ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 2, № 1 (1977)

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

NGÔ VĂN LƯỢC
Институт математики
Ханой

В этой статье рассматриваются некоторые трехмерные и двумерные краевые задачи для одного класса уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\operatorname{div}(\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) - 2\,\delta\,\rho\, u = f, \tag{1}$$

где δ — постоянная, f —заданная непрерывная функция, и ρ —заданная функция некоторого класса. Укажем, что в некоторых случаях поставленная задача допускает точное решение. В некоторых других случаях задача будет решена приближенно методом суммарных представлений [1]. Для иллюстрации приложения метода будет рассмотрена одна задача фильтрации в неоднородной среде. Заметим, что некоторые краевые задачи для уравнения типа (1) были рассмотрены в работах [2 —9].

§ I. Постановка задачи.

Вводим следующее определение.

Определение : Функцией Гельмгольца с индексои λ назовем решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta u - \lambda u = 0, \tag{2}$$

где λ — постоянная, Δ —оператора Лапласа.

Имеем одномерную, двумерную и трехмерную функции Гельмгольца, которые зависят от числа размерностей оператора Δ. Заметим, что линейные, тригонометрические и гиперболические функции принадлежат классу одномерных функций Гельмгольца, а циклические функции принадлежат классу двумерных функций Гельмгольца. Гармонические функции представляют собой функции Гельмгольца с нулевым индексом. Как известно, гармонические функции и функции Гельмгольца хорошо изучены в литературе (см., например, [10 — 13]).

В дальнейшем будем изучать следующую краевую задачу: Пусть D — заданная область (на плоскости или в пространстве) с границей Γ. Требуется найти решение уравнения (1), где $\sqrt{\rho}$ — заданная не обращающаяся в нуль функция Гельмгольца с индексом 2μ, удовлетворяющая краевому условию*)

$$N u|_{\Gamma} = g, \tag{3}$$

где g — заданная фунция, $N u$ — оператор первого, второго или смешанного краевых условий.

Для решения поставленной задачи сделаем в уравнение (1) замену

$$v = \sqrt{\rho}\; u \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) будет преобразовано к виду

$$\Delta v - \left(\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + 2\delta\right) v = \frac{f}{\sqrt{\rho}} \tag{5}$$

Так как $\sqrt{\rho}$ — функция Гельмгольца с индексом 2μ, то из (5) следует

$$\Delta v - 2\lambda v = F, \tag{6}$$

где

$$\lambda = \delta + \mu,\ F = \frac{f}{\sqrt{\rho}} \tag{7}$$

Таким образом, с помощью замены (4) уравнение (1) сводится к уравнению Гельмгольца.

§ 2. Точное решение.

В этом параграфе рассмотрим некоторые случаи, для которых поставленная задача имеет точное решение. Начнем с задачи Дирихле

$$u|_{\Gamma} = g. \tag{7}$$

В этом случае вид краевого условия для новой функции v сохраняется:

$$v|_{\Gamma} = \tilde{g},\ \tilde{g} = \sqrt{\rho}\, g. \tag{9}$$

Итак, при замене (4) мы приходим к задаче Дирихле (9) для уравнения Гельмгольца (6) в такой же области D. Если последняя задача допускает точное решение, то исходная задача также имеет точное решение. Рассмотрим некоторые такие задачи.

Задача 1. Пусть в шаре $r < R$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ задано уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \tag{10}$$

* μ — постоянная.

$$\sqrt{\rho} = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(r^2 - R^2)\, h(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(R^2 - 2\, r\, R \cos\theta + r^2)^{3/2}} \tag{11}$$

где $h(\theta, \varphi)$ — любая заданная непрерывная постояннозначная функция на сфере $r = R$. Требуется найти решение уравнения (10) по краевому условию

$$u\Big|_{r=R} = g(\theta, \varphi), \tag{12}$$

где $g(\theta, \varphi)$ — заданная непрерывная функция.

Заметим, что $\sqrt{\rho}$ представляет собой гармоническую функцию в шаре $r < R$, и $\sqrt{\rho} = h(\theta, \varphi)$ на сфере $r = R$ (см. [11]). Кроме того, согласно принципу максимума для гармонических функций функция $\sqrt{\rho}$ не обрашается в нуль в шаре $r \leqslant R$ (так как она является постояннозначной функцией в шаре).

