*Acta Math. Vietnam., 1976, Tom 1, N° 2, pp 75 - 88*

# STRUCTURE D'ESPACE PROJECTIF DE L'ENSEMBLE DES ESPACES RIEMANNIENS À ABSOLU MOBILE ADMETTANT UNE BASE DONNÉE

NGUYỄN CẢNH TOÀN
*Institut Pédagogique de Hanoi*

Dans [1] et [2] s'est posé le problème suivant : dans l'espace projectif à n dimensions $P_n$, on se donne une hyperquadrique mobile :

$$(x_o, x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} q_{oo} & q_{o1} & \dots & q_{on} \\ q_{1o} & q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & . \\ q_{no} & q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

la matrice $Q = (q_{ij})$ étant fonction de chaque point $a$ $(a_o, \dots, a_n)$ de l'espace :

$$q_{ij} = q_{ij}(a_o, a_1, \dots, a_n).$$

Le problème consiste à chercher les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut imposer à la matrice $Q(a)$, fonction du point $a$, pour que la métrique suivante transforme l'espace $P_n$ en un espace riemannien (la terminologie «riemannien» est entendue dans un sens englobant à la fois les trois cas : le $ds^2$ est non dégénéré et défini positif — strictement riemannien — , le $ds^2$ est non dégénéré mais non défini positif — pseudo-riemannien — , le $ds^2$ est dégénéré — semi-riemannien —).
L'équation (1) étant écrite sous la forme :

$$xQ(a)x = 0,$$

les conditions nécessaires et suffisantes qu'il faut imposer à $Q(a)$ sont les suivantes [2] :

$$
(\mathrm{I}) \begin{cases} Q(a) = Q^T(a) & (\forall\ a) \\ bQ(a)b = aQ(b)a & (\forall\ a,\ b) \\ aQ(a)b = K(aPa)\ (aPb) & (\forall\ a,\ b) \end{cases}
$$

où $P$ est une matrice carrée symétrique d'ordre $n + 1$, indépendante du point $a$, que l'on peut se donner arbitrairement et $K$, un coefficient réel différent de zéro.

En résolvant le système (I) où $Q(a)$ est l'inconnue, on est arrivé aux solutions suivantes [2] :

$$
Q(a) = (aPa)P \qquad (\alpha)
$$

le $a$ à gauche (dans le second membre) étant la matrice-ligne $(a_o, a_1, \ldots, a_n)$ et le $a$ à droite étant la matrice colonne

$$
\begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}
$$

$$
Q(a) = PAP \qquad (\beta)
$$

où $A$ est la matrice symétrique :

$$
\begin{pmatrix} a_o^2 & a_o a_1 & \cdots & a_o a_n \\ a_1 a_o & a_1^2 & \cdots & a_1 a_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n a_o & a_n a_1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} = a.a
$$

$$
Q(a) = \frac{RAS + SAR + S^T AR^T + R^T AS^T}{4} \qquad (\gamma)
$$

$$
Q(a) = \frac{R^T AS + SAR^T + S^T AR + RAS^T}{4} \qquad (\delta)
$$

où $R$ et $S$ sont des matrices carrées quelconques d'ordre $n + 1$ telles que :

$$
R + R^T = S + S^T = 2P
$$

Toute combinaison linéaire des solutions $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$ dont la somme des coefficients est différente de zéro est aussi une solution du système.

En outre, si l'on ajoute à l'une des solutions précédentes une combinaison linéaire des matrices ayant l'une des formes suivantes :

$$\frac{1}{4}\left( UAV + VAU + V^T AU^T + U^T AV^T \right) \tag{ε}$$

$$\frac{1}{4}\left( U^T AV + VAU^T + V^T AU + UAV^T \right) \tag{η}$$

où l'une au moins des deux matrices $U$, $V$ est une matrice antisymétrique on obtiendra encore une solution du système (I).

Le but du présent article est d'étudier plus profondément la structure des solutions du système (I).

Faisons d'abord la remarque suivante :

1) La solution (δ) ne diffère de la solution (Y) que par la forme: en effet, il n'y a aucune raison pour distinguer les deux matrices $R$ et $R^T$ dont la demi-somme donne la matrice $P$. Si nous désignons l'une d'elles (n'importe laquelle) par $R$, alors l'autre sera désignée par $R^T$. Donc la solution (Y) englobe la solution (δ). Pour la même raison, la solution (η) est déjà contenue dans la solution (ε).

