(t) x \|^m$.

Аналогично имеем $V_1(t, x) \geqslant c_1 \| U(t) P_1 U^{-1}(t) x \|^m$. Тогда

$V_0(t,x) + V_1(t,x) \geqslant c_1 [\max (\| U(t) P_0 U^{-1}(t) x \|, \| U(t) P_1 U^{-1}(t) x \|)]^m$ $\geqslant \frac{c_1}{2^m} \| x \|^m$. Заметим, что если $W(x)$ однородна степени m то такими же будут V_0, V_1, V.

Доказательство утверждения 3) является классическим.

Рассмотрим сопряженную систему

$$\frac{dy}{dt} = - A^*(t)\, y, \tag{2.19}$$

и полагаем $Y(t) = (X^{-1}(t))^* = \{Y_1(t), \ldots, Y_q(t)\}$, где группа $-Y_q(t)$ взаимна с группой $X_q(t)$. Пусть $M^*_{k+1}(t)$ подпространство порождает группами $Y_{k+1}(t)$, ..., $Y_q(t)$ и $N^*_k(t)$ подпространство порождает группами $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$. Тогда, если $R_k(t)$ и $r_{k+1}(t)$ являются соответственно верхней и нижней функциями $M_k(t)$, $N_{k+1}(t)$ то $-r_{k+1}(t)$, $-R_k(t)$ — соответственно верхней и нижней функции $M^*_{k+1}(t)$ и $N^*_k(t)$ [5].

Теперь если лишь требуется, что $X(t)$ — некоторая фундаментальная система решений системы (1. 1) то имеем

Лемма 4 : *Для того, чтобы $M_k(t)$ индуцировало слабую дихотомию необходимо и достаточно, чтобы $M^*_{k+1}(t)$ индуцировало слабую дихотомию (относительно (2.19)).*

Эта лемма следует из предыдущего рассуждения.

Теорема 2. *Для того, чтобы $M_k(t)$ индуцировало отделенность относителньо (1.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая $V_1(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел m-го порядка, производная которой составленная в силу (1.1) удовлетворяет почти всюду уравнению*

$$\frac{dV_1}{dt} = mR_k(t)\, V_1(t, x) - W_1(t, x),$$

где $R_k(t)$ — ограниченная измеримая функция, $W_1(t, x)$ определенно-положительная m-го порядка, $V_1(t, x(t)) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ на $M_k(t)$, $V_1(t, x(t)) < 0$ на $N_{k+1}(t)$ при всех достаточно больших t или, что тоже, существует функция $V_2(t, y)$, обладающая свойствами, аналогичными тем $V_1(t, x)$ и её производная, составленная в силу (2.19), почти всюду удовлетворяет

$$\frac{dV_2}{dt} = -mr_{k+1}(t)V_2(t, y) - W_2(t, y),$$

где $r_{k+1}(t)$ —ограниченная измеримая функция, $W_2(t, y)$ имеет свойство, аналогичное тому, чтоу $W_1(t, x)$, $V_2(t, y(t)) \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ на $M^*_{k+1}(t)$ и $V_2(t, y(t)) < 0$ на $N^*_k(t)$ при всех достаточно больших t.

Доказательство теоремы следует из лемм 2, 3, 4.

Следствие 3. *Необходимым и достаточным для отсутствия (1.6), где $\overline{\Omega}_k < \overline{\omega}_{k+1}$ является наличие $V_1(t, x)$ или $V_2(t, y)$ удовлетворящие теореме 2.*

3. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{3.1}$$

Лемма 5. *Пусть для системы (1.1) $M_k(t)$ индуцирует слабую дихотомию с функцией $F(t)$. Тогда при всех непрерывных функциях $f(t)$ удовлетворяющих для $\forall\ t \geqslant 0$ неравенству*)*

$$\| f(t) \| \leqslant C_\varepsilon \operatorname{cxp} \int_0^t F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi \tag{3.2}$$

при $\forall\ \varepsilon > 0$ система (3.1) имеет такое семейство решений, зависящее лот гпараметров, что

$$\| x(t) \| \leqslant D_\varepsilon \exp \int_0^t (F(\xi) + \varepsilon)\, d\xi, \tag{3.3}$$

где s — размерность $M_k(t)$.