С помощью замены (4) мы приходим к задачеДирихле в шаре для гармонической функции v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{13}$$

$$v\Big|_{r=R} = \tilde{g}(\theta, \varphi),\ \tilde{g} = g \cdot h. \tag{14}$$

Задача Дирихле (13), (14) имеет точное решение [11]

$$v = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(r^2 - R^2)\, g(\theta,\varphi)\, h(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta \, d\varphi}{(R^2 - 2rR\cos\theta + r^2)^{3/2}}\,. \tag{15}$$

Поэтому исходная задача допускает точное решение

$$u = \frac{R}{4\pi \sqrt{\rho}} \int^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(r^2 - R^2)\, g(\theta,\varphi)\, h(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}{(R^2 - 2rR\cos\theta + r^2)^{3/2}}\,. \tag{16}$$

Задача 2. Требуется найти в полупространстве $z > 0$ решение задачи Дирихле

$$u\Big|_{z=0} = g(x, y). \tag{17}$$

Для уравнения (10), где

$$\sqrt{\rho} = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, \eta)\, d\xi \, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}, \tag{18}$$

и $h(x, y)$ — любая непрерывная постояннозначная функция на плоскости $z = 0$ и

$h(x, y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ при $x, y \to \infty$.

В этом случае $\sqrt{\rho}$ представляет собой гармоническую функцию, не равную нулю в полупространстве $z > 0$ и принимает граничное значение $h(x, y)$ на $z = 0$. Согласно [10], [11], решение поставленной задачи будет

$$u = \frac{z}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi, \eta)\, h(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - z^2]^{3/2}}. \tag{19}$$

Рассмотрим сейчас аналогичные задачи в двумерных случаях.

Задача 1'. Требуется найти в круге $r < R$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, решение задачи Дирихле

$$u \Big|_{r=R} = g(\varphi), \; z = r\, e^{i\varphi} \tag{20}$$

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{21}$$

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{h(\theta)\,(R^2 - r^2)}{R^2 - 2\,r\,R\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, d\theta, \tag{22}$$

где $h(\theta)$ — любая непрерывная постоянзначная функция на круге $r = R$.

Решение задачи 1' имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_{0}^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, h(\theta)\, g(\theta)\, d\theta}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2}. \tag{23}$$

Задача 2'. Требуется найти в полуплоскости $y > 0$ решение задачи Дирихле

$$u \Big|_{y=0} = g(x) \tag{24}$$

Для уравнения (21), где

$$\sqrt{\rho} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}}, \tag{25}$$

$h(x)$ — любая непрерывная ограниченная и постояннозначная функция на $y = 0$.

Решение задачи 2' будет

$$u = \frac{y}{\pi\sqrt{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)\, g(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}}. \tag{26}$$

Заметим, что аналогично можно решить внешние задачи 1 и 1'. Кроме того, можно рассматривать задачи для уравнений (10) и (21) с правой частью, так как при помощи известной замены задача Дирихле для уравнения Пуассона сводится к задаче Дирихле для гармонического уравнения. Двухчмерная задача Дирихле (21), (3), где $\sqrt{\rho}$ — любая гармоническая, не обрашающаяся в нуль функция, имеет точное решение для всех односвязных областей, которые можно отобразить конформно на круг при помощи аналитической функции [12].

Сейчас расмотрим случай, когда $\sqrt{\rho}$ является функцией Гельмгольца с ненулевым индексом.

Вводим функцию $\Phi(x, y)$:

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) - \frac{ky}{2}\int_{\bar{z}}^{z} f(t)\, \frac{I_1\left(k\sqrt{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})}\right)}{\sqrt{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})}}\, dt + $$

$$+ \frac{1}{2i}\int_{\bar{z}}^{z} g(t)\, I_0\left(k\sqrt{(t-z)(\bar{t}-\bar{z})}\right) dt, \tag{27}$$

где $f(z)$, $g(z)$ — произвольные акалитические функции, $I_\nu(z)$ — функции Бесселя первого рода мнимого аргумента порядка ν. Как известно [13, 14], функция $\Phi(x, y)$ предстаьляет собой функцию Гельмгольца с индексом k^2

Задача 3. Найти в круге $r < R$ решение задачи Дирихле

$$u\big|_{r=R} = g(\varphi) \tag{28}$$

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\,\delta\,\rho\, u = 0, \tag{29}$$

где $\sqrt{\rho}$ — заданная необращающаяся в нуль функция Гельмгольца с индексом k^2 (например, $\sqrt{\rho}$ определяется формулой (27)).