2) La matrice (ε) peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2}( UAV' + V'AU ) \tag{ε'}$$

où $U$ et $V'$ sont toutes antisymétriques .
En effet, supposons que $U$ soit antisymétrique ; la matrice (ε) peut s'écrire :

$$\frac{UA( V - V^T ) + (V - V^T )AU}{4}$$

Mais $V - V^T$ est une matrice antisymétrique. Désignons la par $2V'$. Alors nous avons :

$$\frac{UAV' + V'AU}{2}$$

$$\text{Mais} \qquad UAV' + V'AU = \frac{1}{2}\left[ (U + V')A(U + V') - (U - V')A(U - V') \right]$$

$$= \frac{1}{2}(U_1 AU_1 - U_2 AU_2)$$

où $$U_1 = U + V', \qquad U_2 = U - V'.$$

Donc, pour avoir la solution générale du système (I) il suffit de prendre une combinaison linéaire (dont la somme des coefficients est différente de zéro) de la matrice (α), de la matrice (β) et des matrices de la forme (Y), plus une combinaison linéaire quelconque des matrices de la forme $UAU$. Désormais, nous enlevons la restriction «dont la somme des coefficients est différente de zéro» en convenant d'adopter le cas où cette somme est nulle comme une solution correspondant au cas où $K = 0$ c'est à dire en adoptant aussi la valeur zéro pour $K$).

Parce que $PAP$ et $(aPa)\,P$ sont des solutions, alors toute matrice de la forme $P_i\,AP_i - (aP_i\,a)\,P_i$ et toute combinaison linéaire des matrices de cette forme est une solution du système (I), pour le cas où $K = 0$. On pourrait penser donc qu'en ajoutant une expression de la forme $\sum_{\delta=1}^{m} \gamma_\delta \left[ P_\delta\,AP_\delta - (aP_\delta\,a)\;P_\delta \right]$ à toute solution du système (I), on obtient une nouvelle solution et que dans l'expression de la solution générale, doit figurer une telle combinaison linéaire. Il n'en est pas ainsi comme on le verra dans la suite. Portons maintenant notre attention sur la matrice (Y) :

Posons : $R = P + \lambda\,U$ ($\lambda$ = coefficient réel quelconque)

alors $R^T = P^T + \lambda\,U^T = P + \lambda\,U^T$

et $R + R^T = 2\,P + \lambda\,(U + U^T)$

ce qui exige $U = -\,U^T$.

De même, nous pouvons poser :

$$S = P + \lambda'\,V' \qquad \text{avec} \quad V' = -\,V'^T.$$

Cela étant, nous avons

$$RAS = (P + \lambda\,U)\,A\,(P + \lambda'\,V') = PAP + \lambda\,UAP + \lambda'\,PAV' + \lambda\lambda'\,UAV'$$

$$SAR = (P + \lambda'\,V')\,A\,(P + \lambda\,U) = PAP + \lambda' V'AP + \lambda\,PAU + \lambda\lambda'\,V'AU$$

$$S^TAR^T = (P - \lambda' V')\,A\,(P - \lambda U) = PAP - \lambda' V'AP - \lambda PAU + \lambda\lambda' V'AU$$

$$R^TAS^T = (P - \lambda U)\,A\,(P - \lambda' V') = PAP - \lambda UAP - \lambda' PAV' + \lambda\lambda' UAV'$$

La solution (Y) s'écrira alors :

$$Q(a) = PAP + \lambda\lambda'\,\frac{UAV' + V'AU}{2}.$$

Ainsi la solution (Y) s'obtient de la solution ($\beta$) plus une matrice de la forme ($\varepsilon'$) multipliée par un coefficient arbitraire. Comme $PAP$ est une solution, $UAV' + V'AU$ sera une solution du système (I) où $K = 0$. Une combinaison linéaire quelconque des différentes matrices de la forme $UAV' + V'AU$ et par suite de la forme $UAU$ sera aussi une solution de ce système (où $K = 0$).

Donc, pour avoir la solution générale du système (I), il suffit de prendre une combinaison linéaire des matrices ($\alpha$) et ($\beta$), et des matrices de la forme $UAU$.

Occupons-nous maitenant des matrices de la forme $UAU$. Nous avons :

$$U = \sum^{n} u_{ij}\,E_{ij} \quad \text{vec} \quad u_{ij} = -\,u_{ji}\,,$$

$E_{ij}$ étant la matrice dont tous les éléments sont zéro sauf l'élément situé sur la $i$-ième ligne et sur la $j$-ième colonne qui est égal à 1.

