ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 1, № 1 (1976)

ГИПЕРЦЕНТРЫ И СИЛЬНО П-ПОЛНЫЕ, ПSR-, ПSD-ГРУППЫ

HOÀNG KỶ

Педагогический Институт г. Виня

В [3], [4] определяется Π-система уравнений над данной группой для любого множества простых чисел Π : это система n уравнений с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ $(n \geqslant 1)$ при условии $\Delta = \det(k_{ij})$, является отличным от нуля Π-числом, где через k_{ij} обозначаем суммы показателей j-ого неизвестного в i-ом уравнении. Там же сильно Π-полными группами, ΠSR-группами, ΠSD-группами называются соответственно те группы, в которых всякая Π-система разрешима, или имеет не более чем одно решение, или же разрешима и обладает единственным решением.

В настоящей работе изучаются сильная Π-изолированность гиперцентров данной группы, фактор-группы ΠSR-группы по некоторому её гиперцентру и также гиперцентральные расширения сильно Π-полной группы, ΠSR-группы, ΠSD-группы при помощи групп того же названия с некоторыми дополнительными условиями. Они являются обобщением некоторых результатов из [3], [4], [6], [7], [8]. Другие необходимые определения могут быть найдены в [9].

§ 1. Пусть дана *верхняя центральная цепь в группе* G, т. е. такая последовательность ее подгрупп

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_\alpha \subseteq \dots$$

что Z_1 есть центр группы G, $Z_\alpha \big|_{Z_{\alpha-1}}$ есть центр группы $G \big|_{Z_{\alpha-1}}$ если α непредельное число, а $Z_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta$ если α предельное. Все члены Z_α верхней центральной цепи группы G называются *гиперцентрами* этой группы, а член Z_γ этой группы, для которого выполняется условие $Z_\gamma = Z_{\gamma+1} = \dots$, называется *верхним гиперцентром* группы G.

Лемма 1. Если центр Z_1 группы G является группой без Π-кручения, то все её гиперцентры также группы без Π-кручения.

Для случая, когда Π совпадает с множеством всех простых чисел, это теорема Маклейна ([2], см. также [3]). Приведенное там доказательство нетрудно распространяется на общий случай.

Напомним, что подгруппа H группы G называется сильно *Π-изолированной* подгруппой, если всякое решение в G данной Π-системы уравнений над H, если оно существует, принадлежит к самой погруппе H.

Лемма 2. Пусть дана верхняя центральная цепь группы G

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subseteq Z_\sigma = H \tag{1}$$

Тогда Z_1 сильно Π-изолирован в Z_2 если центр группы есть группа без Π-кручения.

Доказательство. Рассмотрим Π-систему (f_A) над Z_1, пусть она имеет решение $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ в Z_2, $g_j \in Z_2$, т. е.

$$f^i(g_1, \ldots, g_n; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}) = 1, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Докажем, что $g_j \in Z_1$, $j = 1, \ldots, n$.

Трансформируя все коэффициенты Π-системы (f_A) при помощи произвольного но определённого элемента g из G, получим Π-систему $(f_{g^{-1}Ag})$ над G, решением которой является $\langle g^{-1}g_1g, \ldots, g^{-1}g_n g \rangle$.

Так как $g_j \in Z_2$, то $g^{-1}g_j g = g_j z_j$, $z_j \in Z_1, j = 1, \ldots, n$. Заменяя их в Π-системе $(f_{g^{-1}Ag})$, т. е. в (f_A), мы имеем :

$$f^i(g_1z_1, \ldots, g_nz_n; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}) = 1 =$$
$$= f^i(g_1, \ldots, g_n; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}) . f^i(z_1, \ldots, z_n; 1, \ldots, 1). \tag{3}$$

Ввиду (2) следует, что $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ является решением Π-системы (F_1) над Z_1:

$$(F_1)\begin{cases} f^1(x_1, \ldots, x_n; 1, \ldots 1) = 1, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f^n(x_1, \ldots, x_n; 1, \ldots, 1) = 1. \end{cases}$$

С другой стороны Z_1 — абелева группа без Π-кручения, т. е. Z_1 ΠSR-группа (см. [3]), откуда следует, что $z_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$, т. е.

$$g^{-1}g_j g = g_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

для произвольного элемента g из G, или $g_j \in Z_1$, что требовалось доказать.

Теорема 1. *Если центр произвольной группы G является группой без Π-кручения, то всякий её гиперцентр Z_α сильно Π-изолирован в последующей и поэтому сильно Π-изолирован в верхнем гиперцентре.*

Доказательство. По лемме 2 Z_1 сильно Π-изолирован в Z_2, следовательно доказательство теоремы можно проводить индукцией по α. Предположим, что теорема уже доказана для всех Z_β, $\beta < \alpha$ и докажем, что Z_α сильно Π-изолирован в $Z_{\alpha+1}$.