Как выше сказано, с помощью замены (4), задача (5) сводится к следующей задаче

$$\Delta v - k'^2 v = 0,\ k' = \sqrt{k^2 + 2\delta}, \tag{30}$$

$$v\big|_{r=R} = \tilde{g}(\varphi),\ \tilde{g} = g\sqrt{\rho}. \tag{31}$$

Предполагаем, что

$$\delta \geqslant -\frac{k^2}{2}. \tag{32}$$

Тогда $k' \geqslant 0$. Если $\delta = -\frac{k'^2}{2}$, то $k' = 0$.

В этом случае мы приходим к задаче Дирихле в круге для гармонической функции Поэтому решение задачи имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{g}(\theta)\,(R^2 - r^2)\, d\theta}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2}. \tag{33}$$

В случае, когда $\delta > -\frac{k^2}{2}$, мы получаем задачу Дирихле для функции Гельмгольца в круге, точное решение которой найдено в [15]. Согласно [15] в этом случае решение нашей задачи принимает вид

$$u = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} \widetilde{g}(\theta) \left[\sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{I_m(k'r)}{I_m(k'R)} \cos m(\theta - \varphi) \right] d\theta \tag{34}$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_m = 1,\ m = 1, 2, 3, \ldots \tag{35}$$

Заметим, что согласно [15] можно решить задачу 3 в случае когда уравнение (29) имеет ненулевую правую часть.

§ Задача Дирихле в общем случае.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели некоторые задачи Дирихле в специальных областьях, для которых удалось найти точное решение. В общем случае эту задачу можно решить приближенно.

Задача 4. Требуется найти в параллепипеде

$$a < x < b,\ c < y < d,\ r < z < t. \tag{36}$$

решение задачи Дирихле для уравнения (1), где $\sqrt{\rho}$ — заданная функция Гельмгольца с индексом 2μ.

Как указано выше, при помощи замены (4) задача 4 сводится к задаче (6) — (8). Для решения последней задачи используем метод суммарных представлений [1, 16].

Покроем область D равномерной сеткой

$$\begin{gathered} x_i = a + ih\ ,\quad y_k = c + kh_1\ ,\quad z_j = r + jh_2 \\ (i = 0,1,\ldots, m+1;\ k \quad 0,1,\ldots, n+1;\ j = 0,1,\ldots, l+1), \end{gathered} \tag{37}$$

где $h = \dfrac{b-a}{m+1}$, $h_1 = \dfrac{d-c}{n+1}$, $h_2 = \dfrac{t-r}{l+1}$ — шаги сетки, соответственно, по x, y, z. В образованной сеточной области D^*, соответствующей области D, будем искать решение конечноразностного уравнения

$$\Delta_h v - 2\lambda v = F(x_i, y_k, z_j), \tag{38}$$

здесь Δ_h — конечноразностный трехмерный оператор Лапласа, определенный на семиточечном шаблоне.

Для любой дискретной функции $u(x_i, y_k, z_j)$ обозначаем

$$\begin{aligned} u_{kj}(x_i) &= u(x_i, y_k, z_j) \\ \vec{u}_j(x_i) &= \{u_{1j}(x_i),\ u_{2j}(x_i), \ldots, u_{nj}(x_i)\}. \end{aligned} \tag{39}$$

вводим скалярные величины:

$$\gamma = \frac{h}{h_1}\ ,\quad \delta = \frac{h}{h_2}, \tag{40}$$

n — мерный вектор

$$\vec{w}_j(x_i) = \{v_{0j}(x_i),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ v_{n+1j}(x_i)\} \tag{41}$$

матрицу n - го порядка

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{jk\pi}{n+1} \right]^{n}_{j,k=1}, \tag{42}$$

и матрицу l - го порядка

$$P' = \sqrt{\frac{2}{l+1}} \left[\sin \frac{jk\pi}{l+1} \right]^{l}_{j,k=1}$$

Вводим для произвольного вектора $\vec{a} = \{a_k\}^{n}_{k=1}$ P — трансформацию $P\vec{a} = \vec{\hat{a}} = \{\hat{a}_k\}^{n}_{k=1}$ и для произвольного вектора $\vec{b} = \{b_k\}^{l}_{k=1}$ P' — трансформацию $P'\vec{b} = \vec{\hat{b}}' = \{\hat{b}'_k\}^{l}_{k=1}$.

