ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 1, № 1 (1976)

# ТЕОРИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ АБСТРАКТНЫХ ПРОЦЕССОВ

PHẠM HỮU SÁCH

*Математический Институт*

Существует общирная литература, посвящённая теории управления процессами, описываемыми однозначными операторами. Основные вопросы этой теории (управляемость, инвариантность, наблюдаемость, двойственность, оптимальность,...) изучаются в многочисленных работах. В последнее время появились некоторые статьи (см., например, [1, 2]), в которых исследуются процессы с многозначными выпуклыми [1, 2] операторами. Авторы работ [1, 2] показывают, что многозначные выпуклые операторы и им сопряженные играют важную роль при изучении экономических моделей и экстремальных задач. Теории многозначных процессов посвящена и эта работа. В §1 даются определения многозначных операторов, рассматриваемых в статье, и доказываются некоторые основные свойства этих операторов, которые играют важную роль для дальнейших исследований. В §2 приводятся необходимые и достаточные условия инвариантности в различных абстрактных процессах. Следует отметить, что наше определение инвариантности включает в себя как частные случаи многие определения инвариантности, принятые в литературе (например, определения слабой, сильной и параметрической инвариантности). Поэтому наши результаты по инвариантности носят очень общий характер. Теории управляемости посвящается третий параграф (§3). Он содержит необходимые и достаточные условия управляемости для многозначных процессов с ограничениями не только на управления, но и на фазовые координаты. Заметим, что и в процессах, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями, известные в литературе результаты по управляемости имеют силу лишь для случая, когда фазовых ограничений нет. В §4 изучаются двойственность и оптимальность процессов, к которым можно привести различные задачи оптимизации многозначных процессов (например, задачи, рассматриваемые в [2].)

## §1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЫПУКЛЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим линейные пространства $U$, $Y$. Пусть $T: D \to Y$ — некоторый многозначный оператор из $D$ в $Y$, т. е. $T$ — это некоторое правило, по которому ставится в соответствие каждому элементу $u \in D$ некоторое непустое множество $Tu$ пространства $Y$. Всюду в этой статье будем предполагать, что $D$ — выпуклое множество пространства $U$.

*Определение 1.1. Выпуклым на $D$ называется оператор $T$, для которого*

$$T\,(\alpha\, u_1 + (1-\alpha)\, u_2) \supset \alpha\, T\, u_1 + (1-\alpha)\, T\, u_2$$

*при всех* $\alpha \in [0, 1]$ *и* $u_i \in D$ $(i=1, 2)$.

*Определение вогнутого (аффинного) на $D$ оператора $T$ отличается от приведённого лишь тем, что знак $\supset$ в выше написанном включении заменяется на $\subset$ (сооответственно $=$).*

Пусть $Y$ — линейное топологическое пространство. Будем обозначать через $Y^*$ сопряженное к $Y$ пространство и через $(y^*, y)$ значение функционала $y^* \in Y^*$ в точке $y \in Y$. Положим

$$w^T\,(u, y^*) = \sup_{y \in T\,u}\,(y^*, y),$$

$$w_T\,(u, y^*) = \inf_{y \in T\,u}\,(y^*, y).$$

*Лемма 1. 1 Пусть $Y$ — отделимое локально выпуклое линейное топологическое прострaство. Если оператор $T$ является выпуклым (вогнутым, аффинным) на $D$, то функционал $w^T(u, y^*)$ при фиксированном $y^* \in Y^*$ является вогнутым (выпуклым, аффинным) на $D$. Обратно, если все множества $Tu$ выпуклы и либо все они компактны, либо все они открыты, а функционал $w^T(u, y^*)$ при любом фиксированном $y^* \in Y^*$ является вогнутым (выпуклым, аффинным) на $D$, то оператор $T$ является выпуклым (вогнутым, аффинным) на $D$.*

Напомним, что функционал $w\,(u)$ $(u \in D)$ называется вогнутым на $D$, если

$$w\,(\alpha\, u_1 + (1-\alpha)\, u_2) \geqslant \alpha\, w\,(u_1) + (1-\alpha)\, w\,(u_2)$$

при всех $\alpha \in [0, 1]$ и $u_i \in D$ $(i = 1, 2)$. Определение выпуклого (аффинного) на $D$ функционала $w\,(u)$ $(u \in D)$ отличается от приведенного лишь тем, что знак $\geqslant$ в только что написанном неравенстве заменяется на $\leqslant$ (соответственно $=$).

Для доказательства леммы нам понадобится

*Предложение 1. 1. Пусть имеет место один из следующих двух случаев:*

1. *$Y$ — линейное топологическое прострaство, а $A$ — любое выпуклое открытое множество в $Y$.*

2. *$Y$ — отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство, а $A$ — любое выпуклое замкнутое множество в $Y$.*

*Тогда множество $B$ из $Y$ содержится в $A$ в том и только в том случае, когда $(y^*, B) \subset (y^*, A)$ при любом $y^* \in Y^*$.*

Доказательство следует из теорем об отделимости выпуклых множеств (см. [3], стр. 97).

*Доказательство леммы 1.1.* Первая часть леммы доказывается в [2]. Докажем вторую часть. Из вогнутости функционала $w^T(u, y^*)$ следует, что при любом $y^* \in Y^*$ имеем

$$\sup_{y \in \lambda\, T\, u_1 + (1-\lambda)\, T\, u_2} (y^*, y) \leqslant \sup_{y \in T\,(\lambda\, u_1 + (1-\lambda)\, u_2)} (y^*, y),$$

$$\inf_{y \in \lambda\, T\, u_1 + (1-\lambda)\, T\, u_2} (y^*, y) \geqslant \inf_{y \in T\,(\lambda\, u_1 + (1-\lambda)\, u_2)} (y^*, y),$$

где $u_i \in D$ $(i = 1, 2)$, $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда вытекает

$$\lambda Tu_1 + (1 - \lambda) Tu_2 \subset T(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2)$$

(см. предложение 1.1), что означает выпуклость оператора $T$. Аналогично доказывается вогнутость (аффинность) оператора $T$, если при каждом $y^* \in Y^*$ функционал $w^T(u, y^*)$ является выпуклым (аффинным) на $D$.

*Определение 1.2* (см. [4]). *Пусть $U, Y$ — линейные топологические пространства. Будем говорить, что оператор $T$ полунепрерывен снизу в точке $u_0 \in D$, если для любого открытого множества $G$ со свойством $G \cap Tu_0 \neq \emptyset$ ($\emptyset$ — пустое множество) найдётся такая окрестность $V(u_0)$ точки $u_0$, что $G \cap Tu \neq \emptyset$ при $u \in V(u_0) \cap D$. Будем говорить, что $T$ полунепрерывен сверху в точке $u_0 \in D$, если для любого открытого множества $G$ со свойством $G \supset Tu_0$ найдётся такая окрестность $V(u_0)$ точки $u_0$, что $G \supset Tu$ при $u \in V(u_0) \cap D$. Будем говорить, что оператор $T$ непрерывен в точке $u_0 \in D$, если он и полунепрерывен снизу, и полунепрерывен сверху в данной точке.*

*Будем говорить, что $T$ полунепрерывен снизу на $D$, если он полунепрерывен снизу в каждой точке из $D$. Будем говорить, что $T$ полунепрерывен на $D$, если он полунепрерывен сверху в каждой точке из $D$ и, кроме того, при любом $u \in D$ множество $Tu$ компакно [4]. Будем говорить, что оператор $T$ непрерывен на $D$, если он и полунепрерывен снизу, и полунепрерывен сверху на $D$.*

Заметим, что понятия полунепрерывности снизу и полунепрерывности сверху оператора $T$ совпадают с понятием непрерывности, если $T$ является однозначным. Поэтому важно отметить, что полунепрерывность снизу или полунепрерывность сверху (в обычном смысле [см., например, [4], стр. 78]) некоторого функционала не означает, что он полунепрерывен снизу или полунепрерывен сверху в смысле определения 1.2 (т.е. он может не быть непрерывным).

*Лемме 1.2. Предположим, что $U, Y$ — отделимые локально выпуклые топологические пространства; $Z$ — линейное нормированное пространство; $T: D \to Y$, $S: D \to Z$ — выпуклые полунепрерывен сверху операторы; $N \subset Y$ — выпуклое замкнутое множество; $M \subset Z$ — выпуклый замкнутый конус*).*

*1. Пусть конус $M$ таков, что найдётся по крайней мере одна точка $m \in M$, для которой $-m \overline{\in} M$. Если система*

$$u \in D, \; Tu \cap N \neq \emptyset \tag{1.1}$$

*совместна**, но система*

$$u \in D, \; Tu \cap N \neq \emptyset, \; Su \cap M_0 \neq \emptyset \tag{1.2}$$

*несовместна, то*

$$\sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} f(D_1) \leqslant 0, \tag{1.3}$$

*где* $M_0 = M \setminus \{0\}$

$$f(D_1) = \inf_{y^* \in N^*, z^* \in M^*, \|z^*\| = 1} \; \sup_{u \in D_1} \{h^T(u, y^*, N) + h^S(u, z^*, M)\},$$

* Будем рассматривать только конусы с вершиной в нулевой точке. Нулевая точка любого пространства обозначается через О.

