ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 1, № 1 (1976)

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

PHAN VĂN HẠP
Ханойский университет

Введение

Интегральные уравнения, особенно сингуляриые интегральные уравнения, играют большую роль во многих важных приложениях как теории упругости, в геофизике, гидро-аэромеханике, квантовой теории поля, теории массового обслуживания и др. О важном значении приближенного решения сингулярных интегральных уравнений говорится в известной монографии [17] Н. И. Мусхелишвили,

Обзор методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений до 1964 имеется в работе [5].

В этой работе предложены некоторые методы приближенного решения операторных уравнений и интегральных уравнений.

В первой части излагаются некоторые методы итераций разных видов приближенного решения операторных уравнений и их применение к интегралным уравнениям.

Во второй части рассматриваются методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений и их систем. В этой же части рассматривается применение этих методов к решению задачи диффракции плоских волн в упругой сфере и вопрос о регуляризации в исключительных случаях.

Во третьей части даются некоторые методы приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Дается один метод приближенного вычисления резольвенты,

I. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ ОДИН ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. 1. Рассмотрим операторное уравнение.

$$Ax = 0. \tag{I. 1.1}$$

Пусть A — оператор в полном нормированном пространстве B, причём область его определения $D(A)$ представляет собой выпуклое подмножество пространства B. Пусть далее, пространство B является коммутативным кольцом со множеством единиц Y (множество элементов y, для которых существуют обратные элементы y^{-1} в B). Таким образом, в B для любых двух элементов x, y определено умножение, причем $xy = yx$, и деление x/y если $y \in Y$.

Обозначим через

$$A_{01} = A(x_0;\, x_1),$$
$$A_{012} = A(x_0;\, x_1;\, x_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{01\dots j} = A(x_0;\, x_1;\, \dots;\, x_j)$$

— разделенные разности обобщенные оператора A в узлах $x_0, x_1, \dots, x_j$ ($x_i \neq x_j$ если $i \neq j$). Если мы потребуем существования в области $D(A)$ производных от оператора A до k - го порядка включительно, то с помощью абстрактных интегралов Римана будем иметь :

$$\| A_{01} \| \leqslant \| A'_{\zeta} \|,\ \zeta = x_0 + \theta(x_1 - x_0),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1:$$
$$\| A_{012} \| \leqslant \left(\frac{1}{2} \right) \| A''_{\eta} \|,$$
$$\eta = x_0 + \theta_0 (\eta_1 - x_0),$$
$$\eta_1 = x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1),$$
$$0 \leqslant \theta_0, \theta_1 \leqslant 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

В [33] излагается метод k-го порядка, основанного на формуле Тейлора для оператора (обобщенный процесс Шрёдера-Чебышева).

В [8] рассматривается метод Ньютона, а в [1] — метод Стеффенсена-Эйткена для приближенного решения уравнения (1).

В этой параграфе мы рассмотрим следующий метод. Исходя от начального приближенного элемента x_0, определяем

$$\hat{x}_1 = x_0 + \mu A x_0,$$
$$x_1 = x_0 - A^{-1}_{0\hat{1}} \cdot A x_0,$$

где

$$A_{0\hat{1}} = A\ (x_0 : \hat{x}_1) = A\ (\hat{x}_1 ;\ x_0)\ ,$$

$$\mu = \text{const} \neq 0 \text{ (обычно возьмём } 0 < \mu \leqslant 1).$$

Затем, определяем $\hat{x}_2$ и x_2 следующим образом:

$$\hat{x}_2 = x_1 + \mu\,\varepsilon_1 .$$

$$x_2 = x_0 - A_{01}^{-1} \left[\varepsilon_0 + A_{012}\ (\hat{x}_2 - x_0)\ (\hat{x}_2 - x_1) \right].$$

