ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 1, № 1 (1976)

О5 ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО ШПУНТОМ

NGÔ VĂN LƯỢC

Математический Институт

До сих пор точное решение задачи фильтрации в неоднородной среде найдено только для некоторых редких случаев. В работе [1] П. Я. Полубариновой-Кочиной методом аналитической теории линейных дифференциальных уравнений решена неоднородная задача фильтрации в двух слоях одинаковой тонщины. Тоже Ле Ван Тхиемом [2] и автором [3] дано решение этой задачи при помощи принципа аналитического продолжения. В работах [4] и [5] Г.Г. Тумашевым и Н. Б. Ильинским исследована неоднородная задача фидьтрации с коэффициентом фильтрации $k(x, y)$, где $\sqrt{k(x, y)}$ — гармоническая функция. Эта работа посвящена исследованию неоднородной задачи фильтрации с коэффициентом фильтрации $k(x, y) = \dfrac{1}{y^k}$, k — нечётное число. Благодаря теории p-аналитических функций Г. Н. Положего [6] даётся эффективное решение для некоторых частных случаев.

1. Постановка задачи.

Схема задачи дана на фигуре 1. Пусть коэффициент фильтрации имеет вид $k(x, y) = \dfrac{1}{(-y)^k}$, где k — целсе число.

Как известно (см. например [6]), рассматриваемая задача фильтрации приведена к краевой задаче p - аналитической функции $\omega = \varphi + i\psi$ при $p = \dfrac{1}{(-y)^k}$

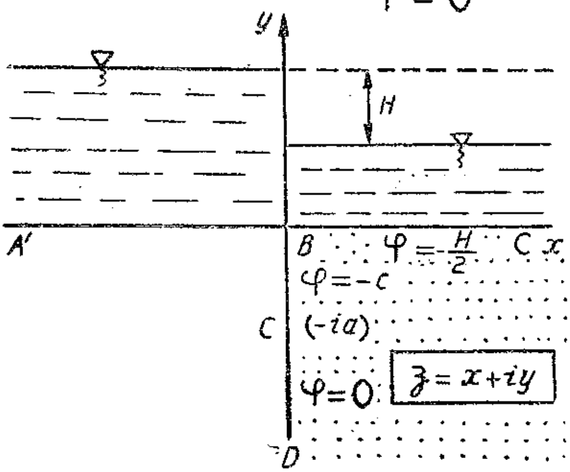
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \quad (-y)^k \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -(-y)^k \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

удовлетворяющей краевым условиям

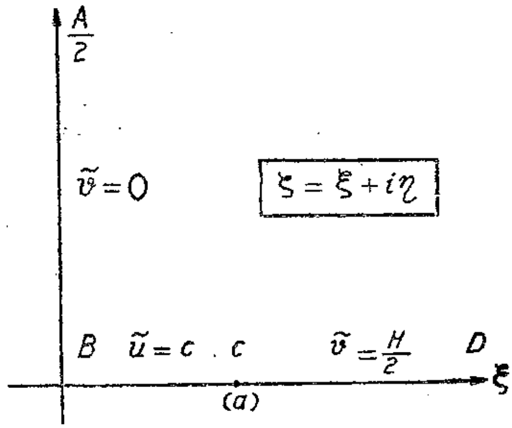
$$\left.\begin{array}{lll} \text{на} & A'A' & \varphi = \dfrac{H}{2} \\ \text{на} & AB & \varphi = -\dfrac{H}{2} \\ \text{на} & B'BC & \psi = -c \end{array}\right\}, \tag{2'}$$

где H — пьезометрический напор, c — ещё неопределённая постоянная. В силу симметричности задачи можно рассматривать задачу только для правой полуплоскости $ABCD$ при условии на CD :

$$\varphi = 0$$



фиг. 1



фиг. 2

Приводя замену функции

$$w = \widetilde{u} + i\,\widetilde{v} = i\left(\omega + \frac{H}{2}\right), \text{ т. е. }, \widetilde{u} = -\psi, \widetilde{v} = \varphi + \frac{H}{2}, \tag{3}$$