** Т.е. найдётся по крайней мере одна точка $u$, удовлетворяющая условиям (1.1).

$$h^T(u, y^*, N) = w^T(u, y^*) - \inf_{y \in N} (y^*, y),$$

$$h^S(u, z^*, M) = w^S(u, z^*) - \inf_{z \in M} (z^*, z),$$

$$N^* = \{ y^* \in Y^* : \inf_{y \in N} (y^*, y) > -\infty \},$$

$$M^* = \{ z^* \in Z^* : \inf_{z \in M} (z^*, z) > -\infty \} \quad ^{*)},$$

*$Y^*$ ($Z^*$) — сопряженное к $Y$ ($Z$) пространство, а $\mathcal{D}$ — совокупность всех выпуклых, компактных, содержащихся в $D$ множеств $D_1$, обладающих тем свойством, что совместна система условий*

$$u \in D_1, \; Tu \cap N \neq \varnothing. \tag{1.4}$$

2. *Обратно, пусть выполняется неравенство (1.3) и, кроме того, для любого $z \in M_0$ имеем*

$$\inf \{ (z^*, z) : z^* \in M^*, \quad \| z^* \| = 1 \} > 0. \tag{1.5}$$

*Тогда система (1.2) несовместна.*

*Доказательство.* Вторую часть леммы можно доказать от противного. Кратко приведём доказательство первой части. Возьмём произвольную точку $m \in M$, для которой $-m \in M$, и любое $D_1 \in \mathcal{D}$. Определим оператор $T \times S : D \to Y \times Z$ формулой

$$(T \times S)\, u = Tu \times Su \subset Y \times Z \qquad (u \in D),$$

где через $Tu \times Su$ обозначается декартово произведение множеств $Tu$ и $Su$, а через $Y \times Z$ — произведение пространств $Y$ и $Z$. Известно ([4]), стр. 120), что $T \times S$ — полунепрерывный сверху оператор. Множество

$$H = \bigcup_{u \in D_1} (T \times S)\, u$$

выпукло и компактно ([4] , стр. 116). Несовместность системы (1.2) показывает, что $K \cap H = \varnothing$, где $K = N \times (M + m)$ — замкнутое множество. Отсюда следует существование таких функционалов $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$, что выполняется неравенство

$$\sup_{(y, z) \in H} \{ (y^*, y) + (z^*, z) \} < \inf_{y \in N} (y^*, y) + \inf_{z \in M} (z^*, z + m).$$

Ясно, что $z^* \in M^*$ , $z^* \neq 0$ и $y^* \in N^*$. Отсюда следует требуемое неравенство.

*Замечание* 1.1. Требование отделимости пространства $U$ в лемме 1.2 может быть опущено и, кроме того, совокупность $\mathcal{D}$ может быть заменено совокупностью, состоящей из всех выпуклых, квазикомпактных [5], содержащихся в $D$ множеств $D_1$, обладающих тем свойством, что система (1.4) совместна.

*Лемма 1.3. Предположим, что $U$ — линейное пространство, $Y, Z$ — любые линейные топологические пространства; $N \subset Y$, $M \subset Z$ — некоторые выпуклые множества; $T : D \to Y$, $S : D \to Z$ — такие выпуклые на $D$ операторы, что* $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ ($\operatorname{int} A$ — *внутренность $A$), где*

---

*) Так как $M$ — конус, то $M^* = \{ z^* \in Z^* : \inf_{z \in M} (z^*, z) = 0 \}$.

$$\mathring{A} = \bigcup_{u \in D} (T \times S)\, u - \mathring{N} \times \mathring{M}.$$

*Если* $0 \overline{\in} \operatorname{int} A$ *и* $0 \in \operatorname{int} B$, *где* $B = \bigcup\limits_{u \in D} Tu - N$ *то найдутся такие функционалы* $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$ $(z^* \neq 0)$, *что выполняется неравенство*

$$\sup_{u \in D} \{ h^T (u, y^*, N) + h^S (u, z^*, M) \} \leqslant 0. \tag{1.6}$$

*Обратно, если найдутся фунциoналы* $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$ $(z^* \neq 0)$, *удовлетворяющие неравенству (1.6), то* $0 \overline{\in} \operatorname{int} A$.

Первое утверждение леммы следует из теоремы об отделимости выпуклых множеств, а второе можно доказать от противного.

Из леммы 1.2. вытекает, что если

$$\operatorname{int} (N \times M) \bigcup \operatorname{int} \bigcup_{u \in D} (T \times S)\, u \neq \varnothing,$$

$$(N \bigcap \operatorname{int} \bigcup_{u \in D} Tu) \bigcup (\operatorname{int} N \bigcap (\bigcup_{u \in D} Tu)) \neq \varnothing$$

и система

$$u \in D,\ Tu \bigcap N \neq \varnothing,\ Su \bigcap M \neq \varnothing$$

несовместна, то существуют функционалы $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$ $(z^* \neq 0)$, которые удовлетворяют неравенству (1.6). Если найдутся функционалы $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$ $(z^* \neq 0)$, удовлетворяющие неравенству (1.6), то несовместна каждая из следующих двух систем

$$u \in D,\ Tu \bigcap N \neq \varnothing,\ Su \bigcap \operatorname{int} M \neq \varnothing;$$

$$u \in D,\ Tu \bigcap N \neq \varnothing,\ M \bigcap \operatorname{int} Su \neq \varnothing.$$

*Лемма 1.4. Предположим, что* $U$ — *линейное пространство;* $Y = R^n$ ($R^n$ — $n$-*мерное пространство);* $Z$ — *любое линейное топологическое пространство;* $T: D \to Y$ — *вогнутый оператор, для которого* $Tu$ *компактно при любом* $u \in D$; $S: D \to Z$ — *выпуклый оператор;* $N \subset Y$ — *выпуклое ограниченное замкнутое множество;* $M \subset Z$ — *выпуклое множество. Предположим, далее, что либо* $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, *либо* $\operatorname{int} Su \neq \varnothing$ *при любом* $u \in D$.

*1. Если система*

$$u \in D,\ Tu \subset \operatorname{int} N \tag{1.7}$$

*совместна, но система*

$$u \in D,\ Tu \subset N,\ Su \bigcap M \neq \varnothing \tag{1.8}$$

*несовместна, то найдутся такое число* $\lambda \geqslant 0$ *и такой нелулевой функционал* $z^*$, *что выполняется неравенство*

$$\sup_{u \in D} \inf_{\| y^* \| = \lambda} \{ h_T (u, y^*, N) + h^S (u, z^*, M) \} \leqslant 0, \tag{1.9}$$

*где*

$$h_T (u, y^*, N) = w_T (u, y^*) - \inf_{y \in N} (y^*, y).$$

*2. Обратно, если найдутся число* $\lambda \geqslant 0$ *и ненулевой функционал* $z^*$, *для которых выполняется неравенство (1.9), то несовместна каждая из следующих двух систем*

$$u \in D\,,\quad Tu \subset N\,,\quad Su \cap \operatorname{int} M \neq \varnothing\,;$$
$$u \in D\,,\quad Tu \subset N\,,\quad M \cap \operatorname{int} Su \neq \varnothing\,.$$

*Доказательство.* Докажем первую часть леммы. Положим

$$k\,(u,\,N) = \inf_{\|y^*\|=1} \{\inf_{y \in Tu} (y^*, y) - \inf_{y \in N} (y^*,\, y)\}.$$

Так как $(y^*, N) = (y^*, \overline{\operatorname{int} N}) \subset \overline{(y^*, \operatorname{int} N)}$, то

$$\inf_{y \in N}\ (y^*,\, y) = \inf_{y \in \operatorname{int} N}\ (y^*,\, y)$$

(поскольку $N \supset \operatorname{int} N$). Таким образом,

$$k\,(u, \operatorname{int} N) = k\,(u,\, N).$$

Отметим, что условие $Tu \subset \operatorname{int} N$ эквивалентно выполнению неравенства

$$k\,(u,\, \operatorname{int} N) > 0. \tag{1.10}$$

В самом деле, если $Tu \subset \operatorname{int} N$, то в силу компактности $Tu$ и открытости $\operatorname{int} N$ имеем для любого ненулевого $y^* \in Y^*$

$$\inf_{y \in Tu} (y^*,\, y) - \inf_{y \in \operatorname{int} N} (y^*,\, y) > 0. \tag{1.11}$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (1.11), представляет собой непрерывный функционал в пространстве $Y^*$ ([4], стр, 201). Поэтому из компактности множества $\{y^* \in Y^*,\ \|\, y^*\,\| = 1\}$ следует неравенство (1.10). Обратно, если $k\,(u,\, \operatorname{int} N) > 0$, то неравенство (1.10) и предложение 1.1 показывают, что $Tu \subset \operatorname{int} N$.

Заметим теперь, что вследствие вогнутости оператора $T$, леммы 1.1 и теоремы 5, приведённой на стр. 199 книги [4], функционал $-\,k\,(u,\, N)$ является выпуклым на $D$, и потому, как легко проверить, многозначный оператор $T_1\colon\ D \to R^1$, где $T_1 u = -\,k(u, N) + R_+$ и $R_+ = \{\lambda \in R^1\colon\ \lambda \geqslant 0\}$, является выпуклым на $D$.