Сначала рассмотрим случай α — непредельное число. Так как

$$Z_\alpha / Z_{\alpha-1} = Z(G/Z_{\alpha-1})$$

и $Z_\alpha / Z_{\alpha-1}$ есть группа без Π-кручения (так как $Z_{\alpha-1}$ сильно Π-изолирован в Z_α), то по лемме 2, применяемой к верхней центральной цепи группы $G / Z_{\alpha-1}$, следует, что $Z_\alpha / Z_{\alpha-1}$ сильно Π-изолирован в $Z_{\alpha+1} / Z_{\alpha-1}$. Ввиду взаимно однозначного соответствия между подгруппами данной группы и её эпиморфного образа (см. [3]) следует, что Z_α сильно Π-изолирован в $Z_{\alpha+1}$, ч. т. д.

Переходим к случаю α — предельное число. Предположим, что α — такое первое порядковое число, что Z_α не сильно Π-изолирован в $Z_{\alpha+1}$. Пусть $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ является решением в $Z_{\alpha+1}$ но не в Z_α Π-системы (f_A) над Z_α, т. е. все коэффициенты a_{ij} из таблицы A принадлежат к Z_β для некоторого β, меньшего α, и все g_i, $i = 1, \ldots, n$, принадлежат к $Z_{\alpha+1}$ но некоторые из них не принадлежат к Z_α.

Ввиду предельности α и ввиду того, что некоторые элементы из $g_1, \ldots, g_n$ не принадлежат к Z_α, найдутся такое порядковое число θ, $\beta < \theta < \alpha$ и такой элемент из G, что хотя бы $[g_k, g] \in Z_\theta$ но $[g_k, g] \overline{\in} Z_{\theta'}$, $\theta' < \theta$, $1 \leqslant k \leqslant n$; так как $[g_i, g] \in Z_\alpha$ для всякого g_i, $i = 1, \ldots n$, и любого элемента g из G, и если все $[g_i, g]$ принадлежали бы к Z_β, $i = 1, \ldots, n$, g — любой элемент из G, то все g_i, $i = 1, \ldots, n$ принадлежали бы к Z_β, что противоречит предположению.

Пусть для каждого $[g_i, g]$, $i = 1, \ldots, n$, g — выше определённый элемент из G, уже определен такой индекс $\mu_i < \alpha$ что

$$[g_i, g] \in Z_{\mu_i} \text{ но } [g_i, g] \overline{\in} Z_{\mu'_i},\ \mu'_i < \mu_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Если все $\mu_i \leqslant \theta$, $i = 1, \ldots, n$, то положим $\theta = \mu$. В противном случае положим

$$\mu = \max \mu_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

и пусть $[g_i, g]$, $1 \leqslant j \leqslant n$, один из элементов $[g_i, g]$, соответствующих индексу μ

Таким образом определены такой элемент g из G и такое число μ, $\beta < \mu < \alpha$, что все $[g_i, g] \in Z_\mu$, $i = 1, \ldots, n$ в частности хотя бы $[g_j, g] \in Z_\mu$ но $[g_j, g] \in Z_{\mu'}$, $\mu' < \mu$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Полагаем $[g_i, g] = z_\mu^{(i)}$, $i = 1, \ldots, j, \ldots, n$; $z_\mu^{(i)} \in Z_\mu$.

Теперь, трансформируя все коэффициенты из таблицы A при помощи выше определенного элемента g, получим Π-систему $(f_{g^{-1}Ag})$, решением которой является

$$\langle g^{-1}g_1g, \ldots, g^{-1}g_j g, \ldots, g^{-1}g_n g\rangle = \langle g_1 z_\mu^{(1)}, \ldots, g_j z_\mu^{(j)}, \ldots, g_n z_\mu^{(n)}\rangle$$

т. е.

$$f^i(g_1 z_\mu^{(1)},\dots, g_j z_\mu^{(j)},\dots, g_n z_\mu^{(n)};\ g^{-1}a_{i1}g,\dots, g^{-1}a_{is_i}g) = 1,$$

или

$$f^i(g_1 z_\mu^{(1)},\dots, g_j z_\mu^{(j)},\dots, g_n z_\mu^{(n)};\ a_{i1} z_{\beta'}^{(1)},\dots, a_{is_i} z_{\beta'}^{(s_i)}) = 1, \tag{4}$$

где $z_{\beta'}^{(k)} \in Z_{\beta'}$, $\beta' < \beta$, $k = 1,\dots, s_i$; $i = 1,\dots, n$.