Alors :

$$UAU = \left(\sum u_{ij}\ E_{ij}\right) A \left(\sum u_{kl}\ \ E_{kl}\right) \quad = \sum_{i,j,k,l=o}^{n} u_{ij}\ u_{kl}\, E_{ij}\ AE_{kl}$$

$$E_{ij}AE_{kl} = \begin{array}{c} i\text{-ième} \\ \text{ligne} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ j\text{-ième} \\ \text{colonne} \end{array} \begin{pmatrix} a_o^2 & a_o a_1 \ldots a_o a_n \\ a_1 a_o & a_1^2 \quad \ldots a_1 a_n \\ \cdots & \cdots \cdots \\ a_n a_o & a_n a_1 \ldots a_n^2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ l\text{-ième} \\ \text{colonne} \end{array} \begin{array}{c} k\text{-ième} \\ \text{ligne} \end{array}$$

$$= \quad \begin{array}{c} i\text{-ième} \\ \text{ligne} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & a_j a_k & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ l\text{-ième} \\ \text{colome} \end{array}$$

On peut aussi écrire :

$$UAU = \sum_{i,j,k,l=o}^{n} u_{ji}\, u_{lk}\, E_{lk}\, A\, E_{ji} = \sum_{i,j,k,l=o}^{n} u_{ij}\ u_{kl}\ (E_{ij}\ \ A\, E_{kl}\,)^{T}$$

Donc :

$$2\ UAU = \sum_{i,j,k,l=o}^{n} u_{ij}\ u_{kl}\ F_{ij,\,kl}$$

où
$$F_{ij,\,kl} = (E_{ij}\ \ A\, E_{kl}) \ + \ (E_{ij}\ \ A\, E_{kl}\,)^{T}$$

$$F_{ij\,,kl} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdot & \cdots & a_j a_k & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & a_j a_k & \cdots & \cdot & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} l\text{-ième} & i\text{-ième} \\ \text{colonne} & \text{colonne} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} l\text{-ième ligne} \\ \\ \\ i\text{-ième ligne} \end{array}$$

La matrice $F_{ij,kl}$ possède les propriétés suivantes :

1) $F_{ij,kl} = F^T_{ij,kl}$

2) $F_{ij,kl}$ ne change pas si l'on permute les deux indices extrêmes ou les deux indices moyens (cela se voit immédiatement sur la forme de la matrice) :

$$F_{ij,kl} = F_{lj,ki} = F_{ik,jl}$$

3) $F_{ij,kl}$ ne change pas quand on renverse l'ordre des indices.

En effet, d'après 2) nous avons :

$$F_{ij,kl} = F_{ik,jl} = F_{lk,ji} .$$

Ainsi, les matrices $F_{ij,kl}$ ne sont pas toutes distinctes. Si l'on choisit l'une d'elles, alors il y aura trois autres qui lui sont égales :

$$F_{ij,kl} = F_{lj,ki} = F_{ik,jl} = F_{lk,ji} .$$

Parce que $u_{ii} = u_{kk} = 0$, alors dans l'expression de $UAU$ il manque les matrices de la forme $F_{ii,kl}$, $F_{ij,kk}$, c'est à dire que dans cette expression, il y a seulement les matrices $F_{ij,kl}$ avec $i \neq j$ et $k \neq l$.

Remarquons que le coefficient $u_{ij}\, u_{kl}$ devant $F_{ij,kl}$ est égal au coefficient $u_{ji}\, u_{lk} = (-u_{ij})\,(-u_{kl})$ devant $F_{ji,lk}$ et dans l'expression de $UAU$, nous avons des termes de la forme $u_{ij}\, u_{kl}\; T_{ij,kl}$ où

$$T_{ij,kl} = F_{ij,kl} + F_{ji,lk} = F_{ij,kl} + F_{kl,ij} .$$

Il est aisé de voir que les matrices $T_{ij,kl}$ possèdent les propriétés suivantes :

1) $T_{ij,kl} = (T_{ij,kl})^T$

2) $T_{ij,kl} = T_{ji,lk} = T_{kl,ij}$

3) $T_{ij,kl} = T_{ik,jl} = T_{lj,ki}$

Ainsi, les matrices $T_{ij,kl}$ ne sont pas toutes distinctes. Si l'on choisit l'une d'elles, alors il y aura sept autres qui lui sont égales :

$$T_{ij,kl} = T_{ik,jl} = T_{ji,lk} = T_{jl,ik} = T_{kl,ij} = T_{ki,lj} = T_{lk,ji} = T_{lj,ki}$$

Remarquons qu'il a deux groupes d'indices : le groupe $j$, $k$ et le groupe $i$, $l$ qui jouent à tour de rôle le rôle des indices moyens et le rôle des indices extrêmes. Dans chaque groupe, chaque place est aussi à tour de rôle occupée par chaque indice du groupe. Si l'on considère l'ensemble de tous les quatre indices, on verra que chaque indice occupe chaque place deux fois.