Из выше сказанных ясно, что несовместность системы (1.8) влечёт за собой несовместность системы

$$u \in D,\ T_1 u \cap \operatorname{int}\,(-R_+) \neq \varnothing,\ Su \cap M \neq \varnothing \tag{1.12}$$

и что совместность системы (1.7) влечёт за собой совместность системы

$$u \in D,\ T_1 u \cap \operatorname{int}\,(-R_+) \neq \varnothing.$$

Таким образом, согласно лемме 1.3 найдутся число $-\,\lambda$ и функционал $z^* \in Z^*$ ($z^* \neq 0$) для которых

$$\sup_{u \in D}\ \{\sup_{\alpha \in R_+} (\lambda\ k\,(u,\, N) - \lambda\alpha) + \sup_{z \in Su} (z^*,\, z)\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\alpha \in (-R_+)} -\ \lambda\alpha + \inf_{z \in M} (z^*,\, z).$$

* Здесь и далее черта означает замыкание.

Отсюда следует выполнение условия $\lambda \geqslant 0$ и неравенства (1.9). Первая часть леммы доказана. Вторую ласть можно доказать при помощи леммы 1.3, если заметить, что несовместность системы (1.12) влечёт за собой несовместность системы (1.8).

*Замечание 1.2.* Лемма 1.4 остается в силе, если вместо замкнутости множества $N$ потребуем, чтобы оно было открытым. Отметим, что в случае открытости множества $N$ система (1.7) принимает вид

$$u \in D, \ Tu \subset N. \tag{1.7)'}$$

## §2. ИНВАРИАНТНОСТЬ

Всюду в дальнейшем там, где специально не оговорено противное, будем считать, что $U$ — линейное пространство; $Y$, $Z$ — отделимые локально выпуклые линейные топологические пространства; $D \subset U$, $N \subset Y$, $M \subset Z$ — выпуклые множества; $T: D \to Y$, $S: D \to Z$ — некоторые многозначные операторы.

*Определение 1. 2. Пусть $M$ — любое множество пространства $Z$. Оператор $S$ называется $M$-инвариантным относительно ограничений (1. 1) ((1. 7)'), если для любой точки $u$, удовлетворяющей ограничениям (1.1) (соответственно (1. 7)'), имеем $Su \subset M$.*

В случае, когда $Z$ — линейное нормированное пространство, а $M$ — некоторый шар с радиусом $\varepsilon$ и с центром в нулевой точке пространства $Z$, то вместо «оператор $S$ является $M$-инвариантным» условимся говорить, что он является $\varepsilon$-инвариантным. Если $T$ и $S$ — однозначные операторы, а $M$ состоит из единственной точки $m$ пространства $Z$, то $M$-инвариантность оператора $S$ означает, что для всех точек $u$, удовлетворяющих ограничению на управления

$$u \in D$$

и ограничению на фазовые координаты

$$Tu \in N,$$

оператор $S$ принимает постоянное значение $m$:

$$Su = m,$$

т.е. определение 2.1 становится обычным определением инвариантности. Если, $m = 0 \in Z$) то в данном случае $M$ — инвариантным оператор $S$ просто называется инвариантным.

Заметим, что введение оператора $S$ в определение инвариантности очень полезно потому, что в некоторых случаях оно позволяет привести инвариантность в различных смыслах к инвариантности в смысле определения 2.1. Рассмотрим примеры. Пусть в евклидовом $n$-мерном пространстве $R^n$ задан процесс

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{2.1}$$

и линейный функционал

$$J = (c, x), \tag{2.2}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^1$; $A$ — $n \times n$-матрица; $b$ и $c$ — $n$-мерные векторы. Будем считать, что воздействие $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ принадлежит пространству $L_p[0, t_1]$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Следуя Л.И. Розоноэру, будем говорить, что функционал (2.2) слабо инвариантен в процессе (2.1), если для любого $x_0 \in R^n$ значение $(c, x(t_1))$ не зависит от $u(t) \in L_p[0, t_1]$, где $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ – исходящая из начальной точки $x_0$ траектория системы (2.1), соответствующая воздействию $u(t)$, а $t_1$ – фиксированное неотрицательное число. Функционал (2.2) называется сильно инвариантным в процессе (2.1), если он слабо инвариантен для каждого $t_1$ из заданного отрезка времени $[0, t_1]$.

Будем обозначать через $\varphi_k(t)$ и $\psi^k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ решения систем

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi$$

с начальными условиями $\varphi_k(0) = \psi^k(0) = e_k$, где $e_k$ – $k$-й координатный вектор пространства $R^n$, а $^*$ означает транспонирование. Легко видеть, что слабая инвариантность эквивалентна тому, что оператор

$$Su = \int_0^{t_1} (\psi(c, t_1, \tau), b)\, u(\tau)\, d\tau : L_p[0, t_1] \to R^1 = Z,$$

где

$$\psi(c, t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} (c, \varphi_k(t))\, \psi^k(\tau),$$

является инвариантным (в смысле определения 2.1) относительно ограничения

$$u(t) \in D = U = L_p[0, t_1].$$

Сильная инвариантность означает, что оператор

$$Su = \int_0^{t} (\psi(c, t, \tau), b)\, u(\tau)\, d\tau : L_p[0, \bar{t}_1] \to C[0, \bar{t}_1] = Z$$

является инвариантным относительно ограничения

$$u(t) \in D = U = L_p[0, t_1].$$

Аналогично, так называемую параметрическую инвариантность можно и привести к инвариантности в смысле определения 2.1.

*1. Случай, когда множество $M$ выпукло.*

**Теорема 2. 1.** *Предположим, что $U$-отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство; $N$, $M$-замкнутые множества; $T$-выпуклый полунепрерывный сверху на $D$ оператор; $S$-аффинный непрерывный на $D$ оператор; система (1.1) совместна.*

*Для $M$-инвариантности относительно ограничений (1.1) оператора $S$ необходимо и достаточно, что выполнялось равенство*

$$\sup_{z^* \in M^*} g_-(z^*) = 0, \tag{2.3}$$

*где*

$$g_-(z^*) = \sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} \inf_{y^* \in N^*} \sup_{u \in D_1} \{h^T(u, y^*, N) - h_S(u, z^*, M)\},$$

$$h_S(u, z^*, M) = w_S(u, z^*) - \inf_{z \in M} (z^*, z).$$

*Доказательство.* Так как $M$—выпуклое замкнутое множество, то предположение 1.1 показывает, что для $M$ - инвариантности (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf_{z \in P} (z^*, z) \geqslant \inf_{z \in M} (z^*, z)$$

при всех $z^* \in M^*$, где

$$P = \{Su : u \in D, Tu \cap N \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, $M$-инвариантность оператора $S$ эквивалентна тому, что при всех $z^* \in M^*$ система

$$u \in D, Tu \cap N \neq \varnothing, S'_{z^*}u \cap R_0 \neq \varnothing \tag{2.4}$$

несовместна, где $R_0 = \{\lambda \in R^1 : \lambda < 0\}$, а функционал $S'_{z^*}: D \to R^1$ определяется формулой

$$S'_{z^*}u = h_S (u, z^*, M).$$

Так как функционал $S'_{z^*}$ *u* является непрерывным ([4], стр. 122) и выпуклым в смысле определения 1.1 (лемма 1.1), то при помощи леммы 1. 2 и произвольности $z^* \in M^*$ легко видеть, что несовместность системы (2.4) при всех $z^* \in M^*$ равносильна выполнению неравенства

$$\sup_{z^* \in M^*} g_- (z^*) \leqslant 0.$$

С другой стороны, из определения функционала $g_- (z^*)$ вытекает, что $\sup\limits_{z^* \in M^*} g_-(z^*) \geqslant 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Выражение, стоящее в левой части неравенства (2.3), становится более простым, если в дополнение к условиям теоремы 2.1 предположим, что множество $D$ компактно. В самом деле, в данном случае равенство (2.3) становится равенством

$$\sup_{z^* \in M^*} \inf_{y^* \in N^*} \sup_{u \in D} \{h^T (u, y^*, N) - h_S (u, z^*, M)\} = 0, \tag{2.5}$$

что следует из определения функционала $g_-(z^*)$. Необходимое и достаточное условие $M$ - инвариантности оператора $S$ можно представить в виде (2.5) и в других случаях. Имеет место

**Теорема 2.2.** *Предположим, что $M$ — замкнутое множество; $T$ и $S$ — выпуклые на $D$ операторы и хотя бы одна из следующих двух систем*

$$u \in D, \quad Tu \cap \operatorname{int} N \neq \varnothing; \tag{2.6}$$

$$u \in D, \quad N \cap \operatorname{int} Tu \neq \varnothing \tag{2.7}$$

*совместна. Для $M$ — инвариантности (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (2.5).*

Действительно, как было показано при доказательстве теоремы 2.1, $M$ - инвариантность оператора $S$ равносильна несовместности системы (2.4) при любом фиксированном $z^* \in M^*$, т. е. равносильна несовместности системы

$$u \in D\,, Tu \cap N \neq \varnothing \quad , \quad S''_{z^*}\, u \cap R_0 \neq \varnothing$$

при любом $z^* \in M^*$, где многозначный оператор $S''_{z^*} : D \to R^1$ определяется формулой

$$S''_{z^*}\, u = h_S(u, z^*, M) + R_+.$$

Лемма 1.1 показывает, что оператор $S''_{z^*}$ является выпуклым на $D$. Из леммы 1.3 следует, что $M$ - инвариантность оператора $S$ эквивалентна неположительности выражения, стоящего в левой части равенства(2.5). Так как неотрицательность этого выражения является легко проверяемым фактом, то получим утверждение леммы.