и замену переменного

$$\zeta = \xi + i\eta = iz, \text{ т. е. } \xi = -y, \eta = x. \tag{4}$$

Имеем

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \xi} = \dfrac{1}{\xi^k}\dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta} = -\dfrac{1}{\xi^k}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} \end{array}\right\}, \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{v}\,(0, \eta) = 0 \quad , & 0 \leqslant \eta < \infty \\ \widetilde{u}\,(\xi, 0) = c \quad , & 0 \leqslant \xi \leqslant a \\ \widetilde{v}\,(\xi, 0) = \dfrac{H}{2} \, , & a < \xi < \infty \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Итак, мы придём к следующей задаче. Найти функцию $w = \widetilde{u} + i\,\widetilde{v}$, являющуюся ξ^k — аналитической функцией в области G плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (см. фигур. 2) и удовлетворяющую краевым условиям (6).

Эта задача представляет собой частный случай следующей задачи [6] : Найти ξ^k — аналитическую в области g функцию $w = \tilde{u} + i\,\tilde{v}$ по краевым условиям :

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}\Big|_{\eta=0} &= \tilde{\Phi}\,(\xi) && (0 \leqslant \xi \leqslant a) \\ \tilde{v}\Big|_{\eta=0} &= \tilde{\Psi}(\xi)\Psi(\xi)\,\xi^{\xi-1} && (a \leqslant \xi < \infty) \\ \tilde{v}\Big|_{\xi=0} &= 0 && (0 \leqslant \eta < \infty) \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Решение задачи (7) ищется в виде [6]

$$w\,(\zeta) = \int\limits_0^{\xi} \left[\xi^{1-k}\; u\,(x,\eta) + i\,x\,v\,(x,\eta) \right] (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1}\, dx\ , \tag{8}$$

где $f\,(\zeta) = u\,(\xi,\eta) + i\,v\,(\xi,\eta)$ является аналитической в области G функцией и удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} v|_{\xi=0} &= 0\ , && 0 \leqslant \eta < \infty \\ u|_{\eta=0} &= \Phi(\xi), && 0 \leqslant \xi \leqslant a \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

где

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \mu\, \dfrac{d}{d\xi} \displaystyle\int\limits_0^{\xi} \dfrac{d^m[\tilde{\Phi}\,(x)x^{k-1}]}{(dx^2)^m}\; \dfrac{x dx}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}}\ , & k \neq 2m \\[2ex] \mu\xi\, \dfrac{d^m(\tilde{\Phi}\,(\xi)\,\xi^{k-1})}{(d\xi^2)^m}\ , & k = 2m, \end{cases} \tag{9'}$$

$$m = \left[\frac{k}{2}\right],\ \mu = \frac{2}{\Gamma\!\left(m - \dfrac{k}{2} + 1\right)\Gamma\!\left(\dfrac{k}{2}\right)}\ ,$$

и

$$\xi\,\mathrm{Im}\left\{ f(\zeta)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} \right\}_{\eta=0} = \psi(\xi), \qquad (a \leqslant \xi < \infty), \tag{10}$$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} (-1)^{m-1}\mu\, \dfrac{d}{d\xi} \displaystyle\int\limits_{\infty}^{\xi} \dfrac{d^m\,(\tilde{\psi}\,(x)\,x^{k-1})}{(dx^2)^m}\; \dfrac{x dx}{(x^2-\xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}\ , & k \neq 2m, \\[2ex] (-1)^{m-1}\,\mu\xi\, \dfrac{d^m(\tilde{\psi}\,(\xi)\xi^{k-1})}{(d\xi^2)^m}\ , & k = 2m. \end{cases} \tag{10'}$$

Для задачи (7) Г.Н. Положим дана общая схема решения. Для нашей рассматриваемой задачи, мы найдём решение в явном виде.