Заметим, что

$$(a z_\gamma)^{\varepsilon_1} (b z_\delta)^{\varepsilon_2} = a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} z_\gamma^{\varepsilon_1} z_\delta^{\varepsilon_2} z_\nu,$$

$$a, b \in G,\ z_\nu \in Z_\gamma,\ z_\delta \in Z_\delta,\ z_\nu \in Z_\nu, \tag{5}$$

$\nu < \max(\gamma, \delta)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$

Докажем (5), скажем, для случая $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$

$$(a z_\nu)(b z_\delta)^{-1} = a z_\gamma z_\delta^{-1} b^{-1} = ab^{-1} z_\gamma z_\delta^{-1} [z_\gamma z_\delta^{-1}, b^{-1}]$$

$$= ab^{-1} z_\gamma z_\delta^{-1} z_\nu, \qquad \nu < \max(\gamma, \delta)$$

Применяя равенства (5) к (4), получим

$$f_i^i(g_1,\dots, g_j,\dots, g_n;\ a_{i1},\dots, a_{is_i}) \times f^i(z_\mu^{(1)},\dots, z_\mu^{(j)},\dots, z_\mu^{(n)};\ z_{\beta'}^{(1)},\dots, z_{\beta'}^{(s_i)}) \times z_{\mu'}^{(i)} = 1,$$

$$i = 1,\dots, n;\ \mu' < \mu.$$

Ввиду (2) мы имеем

$$f^i(z_\mu^{(1)},\dots, z_\mu^{(j)},\dots, z_\mu^{(n)};\ z_{\beta'}^{(1)},\dots, z_{\beta'}^{(s_i)}).\ z_{\mu'}^{(i)} = 1$$

т.е. $\langle z_\mu^{(1)},\dots, z_\mu^{(j)},\dots, z_\mu^{(n)}\rangle$ является решением в Z_α Π-системы уравнений над $Z_{\mu''}$, $\mu'' = \max(\beta', \mu') < \mu$. Ввиду сильной Π-изолированности всех Z_γ в Z_α, $\gamma < \alpha$ следует, что $z_\mu^{(1)},\dots, z_\mu^{(n)}$ принадлежат к $Z_{\mu''}$, в частности

$$z_\mu^{(j)} = [g_j, g] \in Z_{\mu''},\ \mu'' < \mu,$$

что противоречит предположению. Этим теорема вполне доказана.

Теорема 2. *Всякая Π-полная ZA-группа, центр которой является группой без Π-кручения сильно Π-полна.*

Доказательство. Пусть G есть ZA-группа и пусть

$$E = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subset Z_\gamma = G \tag{1}$$

есть её верхняя центральная цепь. Для случая $\gamma = 1$, т. е. для абелевых групп без Π-кручения, теорема уже доказана (см. [3], [5]). Поэтому доказательство можно проводить индукцией по длине γ.

Если γ — предельное число, то $G = \bigcup_{\beta<\gamma} Z_\beta$. По теореме 1 все гиперцентр Z_β, $\beta < \gamma$, сильно Π-изолированы в верхнем гиперцентре, т. е. в G, следовательно все они Π-полны. Поэтому по предположению индукции все Z_β, $\beta < \gamma$, сильно Π-полны и G, являющаяся объединением сильно Π-полных групп, будет сильно Π-полной группой.

Если γ — непредельное число, то рассмотрим фактор-группу по центру $G/_Z$. Она является Π-полной ZA-группой с верхней центральной цепью длины $\gamma-1$, и её центр $Z(G/_Z) = Z_2/_Z$ без Π-кручения так как Z сильно Π-изолирован в Z_2 по лемме 1, следовательно $G/_Z$ сильно Π-полна. По теореме 1 центр Z сильно Π-изолирован в G, следовательно Z, являющийся абелевой Π-полной группой, будет сильно Π-полной группой (см, [3]). Итак G является центральным расширением сильно Π-полной группы при помощи сильно Π-полной группы, поэтому G сильно Π-полна (см. [4]), ч. т. д.

Теорема 3. *Если центр произвольной группы G есть группа без Π-кручения и $G/_{Z_\alpha}$ есть ΠSR-группа, где Z_α—некоторый гиперцентр группы G, то сама G будет ΠSR-группой.*

Доказательство. Если $\alpha = 1$, эта теорема доказана в [3]. Поэтому доказательство теоремы можно проводить индукцией по α. Предположим, что для всякого $\beta < \alpha$ из того, что $G/_{Z_\beta}$ является ΠSR-группой следует, что G также является ΠSR-группой.

Если α — непредельное число, то

$$G/_{Z_\alpha} \cong (G/_{Z_{\alpha-1}}) \Big/ (Z_\alpha/_{Z_{\alpha-1}}) = (G/_{Z_{\alpha-1}}) \Big/ Z\,(G/_{Z_{\alpha-1}}).$$

По теореме 1 $Z_{\alpha-1}$ сильно Π-изолирован в Z_α, следовательно $Z_\alpha/_{Z_{\alpha-1}}$, т. е есть абелева группа без Π-кручения, поэтому она является ΠSR-группой (см. [3]) Итак $G/Z_{\alpha-1}$ является центральным расширением ΠSR-группы при помощи ΠSR-групп пы, следовательно по [4] $G/_{Z_{\alpha-1}}$ является ΠSR-группой и по предположению сама G является ΠSR-группой.