Parce qu'il y a en tout $4\,! = 24$ permutations des quatre lettres, alors si i, j, $k$, $l$ sont donnés à l'ordre près et deux à deux distincts il n'y aura que $\frac{24}{8} = 3$ matrices $T_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ différentes (où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ pris dans cet ordre, est une permutation des indices $i, j, k, l$). Ce sont

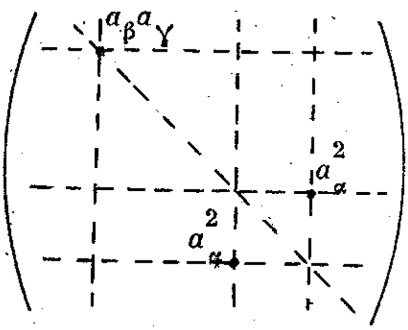
$$T_{ij,kl}, \quad T_{jk,il} \quad \text{et} \quad T_{ki,jl}.$$

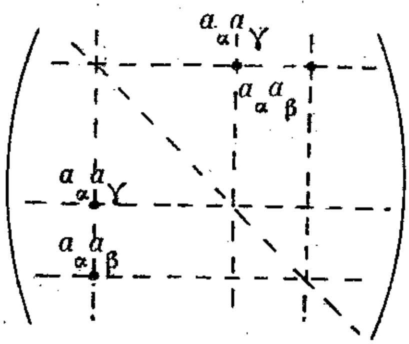
On obtient ces trois matrices en fixant $l$ à la dernière place et en prenant les trois permutations circulaires $i\,j\,k$, $j\,k\,i$, $k\,i\,j$. Ces trois matrices différentes sont les suivantes :

$$T_{ij,kl} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & & a_j a_k \\ & & a_i a_l & \\ & a_i a_l & & \\ a_j a_k & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & j & k & l \end{matrix} & \end{array} \qquad T_{jk,il} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & a_j a_l & \\ & & & a_i a_k \\ a_j a_l & & & \\ & a_i a_k & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & j & k & l \end{matrix} & \end{array}$$

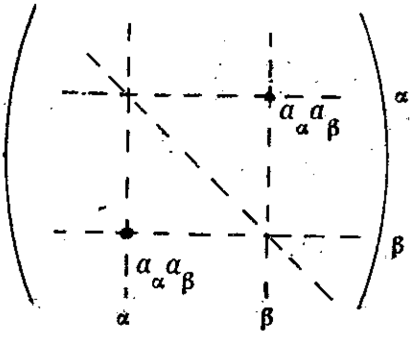
$$T_{kl,jl} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & a_k a_l & & \\ a_k a_l & & & \\ & & & a_i a_j \\ & & a_i a_j & \end{pmatrix} & \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ l \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & j & k & l \end{matrix} & \end{array}$$

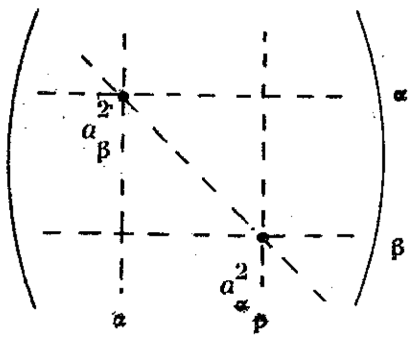
les éléments non écrits dans ces trois matrices sont tous égaux à zéro. Si deux indices sont égaux, alors deux de ces deux matrices seront égales. En effet, supposons $i = j$. Alors $T_{jj,kl} = T_{jk,jl}$. Remarquons que le coefficient devant $T_{jj,kl}$ est égal à zéro ($u_{jj}u_{kl} = 0$), de sorte que si $j, k, l$ sont donnés et deux à deux distincts, nous avons dans l'expression de $UAU$ deux matrices distinctes $T_{jk,jl}$ et $T_{kj,jl}$. Nous arriverons à la même conclusion si deux quelconques des quatre indices sont égaux. Donc : si deux indices quelconques prennent une même valeur $\alpha$ et les deux autres les valeurs $\beta$, $\gamma$ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$) nous aurons seulement deux matrices différentes $T_{\beta\alpha,\alpha\gamma}$ et $T_{\alpha\beta,\alpha\gamma}$ :