Обозначим

$$\vec{R}_k(x_i) = \{\widehat{F}_{kj}(x_i)\}^{l}_{j=1}, \quad \vec{\omega}_k(x_i) = \{\widehat{w}_{kj}(x_i)\}^{l}_{j=1},$$
$$\vec{g}_k(x_i) = \{\widehat{u}_{k0}(x_i), \ 0, \ldots, 0, \widehat{u}_{kl+1}(x_i)\}. \tag{43}$$

Тогда согласно [5, 16] решение исходной задачи имеет вид

$$u_{kj}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(l+1)(n+1)\rho_{kj}(x_i)}} \sum_{q=1}^{n} \sum_{s=1}^{l} \sin\frac{sj\pi}{l+1} \sin\frac{qk\pi}{n+1} \Big\{ A_{qs}\,\varphi_{qs}(x_i) +$$
$$+ B_{qs}\psi_{qs}(x_i) + \sum_{p=1}^{i-1} G_{qs}(i-p)\,[h^2\widehat{R}'_{qs}(x_p) - \gamma^2\widehat{\omega}'_{qs}(x_p) - \delta^2\widehat{g}'_{qs}(x_p)]\Big\},$$
$$k = 1,2,\ldots, n; \ j = 1,2,\ldots, l; \ i = 0,1,\ldots, m+1, \tag{44}$$

где A_{kj} и B_{kj} — произвольные постоянные; функции $\varphi_{kj}(x_i)$, $\psi_{kj}(x_i)$ и $G_{kj}(x_i)$ определяются по таблице 1 в зависимости от величины η_{kj}:

$$\eta_{kj} = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right) + \delta\left(1 - \cos\frac{j\pi}{l+1}\right)$$
$$k = 1, 2,\ldots, n; \ j = 1,2,\ldots, l \tag{45}$$

Таблица 1

	$\varphi_{kj}(x_i)$	$\psi_{kj}(x_i)$	$G_{kj}(i)$	
$\lvert\eta_{kj}\rvert > 1$	μ^{i}_{kj}	ν^{i}_{kj}	$\left(\mu^{i}_{kj} - \nu^{i}_{kj}\right)\left(\mu_{kj} - \nu_{kj}\right)^{-1}$	$\mu_{kj} = \eta_{kj} + \sqrt{\eta^2_{kj} - 1}$
$\lvert\eta_{kj}\rvert = 1$	μ^{i}_{kj}	$i\mu^{i}_{kj}$	$i\,\mu^{i-1}_{kj}$	$\nu_{kj} = \eta_{kj} - \sqrt{\eta^2_{kj} - 1}$
$\lvert\eta_{kj}\rvert < 1$	$\cos i\theta_{kj}$	$\sin i\,\theta_{ki}$	$\sin i\theta_{kj}\,(\sin\theta_{kj})^{-1}$	$\theta_{kj} = \arccos\eta_{kj}$

Формула (44) содержит $2nl$ неизвестных постоянных A_{kj} и B_{kj}, $k = 1,2,\ldots, n$; $j = 1,2\ldots l$, которые можно определить из краевых условий на гранях, перпендикулярных к осям Оу и Oz.

Заметим, что аналогично можно решить задачу 4 в двумерном случае, т.е. задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнения (29), где $\sqrt{\rho}$ — двумерная функция Гельмгольца.

Сейчас переходим к рассмотрению задачи Дирихле в неограниченной области. В этом случае нужно выбрать коэффициент ρ так, что новая функция v остается ограниченной при $x \to \infty$. Рассмотраим некоторые примеры.