Теперь пусть α — предельное число. Достаточно доказать, что все $G/_{Z_\beta}$, $\beta < \alpha$ являются ΠSR-группами, Предположим, что для некоторого $\beta < \alpha$ фактор-группа G/Z_β не является ΠSR-группой. Тогда найдутся такие элементы $b_1,\dots, b_n$; $d_1,\dots, d_n$ из G, скажем,

$$b_{i_1} Z_\beta \neq d_{i_1} Z_\beta, \dots, b_{i_k} Z_\beta \neq d_{i_k} Z_\beta \tag{1}$$

что $\langle b_1 Z_\beta, \dots, b_n Z_\beta \rangle$ и $\langle d_1 Z_\beta, \dots, d_n Z_\beta \rangle$ являются решениями Π-системы (f_{A_β}) над $G/_{Z_\beta}$. Тогда

$$f^i (b_1 Z_\beta, \dots, b_n Z_\beta; a_{i_1} Z_\beta, \dots, a_{i_{s_i}} Z_\beta) = Z_\beta =$$

$$= f^i (d_1 Z_\beta, \dots, d_n Z_\beta; a_{i_1} Z_\beta, \dots, a_{i_{s_i}} Z_\beta),\ i = 1,\dots, n.$$

Следовательно $f^i(b_1 Z_\alpha, \dots, b_n Z_\alpha; a_{i_1} Z_\alpha, \dots, a_{i_{s_i}} Z_\alpha) = Z_\alpha =$

$$f^i(d_1 Z_\alpha, \dots, d_n Z_\alpha; a_{i_1} Z_\alpha, \dots, a_{i_{s_i}} Z_\alpha); \ i = 1, \dots, n.$$

Но G/Z_α является ΠSR-группой. поэтому

$$b_i Z_\alpha = d_i Z_\alpha, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда

$$b_i = d_i z_i, \quad z_i \in Z_\alpha, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует что, для каждого элемента Z_{i_m}, $m = 1, \dots, k$, найдётся такое порядковое число μ_m, $\beta < \mu_m < \alpha$, что $z_{i_m} \in Z_{\mu_m}$ но $z_{i_m} \overline{\in} Z_{\nu_m}$, $\nu_m < \mu_m$. Очевидно, что все μ_m, $m = 1, \dots, k$, — непредельные числа. Теперь пусть $\mu = \max(\mu_1, \dots, \mu_k)$ и пусть индексу μ соответствует элемент z_{i_r}, т.е. все $z_{i_1}, \dots, z_{i_r}, \dots, z_{i_k}$ принадлежат к Z_μ, но

$$z_{i_r} \overline{\in} Z_{\mu'}, \ \mu' < \mu.$$

Так как μ — непредельное число, $\beta < \mu < \alpha$, то

$$f^i(b_1 Z_{\mu-1}, \dots, b_n Z_{\mu-1}; a_{i_1} Z_{\mu-1}, \dots, a_{is_i} Z_{\mu-1}) = Z_{\mu-1} =$$

$$= f^i(d_1 Z_{\mu-1}, \dots, d_n Z_{\mu-1}; a_{i_1} Z_{\mu-1}, \dots, a_{is_i} Z_{\mu-1})$$
$$i = 1, \dots, n.$$

С другой стороны

$$b_i Z_{\mu-1} = d_i Z_{\mu-1} \cdot z_i Z_{\mu-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

и так как

$$z_i Z_{\mu-1} \in Z_\mu / Z_{\mu-1} = Z\left(G / Z_{\mu-1}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

то откуда следует

$$f^i(b_1 Z_{\mu-1}, \dots, b_n Z_{\mu-1}; a_{i_1} Z_{\mu-1}, \dots, a_{is_i} Z_{\mu-1}) = Z_{\mu-1} =$$

$$= f^i(d_1 Z_{\mu-1}, \dots, d_n Z_{\mu-1}; a_{i_1} Z_{\mu-1}, \dots, a_{is_i} Z_{\mu-1}) \times$$

$$\times f^i(z_1 Z_{\mu-1}, \dots, z_n Z_{\mu-1}; Z_{\mu-1}, \dots, Z_{\mu-1})$$
$$i = 1, \dots, n.$$

Следовательно

$$f^i(z_1 Z_{\mu-1}, \dots, z_n Z_{\mu-1}; Z_{\mu-1}, \dots, Z_{\mu-1}) = Z_{\mu-1}$$
$$i = 1, \dots, n,$$

т.е. $\langle z_1 Z_{\mu-1}, \dots, z_n Z_{\mu-1} \rangle$ является решением в $Z_\mu / Z_{\mu-1}$ Π-системы (f_{A_μ}) над $Z_\mu / Z_{\mu-1}$:

$$(f_{A_\mu}) \begin{cases} f^1(x_1, \dots, x_n; Z_{\mu-1}, \dots, Z_{\mu-1}) = Z_{\mu-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f^n(x_1, \dots, x_n; Z_{\mu-1}, \dots, Z_{\mu-1}) = Z_{\mu-1}. \end{cases}$$