Перейдём к рассмотрению $M$ - инвариантности оператора $S$ относительно ограничений (1.7)'.

**Теорема 2. 3.** *Предположим, что $Y = R^n$ ; $N$ — ограниченное замкнутое (или открытое) множество, $M$ — замкнутое множество ; $T$ — вогнутый оператор, для которого $Tu$ компактно при любом $u \in D$ ; $S$ — выпуклый оператор. Предположим, далее, что система (1.7) совместна.*

*Для $M$ - инвариантности (относительно ограничений (1.7)'), оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sup_{z^* \in M^*}\ \inf_{\lambda \geqslant 0}\ \sup_{u \in D}\ \inf_{\|y^*\| = \lambda} \{h_T(u, y^*, N) - h_S(u, z^*, M)\} = 0.$$

Доказательство следует из леммы 1.4 и несовместности системы

$$u \in D,\ Tu \subset N,\ S''_{z^*}\, u \cap R_0 \neq \varnothing$$

при любом фиксированном $z^* \in M^*$.

*2. Случай, когда множество $M$ вогнуто.*

*Определение 2.2. Множество $M \subset Z$ называется вогнутым, если оно может быть представлено в виде $M \subset Z/M'$, где $M'$ — некоторое непустое выпуклое открытое множество. $M'$ называется выпуклым соответствующим $M$ множеством.*

**Теорема 2. 4.** *Предположим, что $Y$ линейное топологическое пространство; $Z = R^n$ ; $T$ и $S$-выпуклые на $D$ операторы, причём $\operatorname{int} Su \neq \varnothing$ и $S$-ограничено при любой $u \in D$ ; $M$—такое вогнутое множество пространства $Z$, что выпуклое соответствующее ему множество $M'$ ограничено; хотя бы одна из двух систем (2.6), (2.7) совместна.*

*Для $M$-инвариантности (относительно ограничений (1. 1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\inf_{\|z^*\|=1}\ \inf_{y^* \in N^*}\ \sup_{u \in D} \{h^T(u, y^*, N) + h^S(u, z^*, M')\} \leqslant 0. \tag{2.8}$$

*Доказательство.* Необходимость следует из леммы 1. 2 и несовместности системы

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing,\ Su \cap M' \neq \varnothing.$$

Докажем достаточность. Пусть выполняется неравенство (2.8)', но существует точка $u_0$, удовлетворяющая ограничениям (1.1) и условию $Su_0 \cap M' \neq \varnothing$. Тогда $h^S(u_0, z^*, M') > 0$ при любом ненулевом $z^* \in Z^*$. Функционал $h^S(u_0, z^*, M')$ переменного $z^* \in Z^*$ является выпуклым в обычном смысле ([4]). Следовательно, он непрерывен относительно $z^* \in Z^*$. В силу компактности множества

$$Z_1^* = \{z^* \in Z^* : \|z^*\| = 1\}$$

имеем

$$\inf_{\|z^*\|=1} h^S(u_0, z^*, M') > 0.$$

С другой стороны, $\inf\limits_{y^* \in N^*} h^T(u_0, y^*, N) \geqslant 0.$

Таким образом, выражение, стоящее в левой части неравенства (2.8), положительно, что невозможно. Теорема доказана.

**Теорема 2.5.** *Предположим, что $Y = R^n$, $Z = R^k$; $N \subset Y$ — ограниченное замкнутое (или открытое) множество; $M \subset Z$ — такое вогнутое множество, что выпуклое соответствующее ему множество $M'$ ограничено; $T$-вогнутый оператор, для которого $Tu$ компактно при любом $u \in D$; $S$ — выпуклый оператор, для которого $Su$ ограничено при любом $u \in D$; система (1.7) совместна.*

*Для $M$-инвариантности (относительно ограничений (1.7)') оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\inf_{\|z^*\|=1} \inf_{\lambda \geqslant 0} \sup_{u \in D} \inf_{\|y^*\| = \lambda} \{h_T(u, y^*, N) + h^S(u, z^*, M')\} \leqslant 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4, и потому его опустим.

3. **Некоторые частные случаи.** В этом пункте приведём некоторые теоремы, относящиеся к $M$-инвариантности в линейном нормированном пространстве $Z$. Для установления теорем 2.6 — 2.8 нам понадобится

**Лемма 2. 1.** *Пусть $Z$ — рефлексивное линейное нормированное пространство. Точка $z \in Z$ удовлетворяет неравенству*

$$\|z\| \leqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon \geqslant 0) \tag{2.9}$$

*тогда и только тогда, когда для всех $z^* \in Z_1^*$ имеем*

$$|(z^*, z)| \leqslant \varepsilon . \tag{2.10}$$

*Здесь*

$$Z_1^* = \{ z^* \in Z^* : \| z^* \| = 1 \} , \tag{2.11}$$

*а $\|\cdot\|$ означает норму.*

**Доказательство.** Необходимость очевидна потому, что для всех $z^* \in Z_1^*$ имеем $|(z^*, z)| \leqslant \| z^* \| \; \| z \| \leqslant \varepsilon$, если $\| z \| \leqslant \varepsilon$. Достаточность докажем от противного. Предположим, что неравенство (2.10) имеет место для всех $z^* \in Z_1^*$, но $\| z \| > \varepsilon$. Тогда найдётся такой функционал $z_1^* \in Z_1^*$, что $|(z_1^*, z_1)| < (z_1^*, z)$, если $z_1$ удовлетворяет условию (2.9). В силу теоремы Хана-Банаха существует такой функционал $r \in Z^{**} = Z$, что $\| r \| = 1$ и $(z_1^*, r) = \| z_1^* \| = 1$. Таким образом, $|(z_1^*, \varepsilon r)| = \varepsilon \| z_1^* \| = \varepsilon < (z_1^*, z)$, что невозможно.

**Теорема 2. 6.** *В дополнение к условиям теоремы 2. 1. предположим, что $Z$ — рефлексивное линейное нормированное пространство и $M$ — шар с центром в нулевой точке пространства $Z$ и с радиусом $\varepsilon$. Для $\varepsilon$ - инвариантности (относительно ограничений (1. 1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sup_{\| z^* \| = 1} \ \sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} \ \inf_{y^* \in N^*} \ \sup_{u \in D_1} \{ h^T (u, y^*, N) - w_S(u, z^*) \} \leqslant \varepsilon.$$

**Доказательство.** Лемма 2.1 показывает, что $\varepsilon$-инвариантность оператора $S$ эквивалентна тому, что при любом $z^* \in Z_1^*$ функционал $w_S(z^*, u) + \varepsilon$ является $R_+$-инвариантным относительно ограничений (1.1), т. е. при любом $z^* \in Z_1^*$ выполняется неравенство

$$\sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} \ \inf_{y^* \in N^*} \ \sup_{u \in D_1} \{ h^T (u, y^*, N) - w_S(u, z^*) \} \leqslant \varepsilon,$$

что равносильно выполнению равенства (2.3). Отсюда следует утверждение теоремы.

Отметим, что из теоремы 2.1 можно получить теорему 2.6 без помощи леммы 2.1. Для этого достаточно отметить, что в рефлексивном нормированном пространстве $Z$ имеем

$$\inf_{z \in M} (z^*, z) = \inf_{\| z \| \leqslant \varepsilon} (z^*, z) = \varepsilon \| z^* \| .$$

**Теорема 2. 7.** *В дополнение к условиям теоремы 2. 2 предположим, что $Z$ — рефлексивное линейное нормированное пространство и $M$ — шар с центром в нулевой точке пространства $Z$ и с радиусом $\varepsilon$. Для $\varepsilon$-инвариантности (относительно ограничений (1. 1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sup_{\| z^* \| = 1} \ \inf_{y^* \in N^*} \ \sup_{u \in D} \{ h^T (u, y^*, N) - w_S(u, z^*) \} \leqslant \varepsilon.$$

**Теорема 2. 8.** *В дополнение к условиям теоремы 2. 3 предположим, что $Z$ — рефлексивное линейное простнанство и $M$ — шар с центром в нулевой точке пространства $Z$ и с радиусом $\varepsilon$. Для $\varepsilon$-инвариантности (относительно ограничений (1.7)') оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sup_{\| z^* \| = 1} \ \inf_{\lambda \geqslant 0} \ \sup_{u \in D} \ \inf_{\| y^* \| = \lambda} \{ h_T(u, y^*, N) - w_S(u, z^*) \} \leqslant \varepsilon.$$

Доказательства теорем 2.7 и 2. 8 аналогичны доказательству теоремы 2.6 и поэтому мы их опустим.