Доказательство. Имеем

$$x(t) = \overline{x}(t) + \int_0^t U(t)\, P_0\, U^{-1}(\tau)\, f(\tau)\, d\tau + \int_\infty^t U(t)\, P_1\, U^{-1}(\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

где $\overline{x}(t) \in M_k(t)$ при $\| \overline{x}(0) \| = 1$. По лемме 1

*) где C_ε могут не равняться при различных $f(t)$; подобным образом для D_ε в следующем неравенстве (3.3).

$$\| x(t) \| \leqslant A_\varepsilon \exp \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi + \int_0^t [K_\varepsilon \exp \int_\tau^t \left(F(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \right) d\xi] \,.$$

$$[C_\varepsilon \exp \int_0^\tau (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi]\,d\tau + \int_t^\infty [\overline{K}_\varepsilon \exp \int_\tau^t \left(F(\xi) + \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) d\xi] \,.$$

$$[C_\varepsilon \exp \int_0^\tau (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi]\,d\tau \leqslant A_\varepsilon \exp \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi + K_k C_\varepsilon \,.$$

$$\exp \int_0^t \left(F(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \right) d\tau \,. \int_0^t e^{\frac{\varepsilon}{2}\tau}\,d\tau + \overline{K}_\varepsilon C_\varepsilon \exp \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi \,.$$

$$\int_t^\infty e^{\left(\alpha - \frac{3}{2}\varepsilon \right)(t-\tau)}\,d\tau < D_\varepsilon \exp \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi \,.$$

Лемма 6. *Пусть система (3.1), для всех непрерывных $f(t)$ удовлетворяющих (3.2), имеет по крайней мере одно решение удовлетворяющее (3.3), Тогда множество $M_k(t)$ системы (1.1) удовлетворяющее (3.3), индуцирует слабую дихотомию с функцией $F(t)$.*

Доказательство. Полагаем

$$z(t) = x(t) \exp - \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi.$$

Тогда система (3. 1) заменена системой

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) - (F(t)+\varepsilon)E]\,z + \overline{f}(t), \tag{3.4}$$

где

$$\overline{f}(t) = f(t) \exp - \int_0^t (F(\xi)+\varepsilon)\,d\xi.$$

Для системы (3 . 4) применяя теорему Массеры — Шеффера ([2] гл. V) ввиду того, что система (3. 4) имеет по крайней мере одно ограниченное решение при всяком ограниченном $\overline{f}(t)$, имеем

$$\| z(t) \| \leqslant A_\varepsilon \| z(\tau) \| \exp - \frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)$$

для всех ограниченных $z(t)$.

Обозначим $Z_0 = \{ z(0);\ z(t)$ — ограниченные решения $\}$. $\| z(t) \| > B_\varepsilon \| z(\tau) \| \exp\left(\alpha - \frac{3\varepsilon}{2}\right)(t-\tau)$ для всякого*) $z(t)$ при $z(0) \in Z_1$ где $Z_1 = Z \ominus Z_0$, Z — n-мерное пространство $\{ z(0) \}$.

Откуда вытекает, что $\| x(t) \| \leqslant A_\varepsilon \| x(\tau) \| \exp \int\limits_\tau^t \left(F(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} \right) d\xi$ при $x(t) \in M_k(t)$.

Ясно, что $M_k(t)$ — подпространство пространства $X(t)$. С другой стороны

$$\| x(t) \| \geqslant B_\varepsilon \| x(\tau) \| \exp \int\limits_\tau^t \left(F(\xi) + \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) d\xi \quad \text{при} \quad x(t) \in N_{k+1}(t).$$

Итак $M_k(t)$ индуцирует слабую дихотомию с функцией $F(t)$. Рассмотрим систему (2. 19) и систему

$$\frac{dy}{dt} = - A^*(t) y + \varphi(t). \tag{3.5}$$

Из лемм 4, 5, 6 получим

Теорема 3. *Пусть подпространство решений $M_k(t)$ системы (1.1) удовлетворяет неравенству (3.3) при $F(t) = R_k(t)$ и взаимное подпространство $M^*_{k+1}(t)$ системы (2.19) удовлетворяет неравенству (3.3) при $F(t) = -r_{k+1}(t)$. Тогда для того, чтобы $M_k(t)$ индуцировало отделенность необходимо и достаточно, чтобы система (3.1) при $\forall f(t)$. удовлетворяющем (3.2) при $F(t) = R_k(t)$, имела по крайней мере одно решение, удовлетворяющее (3.3) при $F(t) = R_k(t)$ или, что тоже, система (3.5) при $\forall \varphi(t)$ удовлетворяющем (3.2) при $F(t) = -r_{k+1}(t)$ имела по крайней мере одно решение, удовлетворяющее (3.3) при $F(t) = -r_{k+1}(t)$.*

Следствие 4. *Для отсутсвия (1.6), где $\overline{\Omega}_k < \overline{\omega}_{k+1}$, необходимо и достаточно, чтобы система (3.1) или (3.5) имела упомянутые свойства в теореме 3.*

4. *Сопряженные системы.* Рассмотрим

Условие A [I] : Существует фундаментальная нормальная упорядоченная система решений $X(t)$ системы (1. 1), что взаимная система $Y(t)$ также нормальна, упорядочена относительно системы (2. 19) и их показатели имеют одинаковые кратности.