$T_{\beta\alpha,\alpha\gamma} =$ 


$T_{\alpha\beta,\alpha\gamma} =$ 


Si les quatres indices se répartissent en deux paires d'indic's égaux (par exemple deux indices sont égaux à $\alpha$ et les deux autres à $\beta$), alors nous aurons deux matrices différentes $T_{\alpha\beta,\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ :

$T_{\alpha\beta,\alpha\beta} =$ 


$T_{\alpha\beta,\beta\alpha} =$ 


Si trois indices sont égaux à un même nombre $\alpha$ et le quatrième à $\beta$, alors $T_{\alpha\alpha,\alpha\beta}$, $T_{\alpha\alpha,\beta\alpha}$, $T_{\alpha\beta,\alpha\alpha}$, $T_{\beta\alpha,\alpha\alpha}$ manquent dans l'expression de $UAU$ parce que leurs coefficients qui contiennent $u_{\alpha\alpha}$ en facteur sont égaux à zéro.

Si $i, j, k, l$ prennent indépendamment les uns les autres les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, n$ telles que deux indices différents prennent deux valeurs différentes, alors nous aurons en tout $3\,C_{n+1}^{4}$ matrices $T_{ij,kl}$ différentes. Si deux des indices $i, j, k, l$ prennent une même valeur $\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$) et les deux autres deux valeurs $\beta, \gamma$ distinctes entre elles et distinctes de $\alpha$ ($\beta, \gamma = 0, 1, 2 \dots, n$) alors nous aurons encore $2C^3_{n+1}$ matrices $T_{ij,kl}$ différentes. Si deux de ces indices $i, j, k, l$ prennent une même valeur $\alpha$ et les deux autres une même valeur $\beta \neq \alpha$, alors nous aurons encore $2C^2_{n+1}$ matrices $T_{ij,kl}$ différentes. Donc, en général $UAU$ est une combinaison linéaire de $N$ matrices $T_{ij\,,\,kl}$ differentes, $N$ étant la somme :

$$N = 3C^4_{n+1} + 2\left(C^3_{n+1} + C^2_{n+1}\right) = 3C^4_{n+1} + 2\ C^3_{n+2}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(3n^2 - n + 22)}{24}.$$

Démontrons que ces $N$ matrices sont linéairement indépendantes. En effet, supposons qu'il existe une combinaison linéaire de ces $N$ matrices donnant une matrice nulle.

Numérotons d'une certaine façon ces N matrices et désignons-les par $T^1, T^2, \dots\dots, T^N$ ; soit $T = \sum_{s=1}^{N} p_s T^s$ la combinaison linéaire précédente. Pour que $T$ soit identiquement nulle, il faut et il suffit que chacun de ses éléments soit identiquement nul. Désignons par $T_{\alpha\beta}$ et $T^s_{\alpha\beta}$ respectivement l'élément situé sur la $\alpha$-ième ligne et sur la $\beta$-ième colonne de $T$ et de $T^s$. Nous avons :

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{N} p_s T^s_{\alpha\beta} = 0\,.$$

En étudiant la forme des N matrices $T^s$, on voit que dans le cas où $\alpha \neq \beta$ , $T^s_{\alpha\beta}$ est soit zéro, soit un produit ayant l'une des formes suivantes :

1) $a_p a_q$ où la paire d'indices $p, q$ est une combinaison deux à deux des $n-1$ nombres entiers dans la suite $0, 1, \dots, n$, où $\alpha$ et $\beta$ sont exclus. Cette forme a lieu dans le cas des matrices $T^s$ avec quatre indices deux à deux différents. Comme il y a en tout $C^2_{n-1}$ combinaisons deux à deux de ces $n-1$ nombres, nous avons $C^2_{n-1}$ éléments ayant la forme $a_p a_q$ ($p \neq q$ ; $p, q \neq \alpha$ ; $p, q \neq \beta$).

2) $a^2_p$ ou $a_p a_\alpha$ avec $p \neq \alpha$ , $p \neq \beta$. Cette forme se rencontre dans le cas des matrices $T^s$ avec quatre indices dont deux sont égaux soit à $p$ (on obtient

alors $a_p^2$), soit à $\alpha$ (on obtient alors $a_p a_\alpha$). Comme il y a $n-1$ nombres entiers différents de $\alpha$ et de $\beta$ dans la suite $0, 1, \ldots, n$, on a $n-1$ éléments ayant la forme $a_p^2$ ou $a_p a_\alpha$.