**Теорема 2. 9.** *Предположим, что $U$, $Y$, $Z$ — линейные нормированные пространства, причём $U$, $Z$ — рефлексивные; $N \subset Y$, $M \subset Z$ — выпуклые замкнутые конусы $T : U \to Y$, $S : U \to Z$ — (однозначные) непрерывные линейные операторы; $\varepsilon$ и $l$ — заданные положительные числа. Оператор $S$ является $\varepsilon$-инвариантным относительно ограничений*

$$\| u \| \leqslant l , T u \in N \tag{2. 12}$$

*тогда и только тогда, когда выполняется включение*

$$S^*Z_1^* \subset \{T^* N^*\}_{\varepsilon/_l}, \tag{2.13}$$

*где* $S^*$ *и* $T^*$ *— сопряжённые к* $S$ *и* $T$ *операторы, а*

$$\{T^* N^*\}_{\varepsilon/_l} = \left\{u^* \in U^* : \rho(u^*, T^* N^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{l}\right\}$$

*(*$\rho(u^*, T^* N^*)$*— расстояние из точки* $u^*$ *до множества* $T^*N^*$ *в линейном нормированном* $U^*$*, сопряженном к* $U$*).*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть выполняется включение (2.13). Возьмём любую точку $u \in U$, удовлетворяющую ограничений (2.12), и покажем, что $\|Su\| \leqslant \varepsilon$. Пусть $z^*$ — произвольный функционал из множества $Z^*_1$. Включение (2.13) показывает, что для любого $\delta > 0$ найдётся $y^* \in N^*$, что

$$\|S^*z^* - T^*y^*\| < \frac{\varepsilon}{l} + \delta. \tag{2.14}$$

Имеем из (2.14)

$$\begin{gathered}(z^*, Su) = (S^*z^*, u) = (y^*, Tu) + (S^*z^* - T^*y^*, u) \geqslant \\ \geqslant (S^*z^* - T^*y^*, u) \geqslant - \| S^*z^* - T^*y^*\| \, l > - \varepsilon - \delta l.\end{gathered} \tag{2.15}$$

В силу произвольности $\delta$ неравенства (2.15) дают

$$(z^*, Su) \geqslant -\varepsilon. \tag{2.16}$$

Соотношение (2.16) имеет место для любого $z^* \in Z_1^*$. Так как $z^* \in Z_1^*$ тогда и только тогда, когда $-z^* \in Z_1^*$, то из (2.16) вытекает неравенство $|(z^*, Su)| \leqslant \varepsilon$ для любого $z^* \in Z_1^*$. Согласно лемме 2.1 имеем $\| Su \| \leqslant \varepsilon$, что и требовалось доказать.

*Необходимость.* Предположим, что оператор $S$ является $\varepsilon$-инвариантным относительно ограничений (2.12), но включение (2.13) не имеет места, т.е. $S^* z^* \overline{\in} \{T^*N^*\}_{\varepsilon/l} \subset U^*$ для некоторого $z^* \in Z_1^*$. Из теоремы об отделимости выпуклых множеств и рефлексивности пространства $U$ следует существование такого элемента $u \in U^{**} = U$, что

$$(z^*, Su) = (S^*z^*, u) > (v^*, u) \tag{2.17}$$

для всех $v^* \in \{T^*N^*\}_{\varepsilon/l}$.

Так как $N^*$ — конус, то (2.17) даёт $(y^*, Tu) \leqslant 0$ для всех $y^* \in N^*$, т.е. $T(-u) \in N^*$. Без ограничения общности можно считать, что $\| u \| = l$. Вследствие теоремы Хана-Банаха найдётся $\tilde{u}^* \in U^*$, что $\|\tilde{u}^*\| = 1$ и $(\tilde{u}^*, u) = \| u \| = l$. Ясно, что $\varepsilon/l \, \tilde{u}^* \in \{T^* N^*\}_{\varepsilon/l}$. Неравенство (2.17) даёт $(-z^*, S(-u)) > \frac{\varepsilon}{l}(\tilde{u}^*, u) = \varepsilon$, что означает, что $\| S(-u) \| > \varepsilon$, (в силу леммы 2.1 и условия $-z^* \in Z_1^*$). Таким образом, точка $-u$ удовлетворяет ограничениям (2.12) и условию $\|S(-u)\| > \varepsilon$, что противоречит $\varepsilon$-инвариантности оператора $S$. Теорема полностью доказана.

При помощи теоремы об отделимости выпуклых множеств можно доказать следующую теорему [7].

**Теорема 2. 10.** *Предположим, что* $U, Y, Z$ *— линейные нормированные пространства, где* $U$ *рефлексивное;* $N \subset Y$, $M \subset Z$ *— выпуклые замкнутые конусы;* $T: U \to Y$, $S: U \to Z$ *— (однозначные) линейные непрерывные операторы. Оператор* $S$ *является* $M$*-инвариантным относительно ограничения* $Tu \in N$ *тогда и только тогда, когда выполняется включение*

$$S^*M^* \subset \overline{T^*N^*},$$

*где черта означает замыкание в линейном нормированном пространстве $U^*$, сопряженном к $U$, а $S^*$ и $T^*$ сопряженные к $S$ и $T$ операторы.*

## § 3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ

*Определение 3-1. Оператор $S$ называется $M$ - управляемым относительно ограничений (1.1) ((1.7)'), если $M \cap \overline{Q} \neq \varnothing$, где*

$$Q = \bigcup_{u \in I} Su,\ I = \{u \in U : u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing\}$$

*(соответственно*

$$Q = \bigcup_{u \in J} Su,\ J = \{u \in U : u \in D,\ Tu \subset N\})$$

I. *Случай, когда множество $M$ выпукло.*

**Теорема 3.1.** *Предположим, что $U$—отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство; $N$—замкнутое множество; $T$—выпуклый полунепрерывный сверху на $D$ оператор; $S$—аффинный непрерывный на $D$ оператор; система (1.1) совместна. Предположим, далее, что либо множество $M$ замкнуто и множество $\overline{Q}$ компактно, либо множество. $M$ компактно. Для $M$-управляемости (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\inf_{z^* \in M^*} g_+(z^*) \leqslant 0. \tag{3.1}$$

*где*

$$g_+(z^*) = \sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} \inf_{y \in N} \sup_{u \in D_1} \{h^T(u,\ y^*,\ N) + h^S(u, z^*, M)\}.$$

Отметим, что из определения функционала $g_+(z^*)$ ясно, что

$$\inf_{z \in M^*} g_+(z^*) \leqslant 0.$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $S$ является $M$—управляемым относительно ограничений (1.1), а выражение, стоящее в левой части равенства (3.1), отрицательно. Возьмём такое $\varepsilon > 0$, что существует $z^*_\varepsilon \in M^*$ со свойством $g_+(z^*_\varepsilon) < -\varepsilon$. Следовательно, в силу определения функционала $g_+(z^*)$ можно показать, что

$$(z^*_\varepsilon,\ q) \leqslant -\varepsilon + \inf_{z \in M} (z^*_\varepsilon,\ z) < \inf_{z \in M} (z^*_\varepsilon,\ z)$$

для всех $q \in \overline{Q}$, что противоречит $M$ - управляемости оператора $S$.

*Достаточность.* Пусть выполняется равенство (3.1), а $M \cap \overline{Q} = \varnothing$. Согласно теореме об отделимости выпуклых множеств существуют такой функционал $z^*_0 \in M^*$ и такие числа $\varepsilon$, $c$, что неравенства

$$(z^*_0,\ q) \leqslant c - \varepsilon < c \leqslant \inf_{z \in M} (z^*_0,\ z) \tag{3.2}$$

выполняются для всех $q \in \overline{Q}$. Отсюда вытекает несовместность системы

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing,\ 0 < \sup_{z \in Su} (z_0^*, z) - c + \varepsilon.$$

Таким образом, из леммы 1.2 и неравенств (3.2) ясно, что $g_+ (z_0^*) < 0$, что невозможно. Теорема полностью доказана.

Если в дополнение к условиям теоремы 3.1 предположим, что множество $D$ компактно, то равенство (3.1) становится равенством

$$\inf_{z^* \in M^*} \inf_{y^* \in N^*} \sup_{u \in D} \{h^T(u, y^*, N) + h^S(u, z^*, M)\} = 0. \tag{3.3}$$

Необходимое и достаточное условие $M$-управляемости оператора $S$ можно представить в виде (3.3) и в других случаях. Имеет место

**Теорема 3.2.** *Предположим, что $T$ и $S$ выпуклые на $D$ операторы и хотя бы одна из двух систем (2.6), (2.7) совместна. Предположим, далее, что либо множество $M$ замкнуто и множество $\overline{Q}$ компактно, либо множество $M$ компактно.*

*Для $M$-управляемости (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (3.3).*

Доказательство теоремы 3.2 отличается от доказательства теоремы 3.1 лишь тем, что использована не лемма 1.2, а лемма 1.3.

Перейдём к изучению $M$-управляемости оператора $S$ относительно ограничений*(1.7)'*.

**Теорема 3.3.** *Предположим, что $Y = R^n$; $N$-ограниченное замкнутое (или открытое) множество; $T$ — вогнутый оператор, для которого $Tu$ компактно при любом $u \in D$; $S$-выпуклый оператор; система (1.7) совместна. Предположим далее, что либо множество $M$ замкнуто и множество $\overline{Q}$ компактно, либо множество $M$ компактно. Для $M$-управляемости (относительно ограничений (1.7)') оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\inf_{z^* \in M^*} \inf_{\lambda \geqslant 0} \sup_{u \in D} \inf_{\|y^*\| = \lambda} \{h_T(u, y^*, N) + h^S(u, z^*, M)\} = 0.$$

Доказательство опирается на лемму 1.4 и схему доказательства теоремы 3.1.