В нашем случае имеем

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \mu m!\, c &, \quad k \neq 2m, \\ \mu c \, \dfrac{(2m-1)!!}{2^{m+1}} &, \quad k = 2m, \end{cases} \tag{9''}$$

и

$$\Psi(\xi) = 0 \quad , \quad (a \leqslant \xi < \infty). \tag{10''}$$

Подставляя (9'') в (9) и (10'') в (10) получаем следующую краевую задачу для аналитической функции $f(\zeta)$:

— Случай $k = 2m$ (k — чётное)

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{\eta=0} &= \frac{(2m-1)!!}{(m-1)!}\,\frac{c}{2^m}, && 0 \leqslant \zeta \leqslant a, \\ v\Big|_{\eta=0} &= 0 &, \quad & a < \xi < \infty, \\ v\Big|_{\xi=0} &= 0 &, \quad & 0 \leqslant \eta < \infty \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

— Случай $k = 2m + 1$ (k — нечётное)

$$\left.\begin{aligned} u\Big|_{\eta=0} &= \mu m!\, c &, \quad & 0 \leqslant \xi \leqslant a, \\ u\Big|_{\eta=0} &= 0 &, \quad & a < \xi < \infty, \\ v\Big|_{\xi=0} &= 0 &, \quad & 0 \leqslant \eta < \infty \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

§ 2. Решение задачи.

Сейчас рассмотрим случай $k = 2m + 1$ (k — нечётное).

В силу (12) можно аналитически продолжать функцию $f(\zeta)$ через мнимую ось $O\eta$ следующим образом

$$f(-\bar{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}, \tag{13}$$

или

$$\left.\begin{aligned} u(-\xi, \eta) &= u(\xi, \eta) \\ v(-\xi, \eta) &= -v(\xi, \eta) \end{aligned}\right\}. \tag{13'}$$

Следовательно получаем задачу : Найти аналитическую на верхней полуплоскости функцию $f(\zeta)$, зная её вещественную часть на вещественной оси

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \mu m!\, c \qquad |\,\xi\,| \leqslant a \\ u(x, 0) &= 0 \qquad\quad\; |\,\xi\,| > a \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Как известно, решение последней задачи ищется формулой Шварца :

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)\, dt}{t - \zeta} + i c_0,$$

где $c_0 = \operatorname{Im} f(\infty)$. В силу (12) имеем $c_0 = 0$. Поэтому

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)\, dt}{t - \zeta}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (8) для случая $k > 1$ получаем

$$w(\zeta) = \int_0^{\xi} \left[\zeta^{-2m} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t,0)\,dt}{t-x-i\eta} + ix \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t,0)\,dt}{t-x-i\eta}\right] \left(\xi^2 - x^2\right)^{m-\frac{1}{2}} dx.$$

После несложных вычислений можно написать $w(\zeta)$ в виде

$$w(\zeta) = \int_{\infty}^{\infty} u(t,0)\,dt \left\{ \xi^{-2m} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{(\xi^2-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dx}{t-i\eta-x} + \right.$$

$$\left. + i \operatorname{Im} \frac{(t-i\eta)}{2\pi i} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{(\xi^2-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dx}{t-i\eta-x} - i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\xi}^{\xi} (\xi^2-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dx \right\}.$$

Сначала рассмотрим последний интеграл в правой части соотношения (16). В силу перемены $x = \xi \cos\varphi$ имеем [7]

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\xi}^{\xi} (\xi^2-x^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\xi^{2m}}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\xi^{2m}}{2}. \tag{17}$$

Для остальных интегралов нужно вычислить интеграл вида

$$J = \int_{-\xi}^{\xi} \frac{(\xi^2-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{t-i\eta-x}\,dx\,. \tag{18}$$

Легко видеть, что

$$J = \xi^{2m} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2m}\varphi\, d\varphi}{t-iy-\xi\cos\varphi}. \tag{19}$$

Сейчас рассмотрим интеграл вида

$$\Phi_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{p+q\,\mathrm{sos}\varphi}, \; q \neq 0, \; n \text{ — целое} \qquad , n \geqslant 1, \tag{20}$$

где p, q представляют собой, вообще говоря, комплексные параметры. Интеграл вида (20) при вещественных параметрах p, q рассмотрен в [8]:

$$\Phi_n = 2^{n-2} \frac{p}{q^2} \sum_{\nu=1}^{l} \left(\frac{q^2-p^2}{4q^2}\right)^{\nu-1} B\left(\frac{n+1-2\nu}{2}, \frac{n+1-2\nu}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{q^2-p^2}{q^2}\right)^{l} A, \tag{21}$$

где

$$A = \begin{cases} \dfrac{\pi p}{q^2}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{q^2}{p^2}}\right) & \text{при } n = 2l+2 \\ \dfrac{1}{q}\ln\dfrac{p+q}{p-q} & \text{при } n = 2l+1 \end{cases}$$

и B обозначаем функцию Бэта.