3) $a_\alpha a_\beta$ ; ce cas se rencontre dans le cas de la matrice $T^s$ avec le premier et le troisième indices égaux à $\alpha$, le second et le quatrième indices égaux à $\beta$.

Ainsi parmi les $N$ éléments $T^s$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ il y a seulement $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ éléments qui sont différents de zéro ; ils sont aussi différents entre eux ; pour que $T_{\alpha\beta} \equiv 0$, il faut et il suffit que les coefficients $p_s$ correspondant à ces $\frac{n^2 - n + 2}{2}$ éléments soient tous nuls. Chaque $T^s$ qui n'a pas la forme $T_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ contient au moins un élément non nul $T^s_{\gamma\delta}$ non situé sur la diagonale principale $(\gamma \neq \delta)$ et ayant la forme $a_m a_n$ ($m$ peut être égal à $n$). Dans la somme $T_{\gamma\delta}$ qui est identiquement nulle, cet élément doit donc participer avec un coefficient nul ; mais ce coefficient est justement celui de la matrice $T^s$ considérée. Donc chaque $T^s$ qui n'a pas la forme $T_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ a un coefficient nul.

Enfin, si l'on écrit que les éléments sur la diagonale principale de $T$ sont tous identiquement nuls, on verra que les coefficients des matrices $T^s$ ayant la forme $T_{\alpha\beta,\beta\alpha}$ sont aussi nuls. Donc, pour que $T$ soit une matrice nulle, il faut et il suffit que tous les $p_s$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ soient nuls, ce qui démontre l'indépendance linéaire des $T^s$.

Montrons maintenant que $PAP$ est aussi une combinaison linéaire des $T^s$. Le raisonnement est tout à fait analogue au cas de $UAU$. Passons maintenant à $(aPa)P$ :

$$
\begin{aligned}
(aPa)\,P &= \left[a\left(\sum p_{kl}E_{kl}\right)a\right]\left(\sum p_{ij}E_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum p_{ij}p_{kl}\left(aE_{kl}aE_{ij} + aE_{lk}aE_{ji}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum p_{ij}p_{kl}\,F_{ik,lj}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4} \sum p_{ij} p_{kl} \left( F_{ik,lj} + F_{ki,jl} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \sum p_{ij} p_{kl} T_{ki,jl}.$$

**Remarque.** Si $UAU$ est une combinaison linéaire des $\overset{s}{T}$, alors toute combinaison linéaire des matrices de la forme $UAU$ est aussi une combinaison linéaire des $\overset{s}{T}$. Dans une telle combinaison linéaire des $\overset{s}{T}$, les coefficients ne sont pas indépendants. Entre ces coefficients, il y a toujours des relations linéaires.

En effet, supposons que :

$$\sum_{\delta=1}^{h} t_{\delta} \, ( \overset{\delta}{U} A \overset{\delta}{U} ) = \sum_{s=1}^{N} r_s \overset{s}{T} \quad (h = \text{nombre entier positif quelconque} \geqslant 1)$$

D'après les propriétés des matrices $T_{ij\,,\,kl}$, nous pouvons écrire (en remarquant par exemple que $\overset{\delta}{u}_{ij} \overset{\delta}{u}_{kl} = \overset{\delta}{u}_{ji} \overset{\delta}{u}_{lk}$ etc...)

$$\begin{aligned}
2\, ( \overset{\delta}{U} A \overset{\delta}{U} ) = & \sum \left( \overset{\delta}{u}_{ij} \overset{\delta}{u}_{kl} + \overset{\delta}{u}_{ik} \overset{\delta}{u}_{jl} \right) T_{ij\,,\,kl} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{jk} \overset{\delta}{u}_{il} + \overset{\delta}{u}_{ji} \overset{\delta}{u}_{kl} \right) T_{jk\,,\,il} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{ki} \overset{\delta}{u}_{jl} + \overset{\delta}{u}_{kj} \overset{\delta}{u}_{il} \right) T_{ki\,,\,jl} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{\alpha\beta} \overset{\delta}{u}_{\alpha\gamma} \right) T_{\alpha\beta,\alpha\gamma} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{\beta\alpha} \overset{\delta}{u}_{\alpha\gamma} \right) T_{\beta\alpha,\alpha\gamma} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{\alpha\beta} \right)^2 T_{\alpha\beta,\,\alpha\beta} \\
& + \sum \left( \overset{\delta}{u}_{\beta\alpha} \right)^2 T_{\beta\alpha,\,\alpha\beta} \, ,
\end{aligned}$$

les trois premières sommes étant étendues à toutes les combinaisons quatre à quatre des nombres entiers de 0 à $n+1$, la quatrième et la cinquième sommes à toutes les combinaisons trois à trois des nombres entiers de 0 à $n+1$, et les deux dernières sommes à toutes les combinaisons deux à deux des nombres entiers de 0 à $n+1$.