где

$$\varepsilon_j = A x_j\ ,\ j = 0, 1, \ldots$$

В общем, имеем

$$\hat{x}_j = x_{j-1} + \mu\varepsilon_{j-1}\ ,$$

$$x_j = x_0 - A_{01}^{-1} \left[\varepsilon_0 + A_{012} \left(\hat{x}_j - x_0 \right) \left(\hat{x}_j - x_1 \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + A_{\hat{j}01\,\ldots\,(j-1)} \left(\hat{x}_j - x_0 \right) \ldots \left(\hat{x}_j - x_{j-1} \right) \right], \qquad \text{(I. 1.2)}$$

$$(j = 1, 2, \ldots , k).$$

Следующие приближенные решения определяются итеративной формулой:

$$x_k^{m+1} = x_0 - A_{10}^{-1} \left[\varepsilon_0 + A_{012} \left(x_k^m - x_0 \right) \left(x_k^m - x_1 \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + A_{m,\,0,\,\ldots\,,\,k-1} \left(x_k^m - x_0 \right) \ldots \left(x_k^m - x_{k-1} \right) \right], \qquad \text{(I. 1.3)}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

В случае $k = 1$, имеем

$$x_1^{m+1} = x_0 - A_{m0}^{-1}\, A\, x_0 = x_1^m - A_{m0}^{-1}\, A\, x_1^m , \qquad \text{(I. 1.4)}$$

в котором $x_1^0 = \hat{x}_1$. Это — обобщенный метод хорд.

1. 2. Мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) Существует обратный A_{01}^{-1} *и* $\| A_{01}^{-1} \| \leqslant C_0$,

(2) Имеются оценки

$$\| A_{01} \| \leqslant C_1\ ,\ \| A_{012} \| \leqslant \frac{1}{2}\, C_2\ , \ldots ,\ \| A_{01\cdots k} \| \leqslant \frac{1}{k!}\, C_k$$

при x_i *в шаре*

$$\| x^* - x_i \| \leqslant \delta\ ,$$

где x^* *— решение* (I. 1. 1), $\delta = \max_j \| x^* - x_j \|$, $(j = 0, 1, \ldots , k-1)$,

(3) *Константы* $C_0, C_1, \dots, C_k, \delta$ *удовлетворяют неравенству*

$$q = \left[\sum_{i=2}^{k} \frac{C_i}{(i-1)!} \cdot \alpha^{i-2} \right] \cdot C_0 \cdot \alpha < 1 ,$$

в котором

$$\alpha = (2 + |\mu| C_1)\,\delta .$$

Тогда итерационный процесс (2), (3) *сходится по норме к решению* x^* *уравнения* (1). *Скорость сходимости определяется следующим неравенством*

$$\delta_{k+m} = \| x^* - x_k^m \| \leqslant \exp\left[-\frac{\gamma}{1+\gamma} \left(m - q \cdot \frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right) \right] \cdot \gamma \cdot \delta \cdot q^m , \quad \text{(I. 1. 5)}$$

где

$$\gamma = 1 + |\mu| C_1 , \qquad \beta = \frac{1}{1 + (1-q)\gamma} .$$

Замечание. При этих же условиях мы можем дать следующую оценку:

$$\delta_{k+m} \leqslant \exp\left[\gamma \cdot q \frac{1-\beta^m}{1-\beta} \right] \cdot \frac{\gamma}{(1+\gamma)^m} \cdot \delta \cdot q^m . \qquad \text{(I. 1. 5')}$$

1. 3. Следующая теорема дает возможность определения сходимости итерационного процесса не требуя заранее знать о существовании решения уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *Существует* A_{01}^{-1} *и* $\| A_{01}^{-1} \| \leqslant C_0$.

(2) *Имеются оценки*

$$\| A_{01} \| \leqslant C_1 , \ \| A_{012} \| \leqslant \frac{1}{2} C_2 \qquad (\text{при всех } x)$$

в шаре

$$\| x - x_0 \| < \frac{C\,\delta_0}{1 - q_1} + \eta ,$$

где $\delta_0 = |\mu| C_0 C_1 \varepsilon_0$, $\eta = \gamma C_0 \varepsilon_0$, $q_1 = C_0 C_2 (\eta + \delta_0) < 1$.