Легко проверить, что формула (21) имеет силу и для случая, когда p и q представляют собой комплексные параметры.

Подставляя (21) в (19) получаем

$$J = (2\xi)^{2m-2}(t-i\eta)\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{\xi^2-(t-i\eta)^2}{4\xi^2}\right)^{\nu-1} B\left(\frac{2(m-\nu)+1}{2}, \frac{2(m-\nu)+1}{2}\right) + \pi(\xi^2 - i(t-\eta)^2)^{m-1}\left(t-i\eta-\sqrt{(t-i\eta)^2-\xi^2}\right). \tag{22}$$

Следовательно имеем

$$w(\zeta) = \mu\, m!\, c\int_{-a}^{a}\operatorname{Re}\left[\frac{2^{2m-1}(t-i\eta)}{2\pi i\xi^2}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{\xi^2-(t-i\eta)^2}{4\xi^2}\right)^{\nu-1}\right.$$

$$\left. B\left(\frac{2(m-\nu)+1}{2}, \frac{2(m-\nu)+1}{2}\right) + \frac{\xi^{-2m}}{2i}(\xi^2-(t-i\eta)^2)^{m-1}\left(t-i\eta-\sqrt{(t-i\eta)^2-\xi^2}\right)\right]$$

$$+ i\operatorname{Im}\left[\frac{(2\xi)^{2m-2}(t-i\eta)^2}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{\xi^2-(t-i\eta)^2}{4\xi^2}\right)^{\nu-1} B\left(\frac{2(m-\nu)+1}{2}, \frac{2(m-\nu)+1}{2}\right) + \right.$$

$$\left.+\frac{(t-i\eta)}{2i}\left(\xi^2-(t-i\eta)^2\right)^{m-1}\left(t-i\eta-\sqrt{(t-i\eta)^2-\xi^2}\right) - \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{\xi^{2m}}{2}\right]\Bigg\}. \tag{23}$$

В силу (23) нам ещё нужно вычислить интегралы вида

$$\int (t-i\eta)^j\, dt \text{ и } \int (t-i\eta)^j \sqrt{(t-i\eta)^2-\xi^2}\, dt, \qquad j \text{ — целое}. \tag{24}$$

По таблице интегралов в [9] такие интегралы можно вычислить. Поэтому по принципу нами найдено эффективное решение для случая $k = 2m+1$ (k — нечётное). Для иллюстрации метода ниже рассмотрим некоторые частные случаи, решение которых даётся в явном виде.

§ 3. Частные случаи.

I. Случай $k(x, y) = -\dfrac{1}{y^3}$.

В этом частном случае имеем

$$\widetilde{u} = \frac{2}{\pi}c\left[-\frac{1}{\xi^2}\operatorname{Im}(\eta+ia)^2 + \frac{1}{\xi^2}\operatorname{Im}(\eta+ia)\sqrt{(\eta+ia)^2+\xi^2}\right.$$

$$\left. + \operatorname{Im}\ln\left(\eta + ia + \sqrt{(\eta+ia)^2+\xi^2}\right)\right],$$

$$\widetilde{v}=\frac{4}{3\pi}c\left[\operatorname{Im}(\eta+ia)^3-\operatorname{Im}\left(\xi^2+(\eta+ia)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]. \tag{25}$$

Проверяем краевые условия.