По теореме 1 $Z_{\mu-1}$ сильно Π-изолирован в Z_μ следовательно $Z_\mu / Z_{\mu-1}$ является абелевой группой без Π-кручения, т.е. ΠSR-группой. Легко проверить, что $\langle Z_{\mu-1},\ldots, Z_{\mu-1}\rangle$ является решением в $Z_\mu / Z_{\mu-1}$ Π-системы (f_{A_μ}) над $Z_\mu / Z_{\mu-1}$. Так как $Z_\beta / Z_{\mu-1}$ является ΠSR-группой, то

$$z_i \, Z_{\mu-1} = Z_{\mu-1}, \; i = 1,\ldots, i_1,\ldots \, i_k,\ldots, n,$$

т.е. $z_i \in Z_{\mu-1}$, $i = 1,\ldots, i_1,\ldots, i_k,\ldots, n$, в частности $z_{i_r} \in Z_{\mu-1}$, что противоречит предположению. Этим теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G является ΠSR-группой, чьи факторы $Z_\alpha / Z_{\alpha-1}$ Π-полны. Тогда все её гиперцентры сильно Π-изолированы в G, все факторы G / Z_α являются ΠSR-группами, факторы $Z_\alpha / Z_{\alpha-1}$ являются ΠSD-группами при непредельных α.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая $\alpha = 1$. Z сильно Π-изолирован в G по [3], $Z_1 / Z_0 = Z$ является Π-полной абелевой группой без Π-кручения, т.е. ΠSD-группой (см.[3]); и пусть $\langle b_1 Z,\ldots, b_n Z\rangle$ и $\langle d_1 Z, \ldots, d_n Z\rangle$ являются решениями в G/Z Π-системы (f_{A_z}) над G/Z, т.е. $f^i(b_1 Z,\ldots, b_n Z;\, a_{i_1} Z,\ldots, a_{is_i} Z) = f^i(d_1 Z,\ldots d_n Z;\, a_{i_1} Z,\ldots, a_{is_i} Z)$, $\qquad i = 1,\ldots, n.$

Следовательно, для $i = 1,\ldots, n$,

$$f^i(b_1,\ldots, b_n;\, a_{i_1},\ldots, a_{is_i}) = f^i(d_1,\ldots, d_n;\, a_{i_1},\ldots, a_{is_i}).\; z_i =$$
$$= f^i(d_1,\ldots, d_n;\, a_{i_1},\ldots, a_{is_i}).\, f^i(c_1,\ldots, c_n; 1,\ldots, 1)$$
$$= f^i(d_1 c_1,\ldots, d_n c_n;\, a_{i_1},\ldots, a_{is_i}),\; c_i \in Z$$

ввиду сильной Π-полноты центра Z (так как Z — абелева Π-полная группа) и по [3].

Откуда следует, что

$$b_i = d_i c_i \text{ или } b_i Z = d_i Z,\; i = 1,\ldots, n, \text{ т.е. } G/Z \text{ — } \Pi SR\text{-группа.}$$

Теперь пусть все утверждения теоремы доказаны для всех $\beta < \alpha$. Если α — непредельное число, то $Z_\alpha / Z_{\alpha-1} = Z(G/Z_{\alpha-1})$ сильно Π-изолирована в $G/Z_{\alpha-1}$ и ввиду взаимно однозначного соответствия между сильно Π-изолированными подгруппами данной группы и её эпиморфного образа следует, что Z_α сильно Π-изолирован в G.

$$G/Z_\alpha \cong (G/Z_{\alpha-1}) \big/ (Z_\alpha / Z_{\alpha-1}) = (G/Z_{\alpha-1}) \big/ Z(G/Z_{\alpha-1}),$$

следовательно G/Z_α является ΠSR-группой, так как $G/Z_{\alpha-1}$ являются ΠSR-группой и её центр $Z_\alpha / Z_{\alpha-1}$ Π-полен. Кроме того,

$$Z_\alpha/_{Z_{\alpha-1}} = Z(G/_{Z_{\alpha-1}})$$

является Π-полной абелевой группой без Π-кручения (ввиду сильно Π-изолированности $Z_{\alpha-1}$ в Z_α по теореме 1), т.е. $Z_\alpha/_{Z_{\alpha-1}}$ есть ΠSD-группа.

Если α — предельное число, то Z_α является объединением возрастающей последовательности сильно Π-изолированных подгрупп и поэтому Z_α сильно Π-изолирован в G. Пусть Π-система (f_{A_α}) над $G/_{Z_\alpha}$ имеет два решения в $G/_{Z_\alpha}$, скажем $\langle b_1 Z_\alpha,\ldots, b_n Z_\alpha\rangle$ и $\langle d_1 Z_\alpha ,\ldots, d_n Z_\alpha\rangle$. Тогда найдётся такое порядковое число β, $\beta < \alpha$, чтобы $\langle b_1 Z_\beta,\ldots, b_n Z_\beta\rangle$ и $\langle d_1 Z_\beta ,\ldots, d_n Z_\beta\rangle$ является решениями в $G/_{Z_\beta}$ Π-системы (f_{A_β}) над ΠSR-группой $G/_{Z_\beta}$, следовательно

$$b_i Z_\beta = d_i Z_\beta$$

и тем более $b_i Z_\alpha = d_i Z_\alpha$, $i = 1,\ldots, n$, ч.т.д.