Задача 5. Требуется найти решение задачи Дирихле в бесконечном параллелепипеде

$$-\infty < x < \infty, < y < \mathrm{d}, r < z < t \tag{46}$$

для уравнения (1), где $\sqrt{\rho}$ —двумерная функция Гельмгольца, не зависящая от x.

Будем искать решение задачи 5 в классе функций, ограниченных на $x = \pm\infty$. Так как $\sqrt{\rho}$ не зависит от x, то v будет также функцией, ограниченной на $x = \pm\infty$.

Предполагаем, что $\mu \geqslant - \delta$, т.е. $\lambda \geqslant 0$. Тогда согласно [16], решение задачи 5 будет

$$u_{kj}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(l+1)(n+1)\,\varphi\,(y_k, z_j)}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{n} \sum_{s=1}^{l} \sin\frac{sj\pi}{l+1} \sin\frac{qk\pi}{n+1} \times$$

$$\frac{\nu_{kj}^{|i-p|}}{\mu_{kj} - \nu_{kj}} \left[h^2 \widehat{R}'_{qs}(x_p) - \gamma^2 \widehat{\omega}'_{qs}(x_p) - \delta^2 \widehat{g}'_{qs}(x_p)\right], \tag{47}$$

где все обозначения сохраняются, как в задаче 4.

Заметим, что аналогично можно решить задачу Дирихле в полубесконечном параллелепипеде.

Рассмотрим еще одну задачу Дирихле в бесконечной области, когда $\sqrt{\rho}$ —функция зависящая от всех трех переменных.

Задача 6. Требуется найти решение задачи Дирихле в бесконечном параллелепипеде (46) для уравнения (1), где δ — неотрицательная постоянная и

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \tag{48}$$

где точка (x_0, y_0, z_0) не принадлежит замкнутому бесконечному параллелепипеду (46). Как известно, в этом слугае $\sqrt{\rho}$ является гармонической функцией, не равной нулю в рассмотренной области. В силу (4) имеем

$$v(x, y, z) = \frac{u\,(x, y, z)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \tag{49}$$

Из (49) видно, что v является функцией, ограниченной на $x = \pm\infty$ Следовательно, решение задачи 6 имеет вид, как у решения задачи 5.

§ 4. Смешанная краевая задача.

В последнем параграфе рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения (1) в области D с границей Γ. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$ и граничные условия заданы так:

$$u\Big|_{\Gamma_0} = g_0 \ , \tag{50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = g_1 \ . \tag{51}$$

При помощи замены (4) уравнение (1) преобразовано к уравнению Гельмгольца (6), а граничные условия для новой функции v имеют вид

$$v\Big|_{\Gamma_0} = \widetilde{g_0}\ ,\ \widetilde{g_0} = \sqrt{\rho}\ g_0\ , \tag{52}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n} + \omega\, v\right]_{\Gamma_1} = \widetilde{g_1}\ ,\ \widetilde{g_1} = \sqrt{\rho}\ g_1\ , \tag{53}$$

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial n} \tag{53}$$

Вообще говоря, ω не является постоянной. Поэтому, в общем случае, при замене (4) условие Неймана для функции u превращается в третье условие для функции v с переменным коэффициентом. В некоторых случаях такую задачу можно решить методом суммарных представлений.

Задача 7. Пусть D — прямоугольник

$$a < x < b,\ c < y < d. \tag{54}$$

Требуется найти в D решение уравнения (29), где $\sqrt{\rho}$ — функция Гельмгольца с индексом 2μ, по граничным условиям

$$u\Big|_{y=c} = g_0(x)\ ,\ u\Big|_{y=d} = g_1(x) \tag{55}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = R_0(y)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b} R_1(y) \tag{56}$$

При помощи замены (4) мы приходим к следующей задаче

$$\Delta v - 2\lambda v = F, \tag{6}$$

$$v\Big|_{y=c} = \widetilde{g_0}(x),\ v\Big|_{y=d} = \widetilde{g_1}(x), \tag{57}$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\, v\right]_{x=a} = \widetilde{R_0}(y),\ \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\, v\right]_{x=b} = \widetilde{R_1}(y), \tag{58}$$