Nous remarquons que pour chaque combinaison $(ijkl)$ donnée, la somme des coefficients de $T_{ij,kl}$, de $T_{jk,il}$ et de $T_{ki,jl}$ est nulle (en utilisant la propriété d'être antisymétrique de U). Comme il y a en tout $C_{n+1}^{4}$ combinaisons $(ijkl)$, nous avons en tout $C_{n+1}^{4}$ sommes nulles. Cela a lieu pour n'importe quelle valeur de $\delta$ de 1 à $h$, ce qui donne $C_{n+1}^{4}$ relations linéaires parmi les $r_s$. De même, pour chaque combinaison $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ donnée, la somme des coefficients de $T_{\alpha\beta,\alpha\gamma}$ et de $T_{\beta\alpha,\alpha\gamma}$ est aussi nulle, ce qui donne lieu encore à $C^3_{n+1}$ relations linéaires parmi les $r_s$. Enfin pour chaque combinaison $(\alpha\beta)$ donnée, la somme des coefficients de $T_{\alpha\beta,\alpha\beta}$ et de $T_{\beta\alpha,\alpha\beta}$ est aussi nulle, ce qui donne encore $C^2_{n+1}$ relations linéaires parmi les $r_s$. Nous avons donc en tout $C^4_{n+1} + C^3_{n+1} + C^2_{n+1}$ relations linéaires des coefficients $r_s$ dans l'expression $\sum_{s=1}^{N} r_s T^s$. Cela entraine que $\sum_{\delta=1}^{h} t_\delta\,(U^\delta A U^\delta)$ peut s'exprimer linéairement seulement au moyen des

$$M = 2\;C^4_{n+1} + C^3_{n+1} + C^2_{n+1} = 2\;C^4_{n+1} + C^3_{n+2} =$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(n^2 - n + 6)}{12}$$

matrices $R^t$ $(t = 1, 2, \ldots, M)$ suivantes :

les $2\,C^4_{n+1}$ matrices $R_{ij,kl} = T_{ij,kl} - T_{ki,jl}$, $R_{jk,il} = T_{jk,il} - T_{ki,jl}$,

les $C^3_{n+1}$ matrices $R_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta,\alpha\gamma} - T_{\beta\alpha,\alpha\gamma}$,

et les $C^2_{n+1}$ matrices $R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta,\alpha\beta} - T_{\beta\alpha,\alpha\beta}$.

$$R_{ij,kl} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} & -a_k a_l & & a_j a_k \\ -a_k a_l & & a_i a_l & \\ & a_i a_l & & -a_i a_j \\ a_j a_k & & -a_i a_j & \end{array}\right) \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ l \end{array} \\ \begin{array}{cccc} i & j & k & l \end{array} \end{array}$$

$$K_{jk,il} = \left(\begin{array}{cccc} & -a_k a_l & a_j a_l & \\ -a_k a_l & & & a_i a_k \\ a_j a_l & & & a_i a_j \\ & a_i a_k & & \end{array}\right) \begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ l \end{array}$$

$$R_{\alpha\gamma\beta} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} -a_\beta a_\gamma & a_\alpha a_\gamma & a_\alpha a_\beta \\ a_\alpha a_\gamma & & a_\alpha^2 \\ a_\alpha a_\beta & -a_\alpha^2 & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \quad & \beta \quad & \gamma \end{matrix} & \end{array}$$

$$R_{\alpha\beta} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} -a_\beta^2 & a_\alpha a_\beta \\ a_\alpha a_\beta & -a_\alpha^2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \quad & \beta \end{matrix} & \end{array}$$

les éléments non écrits de toutes ces matrices étant tous nuls. Ces $M$ matrices sont aussi linéairement indépendantes. Cela se voit clairement sur la forme de ces $M$ matrices et en utilisant l'indépendance linéaire des $N$ matrices $T^s$.