§3. Группа G называется *гиперцентральным расширением* группы H при помощи группы F, если в G можно найти такой нормальный делитель H', изоморфный H, что H' — подгруппа некоторого гиперцентре группы G, и что $G/_{H'} \cong F$. Часто напишем это условие в виде $G/_H \cong F$.

Лемма 3. *Пусть дана группа G и H_α — инвариантная в G подгруппа гиперцентра Z_α группы G, и пусть через H_β обозначаем $H_\alpha \cap Z_\beta$. Если α — непредельное число, то $H_\alpha/_{H_{\alpha-1}} \subseteq Z(G/_{H_{\alpha-1}})$; более того $H_\alpha/_{H_{\alpha-1}}$ сильно Π-изолирована в $Z(G/_{H_{\alpha-1}})$ если H_α сильно Π-изолирована в Z_α.*

Доказательство. Пусть $h_\alpha H_{\alpha-1} \in H_\alpha\Big|_{H_{\alpha-1}}$ и $gH_{\alpha-1} \in G\Big|_{H_{\alpha-1}}$, тогда

$$h_\alpha g = g h_\alpha z,\ z \in Z_{\alpha-1}$$

так как $h_\alpha \in H_\alpha \subset Z_\alpha$ и $Z_\alpha\Big|_{Z_{\alpha-1}} = Z\left(G\Big|_{Z_{\alpha-1}}\right)$.

Следовательно

$$g^{-1}h_\alpha g = h_\alpha z \in H_\alpha,$$

откуда следует, что $z \in H_{\alpha-1}$ и поэтому

$$h_\alpha H_{\alpha-1}. gH_{\alpha-1} = gH_{\alpha-1}. h_\alpha H_{\alpha-1},$$

т.е. $gH_{\alpha-1} \in Z\left(G\Big|_{H_{\alpha-1}}\right)$.

Теперь пусть через $\overline{G}$, $\overline{Z}_{\alpha-1}$, $\overline{H}_\alpha$ обозначаем соответственно фактор-группы $G\Big|_{H_{\alpha-1}}$, $Z_{\alpha-1}\Big|_{H_{\alpha-1}}$, $H_\alpha\Big|_{H_{\alpha-1}}$. Рассмотрим Π-систему (f_H) над $\overline{H}_\alpha$:

$$(f_H)\begin{cases} f^1(x_1,\ldots, x_n;\ \overline{h}_{11},\ldots, \overline{h}_{1s_1}) = 1 \\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ f^n(x_1,\ldots, x_n;\ \overline{h}_{n1},\ldots, \overline{h}_{ns_1}) = 1 \end{cases}$$

Пусть (f_H) имеет в $Z(\overline{G})$ решение $\langle \overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_n\rangle$. Докажем, что $\overline{g}_i \in \overline{H}_\alpha$.

Для $i = 1,\ldots, n$, мы имеем $\overline{g}_i \in Z(\overline{G})$, следовательно $\overline{g}_i \overline{Z}_{\alpha-1} \in Z\left(\overline{G}\Big|_{\overline{Z}_{\alpha-1}}\right)$

Знаем, что

$$Z\left(\overline{G}\big/\overline{Z}_{\alpha-1}\right)\cong Z\left(G\big/Z_{\alpha-1}\right)$$

итак $\overline{g}_i\overline{Z}_{\alpha-1}$ можно соответствовать смежному классу по $Z_{\alpha-1}$, содержащему элемент g_i из G, следовательно $\overline{g}_i\ \overline{Z}_{\alpha-1}\leftrightarrow g_i\ Z_{\alpha-1}$, т.е.

$$g_i Z_{\alpha-1}\in Z\left(G\big/Z_{\alpha-1}\right)=Z_\alpha\big/Z_{\alpha-1},$$

откуда $g_i\in Z_\alpha,\ i=1,\dots,n$.

С другой стороны

$$f^i\,(\overline{g}_1,\dots,\overline{g}_n;\ \overline{h}_{i1},\dots,\overline{h}_{is_i})=\overline{1},\ i=1,\dots,n,$$

следовательно

$$f^i\,(g_1,\dots,g_n;\ h_{i1},\dots,h_{is_i})=h_i^{(\alpha-1)};\ h_{ij};\in H_\alpha,\ h_i^{(\alpha-1)}\in H_{\alpha-1},\ i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,s_i,$$

т. е. $\langle g_1,\dots,g_n\rangle$ является решением в Z_α Π-системы уравнений над H_α. Так как H_α сильно Π-изолировано в Z_α, то $g_i\in H_\alpha$, т.е. $\overline{g}_i\in\overline{H}_\alpha$, $i=1,\dots,n$. Лемма доказана.