Все показатели системы

$$\frac{dy}{dt} = - A^*(t)y + \varphi(t, y),$$

*) найдется $\alpha > 0$ независящее от ε.

где $\varphi(t, y)$ удовлетворяет условию (1. 5) при достаточном малом δ называются возмущенным для системы (2. 19) при малых возмущениях.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие А. Тогда для того чтобы $M_k(t)$ индуцировало отделенность, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{\Omega}_k < \underline{\omega}_{k+1}$ и не существовал никакой возмущенный показатель λ^* системы (2.19), удовлетворяющий при малых возмущениях неравенствам*

$$\underline{\Omega}_k + \varepsilon \leqslant -\lambda^* \leqslant \underline{\omega}_{k+1} - \varepsilon. \qquad (4.\ 1)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $M_k(t)$ индуцирует отделенность. Тогда по лемме 4, $M^*_{k+1}(t)$ индуцирует отделенность. В силу условия А, $M^*_{k+1}(t)$ составляется из всех решений системы (2. 19), показатели которых не превосходят Λ^*_k. По теореме 1 $\overline{\Omega}^*_{k+1} < \overline{\omega}^*_k$ и не существует никакого возмущенного показателя системы (2. 19), удовлетворяющий при малых возмущениях неравенствам

$$\overline{\Omega}^*_{k+1} + \varepsilon \leqslant \lambda^* \leqslant \overline{\omega}^*_k - \varepsilon \qquad (4.2)$$

Но из условия А

$$\overline{\Omega}^*_{k+1} = -\underline{\omega}_{k+1}\ , \ \overline{\omega}^*_k = -\Omega_k\,.$$

Итак, $\underline{\Omega}_k \leq \omega_{k+1}$ и не выполняется (4. 1).

Достаточность. В силу условия А если $\underline{\Omega}_k < \underline{\omega}_{k+1})$ т.е. $\overline{\Omega}^*_{k+1} < \overline{\omega}^*_k$ и если не имеет место (4. 1) то не выполняется (4. 2). По теореме 1, M^*_{k+1} (t), следовательно M_k (t), индуцирует отделенность.

Следствие 5: *Пусть выполнено условие А. Для отделенности системы (1.1) по всем $M_k(t)$, необходимо и достаточно чтобы все возмущенные показатели системы (2.19) при малых возмущениях попадали в непересекающиеся интервалы $(\underline{\omega}_k - \varepsilon$, $\underline{\Omega}_k + \varepsilon)$ $(k = 1, ..., q)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 на основе теоремы 4.

Рассмотрим связь отделенности с условием А. Теперь, в отличие от леммы 4, в определениях 1, 2, в качестве $X(t)$ возьмем некоторую бинормальную упорядоченную фундаментальную систему решений.

Тогда имеем

Лемма 7: *Если система (1.1) отделена по всем $M_k(t)$ и система (2.19) отделена по всем $M^*_{k+1}(t)$ то выполняется условие А. Обратно если система (1.1) отделена по всем $M_k(t)$ и условие А выполняется то система (2.19) отделена по всем $M^*_{k+1}(t)$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть бинормальная упорядоченная фундаментальная система решений отделена при всех парах $\{ R_k(t), r_{k+1}(t) \}$ $(k = 1, ..., q-1)$. Тогда $Y(t) = (X(t)^{-1})^*$ допускает нижние и верхние пары $\{ -R_k(t) \ , \ -r_k(t) \}$, поэтому число l различных показателей системы (2. 19) не меньше чем q. В силу отделенности, отрезки $\{ -\overline{R}_k(t) \ , \ -\overline{r}_k(t) \}$ непересекаются и движутся на право с убыванием k. Поэтому $Y(t)$ — нормальная упорядоченная система. По предположению, система (2. 19) отделена по всем $M^*_{k+1}(t)$ поэтому опять применяя предыдущее рассуждение имеем $l = q$ и более того, условие А выполнено.