где

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\frac{\partial\sqrt{\rho}}{\partial x}, \tag{59}$$

$$\widetilde{g}_0(x) = g_0(x)\sqrt{\rho(x, c)}\ , \ \widetilde{g}_1(x) = g_1(x)\sqrt{\rho(x, d)},$$

$$\widetilde{R}_0(y) = R_0(y)\sqrt{\rho(a, y)},\ \widetilde{R}_1(y) = R_1(y)\sqrt{\rho(b, y)}. \tag{60}$$

Покроем область D равномерной сеткой

$$x_i = a + i\,h\ ;\ y_k = c + k\,h_1.$$

$$i = 0,1,\ldots,\ m+1\ ;\ k = 0,1,\ldots,\ n+1,$$

$$h = \frac{b-a}{m+1}\ ,\ h_1 = \frac{d-c}{n+1}\ ,\ \gamma = \frac{h}{h_1}\ .$$

Для любой дискретной функции $u\ (x_i\ , y_k)$ вводим обозначения

$$u_k\ (x_i) = u(x_i\ , y_k)$$

$$\vec{u}\,(x_i) = \{u_1\,(x_i),\ u_2\,(x_i),\ldots,\ u_n\ (x_i)\}$$

Задача (6), (57), (58) в дискретной постановке имеет вид

$$\Delta_h v - 2\lambda\ v = F\,(x_i\ , y_k)\ , \tag{61}$$

где Δ_h — конечно разностный двухмерный оператор Лапласа

$$v_0\,(x_i) = \widetilde{g}_0\,(x_i),\ v_{n+1}\,(x_i) = \widetilde{g}_1\,(x_i)\ ,\ i = 1,\ldots,\ m \tag{62}$$

$$v_k\,(x_1) + (h\ \omega_k\,(x_0) - 1)\ v_k\,(x_0) = h\,\widetilde{R}_0\,(y_k)$$

$$v_k\,(x_m) + (h\ \omega_k\ (x_{m+1}) - 1)\ v_k\,(x_{m+1}) = h\ \widetilde{R}_1\,(y_k) \tag{63}$$

$$k = 1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Согласно [1] решение задачи (61) (62) имеет вид

$$\vec{v}\,(x_i) = P\,\{\Phi\,(i)\,\vec{A} + \Psi\,(i)\,\vec{B}\ \sum_{p=1}^{i-1} G\,(i-p)\,P\,[h^2\,\vec{F}\,(x_p) - \gamma^2\,\vec{W}\ (x_p)]\}, \tag{64}$$

где $\vec{A} = \{A_1,\ A_2\ldots,\ A_n\},\ \vec{B} = \{B_1,\ldots,B_2,B_n\}$ — произвольные постоянные векторы, $\vec{W}$ — известный вектор n-го порядка

$$\vec{W}\ (x_i) = \{v_0\,(x_i),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ v_{n+1}\,(x_i)\}, \tag{65}$$

P — матрица, определяемая по формуле (42), $\Phi\,(i)$, $\Psi(i)$, $G(i)$ — диагональные матрицы n-го порядка с диагональными элементами $\varphi_k\ (x_i)$, $\psi_k\ (x_i)$, $G_k\ (i)$, которые в зависмости от величины η_k

$$\eta_k = 1 + \lambda h^2 + \gamma^2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k = 1,\ldots,\ n, \tag{66}$$

определяются по таблице 1, где нужно пропустить индекс j у всех величин. $2n$ постояных A_k, B_k в формуле (64) будут определяться в силу $2n$ соотношений в (63). После этого найдем решение $\vec{u}\ (x_i)$ через $\vec{v}\ (x_i)$ по формуле (4).

В заключение рассмотрим одну задачу фильтрации.

Задача 8. Требуется найти решение задачи напорной фильтрации об обтекании флютбета вида круга с радиусом r_0. Водоупор—окружность радиуса r_{n+1}. Среда пред полагается неоднородной изотропной с коэффициентом фильтрации $k(x, y)$, где

$$\sqrt{k(x, y)} = \sqrt{k_1} + \frac{\theta}{\pi}\left(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}\right), \tag{67}$$

k_1, k_2 — положительные постоянные, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, H — действующий на
ооружении напор.