Теорема 5. *ΠSR-группа G, чьи факторы $Z_\alpha\big/Z_{\alpha-1}$ Π-полны, являющаяся гиперцентральным расширением сильно Π-полной группой при помощи сильно Π-полной группы, будет сильно Π-полной, следовательно будет ΠSD-группой.*

Доказательство. Для случая $\alpha=1$ эта теорема превращается в теорему 1 из [4]. Поэтому доказательство можно проводить индукцией по α:

Пусть $G\big/H_\alpha$ сильно Π-полна, где H_α — сильно Π-полная подгруппа гиперцентра Z_α. Докажем, что G сильно Π-полна.

Сначала заметим, что если $H_\beta=H_\alpha\cap Z_\beta$, то ввиду сильной Π-изолированности всех Z_β в G (теорема 4) следует, что все H_β сильно Π-изолированы в сильно Π-полной подгруппе H_α, т.е. все H_β сильно Π-полны.

Если α — непредельное число, то

$$G\big/H_\alpha\cong\left(G\big/H_{\alpha-1}\right)\Big/\left(H_\alpha\big/H_{\alpha-1}\right).$$

$H_\alpha\big/H_{\alpha-1}$ сильно Π-полна ввилу сильной Π-полноты группы H_α и по лемме 3

$$H_\alpha\big/H_{\alpha-1}\subseteq Z\left(G\big/H_{\alpha-1}\right),$$

следовательно группа $G\big/H_{\alpha-1}$, как центральное расширение сильно Π-полной группы $H_\alpha\big/H_{\alpha-1}$ при помощи сильно Π-полной группы $G\big/H_\alpha$, также будет сильно Π-полной группой. Из предположения индукции следует, что G сильно Π-полна.

Теперь пусть α — предельное число и пусть (f_A) — произвольная Π-система уравнений над G. Докажем, что (f_A) имеет хотя бы одно решение в G. Составим Π-систему (f_{A_α}) над $G\big|_{H_\alpha}$, соответствующую Π-системе (f_A). Так как $G\big|_{H_\alpha}$ сильно Π-полна, то (f_{A_α}) разрешима в $G\big|_{H_\alpha}$, т.е. найдутся такие элементы $g_1 H_\alpha, \ldots, g_n H_\alpha$, что $f^i(g_1 H_\alpha, \ldots, g_n H_\alpha; a_{i_1} H_\alpha, \ldots a_{i_{s_1}} H_\alpha) = H_\alpha$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно

$$f^i(g_1, \ldots g_n; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}).\overset{(1)}{h_i} = 1,\ \overset{(1)}{h_i} \in H_\alpha,\ i = 1, \ldots, n.$$

Так как α — предельное число, то найдётся такое порядковое непредельное число β, $\beta < \alpha$, что $\overset{(1)}{h_i} \in H_\beta$, $i = 1, \ldots, n$, но не все они принадлежат к $H_{\beta-1}$.

Так как H_β сильно, Π-полна, то существуют такие элементы $g'_1, \ldots, g'_n$ из H_β, что $f^i(g_1, \ldots, g_n; 1, \ldots, 1) = h_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Иными словами, $\langle g'_1, \ldots, g'_n \rangle$ является решением в H_β Π-системы (f_H) над H_β:

$$(f_H)\begin{cases} f^1(x_1, \ldots, x_n; 1, \ldots, 1) = \overset{(1)}{h_1}, \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^n(x_1, \ldots, x_n; 1, \ldots, 1) = \overset{(1)}{h_n}. \end{cases}$$

Тогда

$$f^i(g_1, \ldots, g_n; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}).f^i(g_1', \ldots, g'_n; 1, \ldots, 1) = 1. \tag{1}$$

Если $\overset{(1)}{h_i}$, $i = 1, \ldots, n$, перестановочны со всеми элементами из таблицы A, то в ΠSR-группе G, применяя теорему из [3] к однотипным Π-системам (f_A) и (f_H), получим, что $\langle g_1 g'_1, \ldots, g_n g'_n \rangle$ является решением в G Π-системы (f_A) над G.

В противном случае, замечая, что по лемме 3

$$H_\beta\big|_{H_{\beta-1}} \subseteq Z\left(G\big|_{H_{\beta-1}}\right)$$

из (1) мы имеем

$f^i(g_1 g'_1 H_{\beta-1}, \ldots, g_n g'_n H_{\beta-1}; a_{i_1} H_{\beta-1}, \ldots, a_{i_{s_i}} H_{\beta-1}) = H_{\beta-1}$, $i = 1, \ldots, n$, или

$$f^i(g_1 g'_1, \ldots, g_n g_n'; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}).\overset{(2)}{h_i} = 1,\ i = 1, \ldots, n,$$

где $\overset{(2)}{h_i} \in H_{\beta-1}$.