Докажем второе утверждение. В качестве $X(t)$ возьмем нормальную упорядоченную систему решений, имеющую отделенную пару верхней и нижней функций $r_k(t)$, $R_k(t)$. Тогда $Y(t) = X^{-1}(t)$ имеет пару верхней и нижней функций $-R_k(t)$, $-r_k(t)$, В силу условия А, $Y(t)$ нормальная и упорядочена поэтому система (2. 19) отделена по всем $M^*_k(t)$ (где $M^*_k(t)$ тогда является подпространством решений системы (2. 19), показатели которых не превосходят $\wedge^*_k$).

Следствие 6. *(Теоремы Былова Б. Ф. [6], стр. 944—946). Для одновременной устойчивости показателей системы (1.1) и (2.19) необходимо и достаточно, чтобы*

1) *Система (1.1) была отделена по всем* $M_k(t)$,

2) $\overline{\Omega}_k = \overline{\omega}_k \ (= \wedge_k)$ *при* $\forall k$,

3) $\underline{\Omega}_k = \underline{\omega}_k$ *при* $\forall k$.

Следствие 7. *Пусть удовлетворяется условие А. Тогда для одновременной устойчивости показателей систем (1.1) и (2.19) достаточно чтобы система (1.1) была отделена по всем* $M_k(t)$ *и при* $\forall k$

$$- \overline{\Omega}^*_k = \overline{\Omega}_k \qquad (4.3)$$

Доказательство. В силу условия А имеем $-\overline{\Omega}^*_k = \underline{\omega}_k \leqslant \underline{\Omega}_k \leqslant \overline{\Omega}_k$ и ибо $\underline{\omega}_k \leqslant \overline{\omega}_k \leqslant \overline{\Omega}_k$ то из (4. 3) следует, что $\underline{\omega}_k = \overline{\omega}_k = \overline{\Omega}_k = \underline{\Omega}_k$. Итак, удовлетворяются все условия следствия 6.

Теперь возникает вопрос: Когда условие отделенности и условие (4. 3) являются также необходимыми? Ответом на этот вопрос является следующая

Теорема 5. *Пусть система (1.1) правильна (по Ляпунову). Тогда для одновременной устойчивости показатели систем (1.1) и (2.19) необходимо и достаточно, чтобы система (1.1) была отделена по всем* $M_k(t)$ *и выполнялись (4.3) при* $\forall k$.

Доказательство. По теореме Перрона ([1] стр. 56) условие А удовлетворяется в силу правильности системы (1. 1). Следовательно, достаточное условие следует из следствия 7.

Необходимость. Имеем $\overline{\omega}_k \leqslant \Lambda_k$, $\overline{\omega}^*_k \leqslant \Lambda^*_k$. В силу правильности системы (1. 1) имеем

$$\overline{\omega}_k + \overline{\omega}_k^* \leqslant \Lambda_k + \Lambda_k^* = 0 \qquad \text{или} \qquad \overline{\omega}_k \leqslant -\overline{\omega}_k^*.$$

Но $\overline{\omega}_k^* = -\Omega_k$, поэтому $\overline{\omega}_k \leqslant \underline{\Omega}_k$. Итак, получим $-\overline{\Omega}_k^* = \underline{\omega}_k \leqslant \overline{\omega}_k \leqslant \underline{\Omega}_k \leqslant \overline{\Omega}_k$.

Из следствия 6 следует, что $\overline{\Omega}_k = \overline{\omega}_k = \underline{\Omega}_k = \underline{\omega}_k$ при $\forall k$, откуда вытекает (4. 3).

Замечание. Легко доказать что [7] верхние показатели $\overline{\Omega}_k$ и $\overline{\Omega}_k^*$ систем (1. 1) и (2. 19) являются показателями по абстрактному смыслу и они сопряжены друг с другом [1]. Итак, условие (4. 3) показывает, что системы (1. 1) и (2. 19) правильны относительно абстрактных показателей $\overline{\Omega}_k$ и $\overline{\Omega}_k^*$.

Поступила в редакцию 15 / III / 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. *Теория показателей Ляпунова,* М. 1966.
2. Х. Массера, Х. Шеффер. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства,* М. 1970.
3. Б.М. Миллионщиков : С.М.Ж. 1969 Том X, № I, 99 — 104.
4. Б.Ф. Былов, Н.А. Изобов : Диффренц- уравнения 1969, Том 5, № 10, 1794 — 1803.
5. Б.Ф. Былов : Дифференц . уравнения 1970. Том 6, № 2, 243 — 252.
6. Б.Ф. Былов : Дифференц . уравнения 1970. Том 6, № 6, 943 — 947.
7. Hoàng hữu Đường. Acta Scietiarum Vietnamicarum, Sect. Math. et Phys. 1964, Tom 1, 85 — 165.