В работах [8 — 9] удалось найти точное решение для такой задачи в случае беско-
ого слоя фильтрации. Здесь методом суммарных представлений решим задачу в
е конечного слоя фильтрации.

ак известно, эта задача фильтрации сводится к решению уравнения [17]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \tag{68}$$

ным условиям

$$h\Big|_{\theta=0} = \frac{H}{2}, \quad h\Big|_{\theta=\pi} = -\frac{H}{2}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{r=r_{n+1}} = 0, \tag{70}$$

метрический напор, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

учае область D представляет собой полукольцо

$$0 < \theta < \pi, \ r_0 < r < r_{n+1}, \tag{71}$$

яется положительной гармонической функцией в D.

омагательную функцию

$$v = \sqrt{k(x, y)}\, h. \tag{72}$$

— (70) преобразована к следующей задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{73}$$

$$v\Big|_{\theta=0} = \frac{H}{2}\sqrt{k_1}, \quad v\Big|_{\theta=\pi} = -\frac{H}{2}\sqrt{k_2}, \tag{74}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{r=r_0} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{r=r_{n+1}} = 0. \tag{75}$$

удем решать методом суммарных представлений.

Область D покроем равномерной сеткой

$$r_i = r_0 + ih, \theta_k = \theta_0 + kh_1,$$
$$i = 0, 1,..., m+1, k = 0, 1,.., n+1, \tag{76}$$

где

$$h = \frac{r_{n+1} - r_0}{n+1}, h_1 = \frac{\pi}{m+1}, \gamma = \frac{h}{h_1},$$
$$\theta_0 = 0, \quad \theta_{n+1} = \pi.$$

Обозначаем для любой дискретной функции $u(r_i, \theta_k)$

$$u_k(r_i) = u(r_i, \theta_k),$$
$$\vec{u}(r_i) = \{u_1(r_i), u_2(r_i), \ldots, u_n(r_i)\}.$$

В образованной сеточной области D^*, соответствующей области D, будем искать решение конечно-разностного уравнения

$$\Delta_h v = 0 \tag{77}$$

по условиям

$$v_0(r_i) = \frac{H}{2}\sqrt[4]{k_1}, \quad v_{n+1}(r_i) = -\frac{H}{2}\sqrt{k_2}, \tag{78}$$
$$(i = 1, 2,..., m)$$
$$v_k(r_1) - v_k(r_0) = 0, \qquad v_k(r_{m+1}) - v_k(r_m) = 0. \tag{79}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Согласно работе [18] решение задачи (77) — (78) принимает вид

$$\vec{v}(x_i) = P\left\{\mu^i \vec{A} + v^i \vec{B} - \gamma^2 \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\mu^{i-p} v^{i-p}}{\mu - v} P \vec{W}(r_p)\right\}, \tag{80}$$

где $\vec{A} = \{A_1, A_2,..., A_n\}$, $\vec{B} = \{B_1, B_2,..., B_n\}$ — произвольные постоянные векторы, $\vec{W}(r_p)$ — известный вектор n-го порядка

$$\vec{W}(r_p) = \{v_0(r_p), 0,...,0, v_{n+1}(r_p)\}, \tag{81}$$

P — матрица, имеющая вид (42), μ, v — диагональные матрицы n-го порядка с диагональными элементами μ_k, v_k, определяемые следующими соотношениями:

$$\mu_k = v_k^{-1} = \eta_k + \sqrt[4]{\eta_k^2 - 1},$$

$$\eta_k = 1 + \gamma^2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right), k = 1, 2,.., n.$$

Из условий (79) следует

$$(\eta_k - 1)A_k + (v_k - 1)B_k = 0, \tag{82}$$

$$(\mu_k^{m+1} - \mu_k^m) A_k + (\nu_k^{m+1} - \nu_k^m) B_k = V_k ,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (82')$$

где

$$\vec{V} = \{ V_k \}_{k=1}^{n} = \vec{\Omega}(m+1) - \vec{\Omega}(m),$$

$$\vec{\Omega}(i) = -\gamma^2 \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\mu^{i-p} - \nu^{i-p}}{\mu - \nu} P \vec{W}(r_p). \qquad (82'')$$

Напомним, что сумма в (82'') обращается в нуль при $i = 0, 1$ [1].