— На $\xi=0$ имеем

$$\widetilde{v}=\frac{4c}{3\pi}[\operatorname{Im}(\eta+ia)^3-\operatorname{Im}(\eta+ia)^3]=0.$$

— На $\eta=0,\ \xi>a$

$$\widetilde{v}=\frac{4c}{3\pi}\left[\operatorname{Im}(\eta+ia)^3-\operatorname{Im}(\xi^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4c}{3\pi}(-a)^3=\frac{H}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$c=-\frac{3\pi H}{8a^3}. \tag{26}$$

— На $\eta=0,\ \xi<a$

$$\widetilde{u}=\frac{2}{\pi}c\operatorname{Im}\ln\left(ia+\sqrt{\xi^2-a^2}\right)$$

$$=\frac{2c}{\pi}\times\frac{\pi}{2}=c.$$

В силу (3), (4) и (26) получаем точное решение исходной задачи фильтрации в явном виде

$$\varphi=-\frac{H}{2}-\frac{H}{2a^3}\left[\operatorname{Im}(x+ia)^3-\operatorname{Im}\left(y^2+(x+ia)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$\psi=\frac{3H}{4a^3}\left[\frac{1}{y^2}\operatorname{Im}(x+ia)^2-\frac{1}{y^2}\operatorname{Im}(x+ia)\sqrt{(x+ia)^2+y^2}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{Im}\ln\left(x+ia+\sqrt{(x+ia)^2-y^2}\right)\right], \tag{27}$$

2. Случай $k(x,y)=-\dfrac{1}{y}$.

Этот случай автором рассмотрен в [10]. Для этого случая имеем

$$w(\xi)=\frac{H}{2a}\left[\operatorname{Im}\ln\left(\eta+ia+\sqrt{\xi^2+(\eta+ia)^2}\right)+i\operatorname{Im}\left(-\sqrt{\xi^2+(\eta+ia)^2}+ia\right)\right].$$

Комплексный потенциал исходной задачи фильтрации имеет вид

$$\varphi+i\psi=-\frac{H}{2}-\frac{H}{2a}\left[\operatorname{Im}\ln\left(x+ia+\sqrt{y^2+(ia+x)^2}\right)+\right. \tag{28}$$

$$\left.+i\operatorname{Im}\left(-\sqrt{y^2+(x+ia)^2}+ia\right)\right].$$

При помощи (28) можно проверить, что комплексный потенциал удовлетворяет всем требованиям исходной задачи фильтрации. Кроме того, легко видеть, что линия потенциала ($\varphi=c$, c — константа) представляет собой гиперболу

$$\frac{y^2}{a^2 - c^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1 \quad , \qquad 0 < c < a,$$

и линия тока ($\psi = c$, c — константа) — эллипс:

$$\frac{y^2}{\dfrac{a^2(1+c^2)}{c^2}} + \frac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}} = 1.$$

Поступила в редакцию 1-II-1974

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Я. ПОЛУБАРИНОВНА-КОЧИНА. *Теория движения грунтовых вод.* Москва, 1952.
2. *LÊ VĂN THIÊM.* Sur le problème d'infiltration à travers un sol à deux couches. Acta scientiarum vietnamicarum. Tom 1. Hanoi, 1964.
3. НГО ВАН ЛЫОК. *Об одной неоднородной задаче фильтрации в двух слоях.* Механика, том I Ханой, 1965 (на вьетнам. яз).
4. Г.Г. ТУМАЩЕВ, Н.Б. ИЛЬИНСКИЙ. *Об одном приложении сингулярного интегро-дифференциального уравнения в теории фильтрации* Изв. Вузов. Математика. 1967, 7.
5. Н.Б. ИЛЬИНСКИЙ. *О решении одной краевой задачи фильтрации в неоднородной грунте* Вычислительная и прикладная математика, вып. II, Киев, 1970.
6. Г.П. ПОЛОЖИЙ. *Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного* Киев. 1965.
7. М.Л. СМОЛЯНСКИЙ. *Таблицы неопределенных интегралов* Москва, 1969.
8. К.В. БРОДОВИЦКИЙ. *Об интеграле* $\int_0^{\pi} \frac{\sin^n \varphi d\varphi}{p + q\cos\varphi}$. ДАН СССР. том 20, №61 1956.
9. И.С. ГРАДШТЕЙН, И.М. РЫЖИК. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Москва, 1971.
10. НГО ВАН ЛЫОК. *Об одной забаче фильтрации в неоднородном грунте* Математика, том I, вып. 3, Ханой, 1973 (на вьетнам. яз.)