**Определение 3.2.** *Оператор $S$ называется вполне $M$-управляемым относительно ограничений (1.1) ((1.7)'), если он является $\{m\}$-управляемым относительно ограничений (1.1) (соответственно (1.7)') при любом $m \in M$.*

Теоремы 3.1 — 3.3 дают возможность получить необходимое и достаточное условие полной $M$-управляемости (относительно ограничений (1.1) или (1.7)') оператора $S$. В качестве примера приведём без доказательства следующую теорему.

**Теорема 3.4.** *Предположим, что $U$ — отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство; $N$-замкнутое множество; $T$-выпуклый полунепрерывный сверху на $D$ оператор; $S$—аффинный непрерывный на $D$ оператор; система (1.1) совместна. Предположим, далее, что $M$—любое (необязательно выпуклое) ограниченное множество пространства $Z$. Для полной $M$-управляемости (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\inf_{z^* \in M^*} \sup_{D_1 \in \mathfrak{D}} \inf_{y^* \in N^*} \sup_{u \in D_1} \{h^T(u, y^*, N) - h_S(u, -z^*, M)\} = 0.$$

*2. Случай, когда множество $M$ вогнуто.*

**Теорема 3.5.** *Предположим, что*

*1. $U$, $Y$, $Z$ — отделимые локально выпуклые линейные топологические пространства;*

*2. $D$ — компактное множево;*

*3. $N \subset Y$ — замкнутое множество; $M \subset Z$ — вогнутое множество;*

*4. $T: D \to Y$ — выпуклый полунепрерывный сверху оператор; $S: D \to Z$ — аффинный непрерывный оператор;*

*5. Система (1.1) совместна.*

*Для $M$-управляемости (относительно ограничений (2.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно существование такого ненулевого функционала $z_0^* \in Z^*$, для которого выполняется неравенство*

$$\inf_{y \in N^*} \sup_{u \in D} \{h^T(u, y^*, N) - h_S(u, z, M')\} \geqslant 0, \tag{3.4}$$

*где $M'$ — выпуклое соответствующее $M$ множество.*

*Доказательство. Необходимость.* Пусть оператор $S$ является $M$-управляемым относительно ограничений (1.1). При сделанных предположениях можно показать, что множество $I$ компактно в пространстве $U$. Следовательно, $Q$ компактно (см. [4]). Отсюда следует замкнутость множества $Q$ (в силу отделимости пространства $Z$). Из $M$-управляемости оператора $S$ следует существование такой точки $u_0 \in I$, для которой $Su_0 \cap M \neq \varnothing$. Возьмём произвольную точку $q \in Su_0 \cap M$. Из теоремы об отделимости выпуклых множеств вытекает, что найдётся ненулевой функционал $z_0^* \in Z^*$, удовлетворяющий неравенству

$$(z_0^*, q) - \inf_{z \in M'} (z_0^*, z) \leqslant 0.$$

С другой стороны, $h^T(u, y^*, N) > 0$ при всех $y^* \in Y^*$. Таким образом,

$$\inf_{y^* \in N^*} \{h^T(u_0, y^*, N) - h_S(u_0, z_0^*, M')\} \geqslant 0,$$

что показывает выполнение неравенства (3.4).

*Достаточность.* Пусть неравенство (3.4) имеет место для некоторого ненулевого $z_0^* \in Z^*$, но оператор $S$ не является $M$-управляемым, т.е. $Q \subset M'$. Так как $Q$ компактно и $M'$ открыто, то при любом ненулевом функционале $z^* \in Z^*$ имеем строгое неравенство

$$\inf_{z \in Q} (z^*, z) > \inf_{z \in M'} (z^*, z). \tag{3.5}$$

Ясно, что при любом ненулевом $z^* \in Z^*$ система

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing,\ 0 < -\inf_{z \in Su} (z^*, z) + \inf_{z \in Q} (z^*, z)$$

несовместна. В силу непрерывности оператора $S$ функционал $\inf\limits_{z \in Su} (z^*, z)$ переменного $u \in D$ непрерывен ([4]). Согласно лемме 1.1 имеет место неравенство

$$\inf_{y\in N}\ \sup_{u\in D}\ \{h^T(u, y^*, N) - \inf_{z\in Su}(z^*, z)\} \leqslant - \inf_{z\in Q}(z^*, z). \tag{3.6}$$

Неравенства (3.5) и (3.6) показывают, что выражение, стоящее в левой части неравенства (3.4), отрицательно при любом, $z_0^* \neq 0$, что невозможно. Теорема полностью доказана.

*Замечание* 3.1. Пусть выполняются условия 1 — 3, приведённые в теореме 3.5, и, кроме того, операторы $T, S$ являются выпуклыми полунепрерывными сверху на $D$ и хотя бы одна из двух систем (2.6), (2.7) совместна. Тогда утверждение теоремы 3.5 остаётся в силе. Доказательство опирается на схему доказательства теоремы 3.5 и лемму 1.2.

*Следствие 3.1. Пусть сделаны либо предположения 1.5, приведенные в теореме 3.5, либо предположения, приведённые, в замечании 1.3. Пусть, далее, $Z = R^k$; множество $M$ таково, что выпуклое соответствующее ему множество $M$ ограничено $p(z^*) > -\infty$* при любом $z^* \in Z^*$.*

*Для $M$ — управляемости (относительно ограничений (1.1)) оператора $S$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sup_{\|z^*\|=1}\ \inf_{y^*\in N^*}\ \sup_{u\in D}\ \{h^T(u, y^*, N) - h_S(u, z^*, M)\} \geqslant 0\,. \tag{3.7}$$

*Доказательство*. Необходимость следует из теоремы 3.5. Докажем достаточность. Если выполняется неравенство (3.7), но оператор $S$ не является $M$ - управляемым, то, как показано при доказательстве теоремы 3.5, неравенство $p(z^*) < 0$ имеет место для всех $z^* \neq 0$. Таким образом, для завершения доказательства осталось доказать, что функционал $p(z^*)$ достигает максимума на компактном множестве $Z_1^* = \{z^* \in Z^* : \|z^*\| = 1\}$. При помощи слеланных предположений и хорошо-известных теорем ([4]) легко проверить, что функционал $p(z^*)$ полунепрерывен сверху в обычном смысле во всём конечномерном пространстве $Z^*$, и потому достигает максимума на множестве $Z_1^*$, что и требовалось доказать.

*Замечание* 3.2. Условие $p(z^*) > -\infty$ при любом $z^* \in Z^*$ выполняется, если $N = Y$, $M'$ ограничено, $D$ компактно и $S$ полунепрерывен сверху на $D$.

**Теорема 3.6.** *Предположим, что $Y = R^n$; $Z$ — любое линейное топологическое пространство; $N \subset Y$ — ограниченное замкнутое (или открытое) множество; $M \subset Z$ — вогнутое множество; $T$ — вогнутый оператор, для которого $Tu$ компактно при любом $u \in D$; $S$ — выпуклый оператор; система (1.7) совместна; множество $P = \bigcup_{u\in J} Su$, где $J = \{u : u \in D, Tu \subset N\}$, компактно и замкнуто.*

*Для $M$ — управляемости (относительно ограничений (1.7)') оператора $S$ необходимо и достаточно существование такого ненулевого функционала $z_0^* \in Z^*$, для которого выполняется неравенство*

$$\inf_{\lambda\geqslant 0}\ \sup_{u\in D}\ \inf_{\|y^*\|=\lambda}\ \{h_T(u, y^*, N) - h_S(u, z_0^*, M')\} \geqslant 0,$$

*где $M'$ — выпуклое соответствующее $M$ множество.*

* Через $p(z_0^*)$ обозначается выражение, стоящее в левой части неравенства (3.4).

Доказательство опирается на схему доказательства теоремы 3.5 и лемму 1.3.

*Замечание 3.3.* Если $Z = R^k$, а выпуклое соответствующее $M$ множество $M'$ ограничено, то условие компактности $P$, приведённое в теореме 3.6, может быть опущено.

*Замечание 3.4.* Легко видеть, что $P$ компактно, если выполняются следующие условия: $D$ — компактное множество линейного топологического пространства $U$; $N$ — замкнутое множество; $S$ — выпуклый полунепрерывный сверху оператор; а оператор $T$ обладает тем свойством, что при любом $u_0 \in D$ и любой окрестности $Y_0$ точки $0 \in Y$ существует такая окрестность $U_0$ точки $0 \in U$, для которой $Tu_0 \subset Tu + Y_0$ при всех $u \in (u_0 + U_0) \cap D$.

## §4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ.

Существует общирная литература, посвященная изучению теории двойственности и оптимальности в математическом програмировании (см., например, [6], где указана дальнейшая лирaтетура). Мы будем в этом параграфе рассматривать двойственность и оптимальность в процессах с многозначными операторами.

*1. Двойственность.* В этом пункте будем предполагать, что $S : D \to Z \equiv R^1$ — некоторый заданный функционал (т.е. однозначный оператор из $D$ в $R^1$).

*Задача 1.* Найти $s_1 = \inf \{ Su : u \in D, Tu \cap N \neq \emptyset \}$.

Положим

$$L_1 (u, y^*) = h^T (u, y^*, N) - Su \qquad (u \in D, y^* \in N^*),$$

$$S_1' y^* = \inf \{ - L_1 (u, y^*) : u \in D \}.$$

*Задача 1'.* Найти $s_1' = \sup \{ S_1' y^* : y^* \in N^* \}$.