Из (82) определим

$$A_k = -\frac{(\nu_k - 1) V_k}{2(\eta_k - 1)(\mu_k - \nu_k)}, \quad B_k = \frac{(\mu_k - 1) V_k}{2(\eta_k - 1)(\mu_k - \nu_k)}. \qquad (83)$$

Подставляя (83) в (80), получаем решение задачи (77) — (79), отсюда из (4) следует решение задачи фильтрации

$$h_k(r_i) = \frac{1}{\sqrt{k_1} + \frac{\theta_k}{\pi}(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1})} \sum_{j=1}^{n} \sin\frac{k^j \pi}{n+1} \left\{ \frac{\nu_j^i(\mu_j - 1) - \mu_j^i(\nu_j - 1)}{2(\eta_j - 2)(\mu_j - \nu_j)} V_j - \right.$$
$$\left. - \frac{H\gamma^2}{2} \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\mu_j^{i-1} - \nu_i^{i-p}}{\mu_j - \nu_j} \left[\sqrt{k_1} \sin\frac{j\pi}{n+1} - \sqrt{k_2} \sin\frac{jn\pi}{n+1} \right] \right\}. \qquad (84)$$

Задача решена полностью.

Заметим, что такой методикой можно решить задачу 8 в случае, когда граница имеет более сложный вид ; а также в случае бесконечного слоя фильтрации. Можно решить также такую задагу фильтрации и задачу Дирихле для уравнения (68), где $\sqrt{k}$ — любая гармоническая функция в полукольце (71).

Поступуло в редакцию 15-11-1976г.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Положий Г. Н. *Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента.* Изд. КГУ, Киев, 1962.

[2]. Ляшко И. И., Засько Ю. Н. *Численное решение краевых задач для уравнения $div(\lambda\, grad\, u) = F$.* В кн. Линейные и нелинейные краевые задачи. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.

[3]. Ляшко И.И., Великоиваненко И. М. *Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации.* Изд. « Наукова думка», Киев, 1973.

[4]. Ляшко И.И., Засько Ю.Н. *К решению краевых задач для уравнений с циклическими коэффициентами.* Выч. и прик. мат. Изд. КГУ, вып. 27, К., 1975.

[5]. Ляшко И. И., Засько Ю. Н. *К численно-аналитическому решению пространственных задач для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами.* Выч. и прик. мат. Изд. КГУ, вып. 19, К., 1973.

[6]. Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В., Барышев А.И. *Об одной методике фильтрационных расчетов.* Препринт 74 — 39, Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1974.

[7]. Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В. *Решение задачи под заглубленным зашпунтованным флютбетом в неоднородной изотропной среде при криволинейном водоупоре,* Выч. и прик. матем. Изд. КГУ, вып. 22, К., 1973.

[8]. Тумашев Г.Г., Ильинский Н.Б. *Об одном приложении сингулярного интегро-дифференциального уравнения в теории фильтрации.* Изв. вузов, математика, 1967, 7.

[9]. Ильинский Н.Б. *О решении одной краевой задачи фильтрации в неоднородной среде.* Выч. и прик. матем. Изд. КГУ, вып. II. Киев, 1970.

[10]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* Изд. ГИТТ Л., М., 1966.

[11]. Положий Г.Н. *Уравнения математической физики,* Изд. «Высшая школа», Москва, 1964.

[12]. Мусхелишвили И.Н. *Сингулярные интегральные уравнения.* Изд. «Наука», Москва, 1968.

[13]. Векуа И.Н. *Новые методы решения уравнений эллиптическото типа,* М.1948.

[14]. Hencіri P. *A survey of I.N Vekua's theory of elliptic partial differential equalion with analitic coefficients* ZAMP, v. 8, 3, 1957.

[15]. Белова М.М. *О решении задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге.* Выч. и прик. мат., Изд. КГУ, вып. 21, 1973.

[16]. Глущенко А.А., *Некоторые пространственные задачи теории фильтрации.* Изд. КГУ,. Киев, 1970.

[17]. Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод.* Изд-во ГИТТХ, М., 1952.

[18]. Положий Г.Н., Скоробогатько А.А. *Об одном классе формул суммарных представлений.* Выч. мат. Изд. КГУ, вып. ·I, Киев, 1965.