Ainsi toute combinaison linéaire des matrices de la forme $UAU$ est une combinaison linéaire des $M$ matrices $R^t$ linéairement indépendantes. Réciproquement, toute combinaison linéaire des $M$ matrices $R^t$ précédentes est une certaine combinaison linéaire des matrices de la forme $UAU$. En effet, en égalant les coefficients correspondants dans les deux combinaisons linéaires, on obtient un système de $M$ équations avec un nombre d'inconnues aussi grand que l'on veut (parce que dans la combinaison linéaire cherchée des matrices de la forme $UAU$, le nombre de termes peut être pris aussi grand que l'on veut). Ainsi ce système de $M$ équations a toujours des solutions.

Remarquons que :

$$\begin{aligned} 2\Big[(aPa)P - PAP\Big] = & \sum (p_{ij}p_{kl} + p_{ik}p_{jl})\,(T_{ki,jl} - T_{ij,kl}) \\ & + \sum (p_{jk}p_{il} + p_{ji}p_{kl})\,(T_{ij,kl} - T_{jk,il}) \\ & + \sum (p_{ki}p_{jl} + p_{kj}p_{il})\,(T_{jk,il} - T_{ki,jl}) \\ & + \sum p_{\alpha\beta}p_{\alpha\gamma}\,(T_{\alpha\alpha,\beta\gamma} - T_{\alpha\beta,\alpha\gamma}) \\ & + \sum p_{\beta\alpha}p_{\alpha\gamma}\,(T_{\alpha\beta,\alpha\gamma} - T_{\beta\alpha,\alpha\gamma}) \end{aligned}$$

$$+ \sum p_{\alpha\beta}^2 \; (T_{\alpha\alpha,\beta\beta} - T_{\alpha\beta,\alpha\beta})$$

$$+ \sum p_{\alpha\beta}^2 \; (T_{\alpha\beta,\alpha\beta} - T_{\beta\alpha,\alpha\beta})$$

En remarquant que $T_{\alpha\alpha,\beta\gamma} = T_{\alpha\beta,\alpha\gamma}$ et $T_{\alpha\alpha,\beta\beta} = T_{\alpha\beta,\alpha\beta}$, nous pouvons conclure que la somme des coefficients de $T_{ij,kl}$, de $T_{jk,il}$ et de $T_{ki,jl}$ est égale à zéro, de même que la somme des coefficients de $T_{\alpha\beta,\alpha\gamma}$ et de $T_{\beta\alpha,\alpha\gamma}$ et aussi la somme des coefficients de $T_{\alpha\beta,\alpha\beta}$ et de $T_{\beta\alpha,\alpha\beta}$. Ainsi $(aPa)P - PAP$ est aussi une combinaison linéaire des matrices de la forme $R_{ij,kl}$, $R_{jk,il}$, $R_{\alpha\beta\gamma}$, $R_{\alpha\beta}$.
De là toute combinaison linéaire de la forme $\sum \gamma_\delta \, [\, (P_\delta A P_\delta - (aP_\delta a) P_\delta \,]$ est aussi une combinaison linéaire des matrices de la forme $R_{ij,kl}$, $R_{jk,il}$, $R_{\alpha\beta\gamma}$, $R_{\alpha\beta}$ et par suite une combinaison lineaire des matrices de la forme $UAU$. Remarquons que $PAP$ est une combinaison lineaire des $T^s$ mais non une combinaison lineaire des $M$ matrices $R^t$ precedentes.

En definitive, nous arrivons à la conclusion :

Pour que $Q(a)$ soit une solution du système (I), il faut et il suffit qu'elle soit une combinaison linéaire des matrices $(aPa)P$ et des $M = \dfrac{n(n+1)\;(n^2 - n + 6)}{12}$ matrices $R^t$. Ces $M + 1$ matrices sont linéairement indépendantes.

Comme les solutions $Q(a)$ et $KQ(a)$ ($K$ est un coefficient réel non nul) donnent le même espace riemannien à absolus locaux, nous arrivons au théorème suivant :

**THÉORÈME**. *L'ensemble des espaces riemanniens à absolus locaux construits à partir d'un espace-base donné est un espace projectif réel de dimension égale à*

$$2\, C_{n+1}^4 + C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)\,(n^2 - n + 6)}{12},$$

*n étant la dimension de l'espace-base. Cet espace-base est aussi un point de notre espace projectif à M dimensions.*

*Reçu 6 Juin 1974*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] NGUYỄN CẢNH TOÀN, *Les espaces riemanniens à absolu mobile et à hypercône géodésique*, Acta Scient. Viet. IV et V, Hanoi, *1969*.

[2] NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, *Compléments à la théorie des espaces riemanniens à obsolu mobile*, Acta. Scient. Viet. VI, Hanoi, *1970*.