**Теорема 4. 1.** *Предположим, что $Y$ — любое линейное топологическое пространство; $T$ — выпуклый многозначный оператор; $S$ — выпуклый функционал и по крайней мере одна из двух систем (2.6), (2.7) совместна.*

*Для конечности $s_1$ необходимо и достаточно, чтобы нашёлся такой функционал $y^* \in N^*$, для которого функционал $- L_1 (u, y^*)$ переменного и ограничен снизу на множестве $D$. Кроме того, $s_1 = s_1'$,*

Здесь и в дальнейшем условимся положить $\sup \{ h (x) : x \in C \} = - \infty$, если $h (x) = - \infty$ для всех $x \in C$ $(h (x) \in R^1$, $C$ — некоторое множество).

*Доказательство.* Ясно, что конечность $s_1$ эквивалентна существованию такого числа $\alpha$, что совместна система

$$u \in D, Tu \cap N \neq \emptyset, 0 < - Su + \alpha,$$

т.е. эквивалентна по лемме 1.3 существованию такого функционала $y^* \in N^*$, для которого $\inf \{ - L_1 (u, y^*) : u \in D \} \geqslant \alpha$, т.е. функционал $- L_1 (u, y^*)$ переменного $u$ ограничен снизу на $D$.

Докажем теперь, что $s_1 = s'_1$. Если $s_1 = -\infty$, то из приведенных выше рассуждений ясно, что требуемое равенство выполняется. Предположим теперь, что $s_1 > -\infty$. Выше мы показали выполнение неравенства $s'_1 \geqslant s_1$. Если $s'_1 > s_1$, то существует такой функционал $y^* \in N^*$, для которого $S'_1 \ y^* > s'_1 - \varepsilon$, где $\varepsilon$ выбрано так, что $s'_1 - \varepsilon > s_1$. Лемма 1.3 показывает несовместность системы

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing\ ,\ 0 < -Su + (s'_1 - \varepsilon),$$

т. е. для всех $u$, удовлетворяющих ограничениям (1.1), имеем $Su \geqslant s_1 - \varepsilon > s_1$, что невозможно. Таким образом, $s'_1 = s_1$. Теорема доказана.

Если обе системы (2.6), (2.7) несовместны, то теорема 4.1 может быть неверной. Однако имеет место

**Теорема 4.2.** *Предположим, что $U$ — отделимое локально выпуклое линейное топологическое пространство; $D$—компактное множество; $N$ — замкнутое множество; $T$ — выпуклый полунепрерывный сверху оператор; $S$ — линейный непрерывный функционал; система (1.1) совместна. Тогда $s_1 > -\infty$ и $s_1 = s'_1$.*

Действительно, имеем $s_1 \geqslant \min\{Su\colon u \in D\} > -\infty$. На основе леммы 1.2 и схемы доказательства теоремы 4.1 легко доказать выполнение равенства $s_1 = s'_1$.

Перейдём к рассмотрению теоремы двойственности для задачи с ограничениями (1.7)'.

*Задача 2.* Найти $s_2 = \inf\{Su : u \in D,\ Tu \subset N\}$.

Предположим, что $Y = R^n$. Положим

$$L_2(u, \lambda) = \inf_{\|y^*\| = \lambda} \{h_T(u, y^*, N) - Su\} \quad (\lambda \geqslant 0,\ u \in D),$$

$$S'_2\lambda = \inf\{-L_2(u, \lambda) : u \in D\}.$$

*Задача 2'.* Найти $s'_2 = \sup\{S'_2\lambda : \lambda \geqslant 0\}$.

При помощи леммы 1.4 можно доказать справедливость следующей теоремы.

**Теоре а 4,3.** *Предположим, что $Y = R^n$; $T$ — вогнутый оператор, для которого $Tu$ компактно при любом $u \in D$; $S$-выпуклый функционал; $N$ — ограниченное замкнутое (или открытое) множество и система (1.7) совместна.*

*Для конечности $s_2$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое неотрицательное число $\lambda$, для которого функционал $-L_2(u, \lambda)$ переменного и ограничен снизу на $D$. Кроме того, $s_2 = s'_2$.*

2. *Оптимальность.* Теоремы двойственности 4.1 — 4.3 дают возможность исследовать оптимальность заданного функционала $Su$ на множестве ограничений (1.1) или (1.7)'. Но в этом пункте для общности будем изучать оптимальность не функционала, а

некоторого однозначного оператора $S$, и поэтому мы опять будем использовать леммы из §I. Всюду в этом пункте будем считать, что $S : D \to Z$ — некоторый однозначный оператор, а $M \subset Z$ — некоторый выпуклый конус.

*Определение 4.1. Пусть $Z$ — любое линейное пространство. Однозначный оператор $S : D \to Z$ называется $M$ — выпуклым на $D$, если*

$\alpha Su_1 + (1-\alpha)Su_2 - S(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \in M$ *при всех* $\alpha \in [0,1]$ *и* $u_i \in D$ $(i=1,2)$.

*Определение 4.2. Точка $u_0 \in U$ называется допустимой по ограничениям (1.1) ((1.7)'), если она удовлетворяет условиям (1.1) (соответственно (1.7)').*

Как известно, в зависимости от топологического свойства конуса $M$ приняты следующие определения оптимальности оператора $S$.

*Определение 4.3. Пусть $Z$ — линейное топологическое пространство и $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. Допустимая по ограничениям (1.1) ((1.7)') точка $u_0$ называется оптимальной точкой однозначного оператора S на множестве ограничений (1.1) ((1.7)'), если не найдётся никакая допустимая по ограничениям (1.1) ((1.7)') точка $u$ со свойством $Su_0 - Su \in \operatorname{int} M$.*

Если $\operatorname{int} M = \varnothing$, то определение 4.3 теряет смысл. Поэтому принято

*Определение 4.4. Допустимая по ограничениям (1.1) ((1.7)') точка $u_0$ называется оптимальной точкой однозначного оператора $S$ на множестве ограничений (1.1) ((1.7)'), если не найдётся никакая допустимая по ограничениям (1.1) ((1.7)') точка $u$ со свойством $Su_0 - Su \in M_0$ $(M_0 = M \setminus \{0\})$.*

Если конус $M$ открыт, то $M_0 = M = \operatorname{int} M$ и определение 4.3 совпадает с определением 4.4.

**Теорема 4.4.** *Предположим, что $Y$, $Z$ — любые линейные топологические пространства; $T$ — выпуклый однозначный оператор; $S$ — $M$-выпуклый однозначный оператор, где $\operatorname{int} M \neq \varnothing$. Предположим, далее, что хотя бы одна из двух систем (2.6), (2.7) совместна.*

1. *Если допустимая по ограничениям (1.1) точка $u_0$ является оптимальной (в смысле определения 4.3) точкой оператора $S$ на множестве ограничений (1.1), то найдутся такие функционалы $y_0^* \in N^*$, $z_0^* \in M$, $(z_0^* \neq 0)$, что точка $(u_0, y_0^*) \in U \times Y^*$ является седловой точкой функционала*

$$L(u, y^*, z_0^*) = h^T(u, y_0^*, N) - (z_0^*, Su)$$

*на множестве $D \times N^*$, т.е. для всех $u \in D$, $y^* \in N^*$ имеем*

$$L(u, y_0^*, z_0^*) \leqslant L(u_0, y_0^*, z_0^*) \leqslant L(u_0, y^*, z_0^*). \tag{4.1}$$

2. *Обратно, если $Y$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство, $Tu$ — замкнутое множество при любом $u \in D$, $N$ — компактное множество и точка $u_0 \in D$ такова, что найдутся функционалы $y_0^* \in N^*$, $z_0^* \in M^*$ $(z_0^* \neq 0)$, удовлетворяющие условиям (4.1) при всех $u \in D$, $y^* \in N$, то $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.3) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1).*

*Доказательство.* 1. Докажем первое утверждение теоремы. Из оптимальности точки $u_0$ следует несовместность системы

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing,\ (Su_0 - Su - M) \cap \operatorname{int} M \neq \varnothing. \qquad (4.2)$$

Применив лемму 1.3 к системе (4.2) и заметив, что $h^T(u_0, y^*, N) > 0$ при всех $y^* \in N^*$, найдём функционалы $y_0$, $z_0$, что для всех $u \in D$, $y^* \in N^*$ выполняется неравенство

$$L\ (u,\ y_0^*,\ z_0) \leqslant L\ (u_0,\ y^*,\ z_0^*).$$

Отсюда вытекает выполнение неравенств (4.1) для всех $u \in D$, $y^* \in N^*$.

2. Докажем второе утверждение. Второе из неравенств (4.1) даёт $\sup\limits_{y \in Tu_0 - N} (y^*, y) \geqslant 9$ для всех $y^* \in N^* = Y^*$.

В силу замкнутости множества $Tu_0 - N$ имеем $0 \in Tu_0 - N$, т.е. $u_0$ допустимая по ограничениям (1.1) точка. Если теперь в (4.1) положить $y^* = 0$, то получим

$$L\ (u,\ y_0^*,\ z_0^*) + (z_0^*,\ Su_0) \leqslant 0$$

для всех $u \in D$, т.е. по лемме 1.3 система (4.2) несовместна. Таким образом, точка $u^0$ является оптимальной (в смысле определения 4.3) точкой оператора $S$ на множестве ограничений (1.1).

*Замечание 4.1.* Второе утверждение теоремы 4.4 верно и в случае, когда вместо компактности множестве $N$ предположим, что $N$ замкнуто и $Tu$ компактно при любом $u \in D$.