Применяя к элементам $\overset{(\ )}{h_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ те же рассуждения, которые выше проведены для элементов $\overset{(2)}{h_i}$, $i = 1, \ldots, n$ найдём такие элементы $g_1'', \ldots, g_n''$ из H_γ, $\gamma \leqslant \beta \dot{-} 1$,

что $\quad f^i(g_1\ g'_1\ g''_1, \ldots, g_n\ g_n'\ g_n''; a_{i_1}, \ldots, a_{i_{s_i}}).\overset{(3)}{h_i} = 1,\ i = 1, \ldots, n,$

где $\quad \overset{(3)}{h_i} \in H_{\gamma-1}$.

Так как множество подгрупп $\{H_\beta\}$ вполне упорядочено, то повторяя этот процесс через конечное число шагов покажем, что

$$f^i(g_1 g_1' g_1'' \dots g_1^{(k)}, \dots, g_n g_n' g_n'' \dots g_n^{(k)};\ a_{i_1}, \dots, a_{is_i}) = 1,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

т.е. $< g_1 g_1' g_1'' \dots g_1^{(k)}, \dots, g_n g_n' g_n'' \dots g_n^{(k)} >$ является решением в G Π-системы (f_A) над G, ч.т.д.

Теорема 6. *Пусть дана группа G, её центр — группа без Π-кручения, все её факторы $Z_\alpha/Z_{\alpha-1}$ Π-полны, и пусть H_α сильно Π-полная группа, сильно Π-изолированная инвариантная подгруппа в гиперцентре Z_α группы G. Тогда G является ΠSD-группой тогда и только тогда когда, G/H_α является ΠSD-группой.* Иными словами, *при выше сказанных условиях группа G является Π-группой тогда и только тогда, когда G является гиперцентральным расширением сильно Π-полной группы при помощи ΠSD-группы.*

Доказательство. Пусть центр группы G — группа без Π-кручения и G/H_α — ΠSR-группа, где H_α — сильно Π-изолированная инвариантная подгруппа гиперцентра Z_α. Тогда G будет ΠSR - группой если заметим, что $H_{\alpha-1} = Z_{\alpha-1} \cap H_\alpha$ сильно Π-изолирована в H_α, поэтому можно повторить доказательство теоремы 3. Теперь G есть ΠSD-группа, чьи факторы $Z_\alpha/Z_{\alpha-1}$ Π-полны и G является гиперцентральным расширением сильно Π-полной группы H_α при помощи сильно Π-полной группы, следовательно G является ΠSD-группой по теореме 5.

Обратно, если G есть ΠSD-группа, то G/H_α сильно Π-полна. Доказательство того, то G/H_α является ΠSR-группой можно проводить аналогично доказательству теоремы 4 при следующих изменениях :

Пусть все утверждения теоремы доказаны для усех $\beta < \alpha$. Если α — непредельное число, то по лемме 3 $H_\alpha/H_{\alpha-1}$ сильно Π-изолирована в $Z(G/H_{\alpha-1})$, но $G/H_{\alpha-1}$ является Π-группой по предположению индукции, следовательно $Z(G/H_{\alpha-1})$ сильно Π-изолирована в ней и $H_\alpha/H_{\alpha-1}$, также сильно Π-изолирована в ней, откуда следует что H_α сильно Π-изодирована в G. Знаем, что

$$G/H_\alpha \cong (G/H_{\alpha-1})/(H_\alpha/H_{\alpha-1}),$$

где $H_\alpha/H_{\alpha-1}$ сильно Π-изолирована в $Z(G/H_{\alpha-1})$ по лемме 3, $G/H_{\alpha-1}$ является ΠSD-группой по предположению, следовательно её центр также является ΠSD -группой. Поэтому по первой части доказательства теоремы 4 следует, что G/H_α является ΠSR-группой, ч.т.д.

Поступило в редакцию 29-XII-1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П.Г. КОНТОРОБИЧ. *Замечания о гиперцентрах группы.* Уч. зап. Уральского Унн-та 23 : 2: 1960, 27 - 29.
2. D.H. MC LANE. *Remarks on the oper central series of a group.* Proc. Glasgow Math. Assoc. 3 (1956), №1 38-44.
3. ХОАНГ КИ. *S-полные группы,* SR-*группы,* SD-*группы* Сиб. мат. ж. 10 : 6, 1969, 1427 – 1430·
4. ХОАНГ КИ. *Расширения и нильпотентные произведения сильно П-полна, ПSR-, ПSD-групп* Укр. мат, ж. *22* : 4, 1970, 566 – 571.
5. ХОАНГКИ. *Системы уравнений в группах,.* Acta Sci. Viet, Sect. Math. Phys.T 8, 1972.
6. М.И. ЭЙДИНОВ. *О группах без П-кручения.* Уч. зап. Уральского Унн-та, 19 ; 1956, 61-68.
7. М.И. ЭЙДИНОВ. *К теории ПR.групп,* УМН, XVII : 6 (1962), 227-228.
8. М.И. ЭЙДИНОВ. *К теории ПR-полных П-групп.* Мат. зап. Уральского Уни-та, V: 1, 1965, 101-105.
9. А.Г. КУРОШ. *Теория групп,* 3-е изд., « Наука », М., 1967.