Теорема 4.5. *Предположим, что*

*а. $U, Y$ — отделимые локально выпуклые линейные топологические пространства, $Z$ — линейное нормированное пространство;*

*б. $D$ — компактное множество;*

*в. $N$, $M$ — замкнутые множества, причём $M$ — конус, обладающий тем свойством, что существует по крайней мере одна точка $m \in M$, для которой $-m \bar{\in} M$;*

*г. $T$ — выпуклый полунепрерывный сверху оператор, $S$ — непрерывный линейный оператор;*

*д. Система (1.1) совместна.*

*Если оптимальная (в смысле определения 4.4) точка $u_0$ оператора $S$ на множестве ограничений (1.1) является невырожденной в том смысле, что существуют функционалы $y_0^* \in N^*$, $z_0^* \in M^*$ ($\| z^* \| = 1$) со свойством*

$$\inf_{y^* \in N^*,\ z^* \in M^*,\ \| z^* \| = 1}\ \sup_{u \in D} \{ L\ (u,\ y^*,\ z^*) + (z^*,\ Su_0) \} =$$

$$\sup_{u \in D} \{ L\ (u,\ y_0^*,\ z_0^*) + (z_0^*,\ Su_0) \},$$

*то имеем неравенства (4.1) для всех $u \in D$, $y^* \in N^*$. Обратно, если условие (1.5) выполняется и точка $u_0 \in D$ такова, что найдутся функционалы $y_0^* \in N$, $z_0^* \in M^*$ ($\| z_0^* \| = 1$), удовлетворяющие условию (4.1), то $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.4) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1).*

Доказательство проводится при помощи леммы 1.2.

Рассмотрим случай, когда множество $D$ может не быть компактным и оптимаьная точка может быть вырожденной. Для этого введём в рассмотрение

*Определение 4.5. Множество, состоящее из конечного числа множеств $U_1,\dots,U_k$, называется допустимым, если*

1. $U_i \subset D,\ i = 1,\dots, k$;
2. $U_i,\ i = 1,\dots, k$, *выпуклы и компактны;*
3. *Система*

$$u \in [U_1,\dots, U_k],\ Tu \cap N \neq \varnothing$$

*совместна, где через $[U_1, \dots, U_k]$ обозначается выпуклая оболочка объединения множеств $U_i,\ i = 1,\dots, k$.*

**Теорема** 4.6. *Предположим, что выполняются условия а, в—д, приведённые в теореме 4.5.*

1. *Пусть $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.4) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого допустимого множества $\{U_1, \dots, U_k\}$ найдутся такие зависящие от $\varepsilon, U_1,\dots, U_k$ функционалы $y_0^* \in N,\ z_0^* \in M^*$ ($\| z_0^* \| = 1$), что неравенство*

$$L(u, y_0^*, z_0^*) < L(u_0, y^*, z_0^*) + \varepsilon \tag{4.3}$$

*выполняется при всех $u \in [U_1,\dots, U_k],\ y^* \in N^*$.*

2. *Обратно, пусть выполняется неравенство (1.5) для всех $m \in M_0$ и точка $u_0$ принадлежит выпуклой оболочке объединения конечного числа множеств, которые образуют некоторое допустимое множество. Пусть, далее, для любого $\varepsilon > 0$ и для любого допустимого множества $\{U_1,\dots, U_k\}$ найдутся такие зависящие от $\varepsilon$, $U_1,\dots, U_k$ функционалы $y_0^* \in N^*,\ z_0^* \in M^*$ ($\| z_0^* \| = 1$) что выполняется неравенство (4.3) при всех $u \in [U_1,\dots, U_k]$, $y^* \in N^*$. Тогда $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.4) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1).*

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы следует из леммы 1.2 и несовместности системы

$$u \in D,\ Tu \cap N \neq \varnothing,\ Su_0 - Su \in M_0.$$

Докажем второе. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $\{U_1, \dots, U_k\}$ — любое такое допустимое множество, что $u_0 \in [U_1,\dots, U_k]$. В (4.3) положив $u = u_0$, $y^* = y_0^* + y'^*$, где $y'^* \in N^*$, получим

$$\sup_{y \in Tu_0} (y^*, y) > \inf_{y \in N} (y^*, y) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $y'^* \in N^*$ ясно, что $Tu_0 \cap N \neq \varnothing$, т.е. $u_0$ — допустимая по ограничениям (1.1) точка. Пусть теперь $Su_0 - S\bar{u} \in M_0$ — для некоторого $\bar{u}$, удовлетворяющего ограничениям (1.1). Очевидно, что $\{U_1,\dots, U_k, \{\bar{u}\}\}$ — допустимое множество. Предположим, что $\bar{y}_0 \in N^*,\ \bar{z}_0^* \in M^*$ ($\| \bar{z}_0^* \| = 1$) — зависящие от $\varepsilon$, $U_1,\dots, U_k, \{\bar{u}\}$ функционалы, для которых имеем

$$L(u, \bar{y}_0^*, \bar{z}_0^*) < L(u_0, y^*, \bar{z}_0^*) + \varepsilon \tag{4.4}$$

при всех $u \in [U_1,..., U_k, \{\overline{u}\}]$, $y^* \in N^*$.

Положив $y^* = 0$ в (4.4), получим

$$(\overline{z}_0^*, Su_0 - S\overline{u}) < - h^T(\overline{u}, y_0^*, N) + \varepsilon < \varepsilon,$$

что противоречит условию (1.5) при $m = Su_0 - S\overline{u}$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.
Иэ теоремы 4.6 и её доказательства легко следует

*Следствие 4. Предположим, что выполняются условия а, в, д, приведенные в теореме 4.6, и кроме того, $T$—аффинный полунепрерывный сверху на $D$ оператор, $S$ — непрерывный линейный оператор.*

*1. Если $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.4) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1), то для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных точек $u_i \in D$, выпуклая оболочка которых содержит $u_0$, найдутся зависящие от $\varepsilon$, $u_i$ $(i = 1,..., k)$ функционалы $y_0^* \in N^*$ $z_0^* \in M^*$ $(\| z_0^* \| = 1)$, удовлетворяющие неравенствам*

$$L(u_i, y_0^*, z_0^*) < L(u_0, y_0^*, z_0^*) + \varepsilon, \ (i = 1, ..., k), \tag{4.5}$$

$$0 \leqslant h^T(u_0, y_0^*, N) < \varepsilon. \tag{4.6}$$

*2. Обратно, пусть выполняется неравенство (1. 5) при любом $m \in M_0$ и $u_0$ — некоторая допустимая по ограничениям (1.1) точка. Если для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных точек $u_i \in D$ $(i = 1, ..., k)$, выпуклая оболочка которых содержит $u_0$, найдутся зависящие от $\varepsilon$, $u_i$ $(i = 1, ..., k)$ функционалы $y_0^* \in N^*$, $z_0^* \in M^*$ $(\|z_0^*\| = 1)$, удовлетворяющие неравенствам (4.5), (4.6), то $u_0$ — оптимальная (в смысле определения 4.4) точка оператора $S$ на множестве ограничений (1.1).*

Заметим, что утверждения следствия 4.1 близки к утверждениям теоремы 1.2 работы [7] (для линейных задач с однозначными операторами).

**Т орема 4.7.** *Предположим, что $Y = R^n$; $Z$ — любое линейное топологическое пространство; $N$ — ограниченное замкнутое (или открытое) множество; $M$ — выпуклый конус: $\operatorname{int} M \neq \varnothing$; $T$—выпуклый оператор, для которого $Tu$ компактно при любой $u \in D$; $S$-некоторый $M$-выпуклый конус; система (1.7) совместна. Точка $u_0 \in D$ является оптимальной (в смысле определения 4.3) оператора $S$ на множестве ограничений (1. 7)' тогда и только тогда, когда найдутся такое число $\lambda_0 \geqslant 0$ и такой функционал $z_0^* \in M^*$ $(z_0^* \neq 0)$, что точка $(u_0, \lambda_0) \in U \times R^1$ является седловой точкой функционала*

$$l(u, \lambda, z_0^*) = \inf_{\| y^* \| = \lambda} \{ h_T(u, y^*, N) - (z_0^*, Su) \}$$

*на множестве $D \times R_+$, т.е. для всех $u \in D$, $\lambda \in R_+$ имеем*

$$l(u, \lambda_0, z_0^*) \leqslant l(u_0, \lambda_0, z_0^*) \leqslant l(u_0, \lambda, z_0^*).$$

Доказательство проводится при помощи леммы 1.4.

*Поступила в редакцию 1-IV-1974*

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. *Суперлинейные точечно - множественные отображения и модели экономической динамики.* Успехи математических наук, Т. XXX, № 5, 1970.
2. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. *Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные.* Кибернетика, №3. 1972.
3. БУРБАКИ Н. *Топологические векторные простоанства.* ИЛ, Москва, 1959.
4. CLAUDE BERGE. *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* Dunod, Paris, 1959.
5. БУРБАКИ Н. *Общая топология. Основные структуры.* Наука, Москва, 1968.
6. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г, *Теория двойственности в математическом програмировании и её приложения.* Наука, Москва, 1971.
7. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н, НЕНАХОВ Э.И. *Необходимые условия минимума в задачах с операторными ограничениями.* Кибернетика, №3, 1971.