Тогда

$$x_2^{m+1} = x_0 - A_{01}^{-1} \left[\varepsilon_0 + A_{m12} (x_2^m - x_0)(x_2^m - x_1) \right] \qquad \text{(I. 1. 6)}$$

сходятся к решению x^* *уравнения* (1), *которое находится в области*

$$\| x^* - x_0 \| \leqslant C\,\delta_0 \frac{q_1}{1-q_1} + \eta , \qquad \text{(I. 1. 7)}$$

где

$$C = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{q_1^i}{1+\nu} \right) < \exp\left[\frac{q_1}{(1+\nu)(1-q_1)} \right] ,$$

$$\nu = \frac{\gamma}{\gamma - 1} .$$

1. 4. Рассмотрим в качестве примера следующее уравнение резольвенты интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\Gamma(x, y; 1) = K(x, y) + \int_0^1 \Gamma(\xi, y, \xi) \cdot \Gamma(x, \xi, \xi)\, d\xi . \qquad \text{(I. 1. 8)}$$

При $\Gamma_0 = K(x, y)$ и $\| K(x, y) \| < 1$ можем доказать, что все условия теоремы 2 выполнены и процесс (6) сходится по норме к решению уравнения (8).

Замечание. Процесс (3) или (6) особенно удобен в том случае, когда трудно найти производные оператора A или производная этого оператора имеет сложную форму.

§2. Об одном нестационарном итерационном методе.

2. 1. Рассмотрим уравнение

$$K\varphi = (I + A)\varphi = f, \tag{I.2.1}$$

в котором I — единичный оператор,

A — непрерывный оператор, определенный в банаховом пространстве B и преобразующий это пространство в себя,

f — элемент пространства B.

Вместо уравнения (I. 2. 1) рассматриваются следующие приближенные уравнения

$$K_n\varphi = (I + A_n)\varphi = f, \tag{I.2.2}$$

в которых A_n, определенные в B_n, где $\{B_n\}$ – предельно плотна в B (или A_n, определенные в $X \supset B$ и если $\{\varphi_n\} \in X$, то из $\{A_n \varphi_n\}$ можно выделить подпоследовательность $A_{n_p} \varphi_{n_p} \to \varphi \in B$)

Операторы A, A_n удовлетворяют следующим условиям:

(1) Если $\| \varphi - \varphi_n \| \to 0$, то $\| A_n \varphi_n - A\varphi \| \to 0$,

(2) $\exists\, k, 0 < k < 1$ такое, что

$$\| A\varphi - A\psi \| \leqslant k \| \varphi - \psi \|, \ \forall\, \varphi, \psi \in B,$$

(3) $\exists\, N$, $\forall\, n > N$

$$\text{a)}\ \| A_n\varphi - A_n\psi \| \leqslant k \| \varphi - \psi \|,$$

$$\text{b)}\ \| A_n\varphi - A_{n+1}\varphi \| \leqslant c_n \| \varphi \|,$$

где $c_n > 0$ и $\Sigma\, c_n < +\infty$.

Посмотрим итерационный процесс

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - K_n\varphi_n + f. \tag{I.2.3}$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 3. *При этих предположениях уравнение* (I. 2. 1) *имеет единственное решение, которое является пределом последовательности* (I. 2. 3).

Для доказательства этой теоремы нужна следующая лемма:

Последовательность (I. 2. 3) *ограничена по норме.*

2. 2. На практике, когда n возрастается, процесс вычисления становится трудоёмким. Вместо (I. 2. 3) рассматривается треугольная последовательность

$$\varphi_{11} = \varphi_1 - K_1\varphi_1 + f;$$

$$\varphi_{21} = \varphi_{11} - K_2\varphi_{11} + f : \varphi_{22} = \varphi_{21} - K_2\varphi_{21} + f; \tag{I.2.4}$$

. . . .

Теорема 4. *Последовательность* (I. 2. 4) *сходится к решению уравнения* (I. 2. 1).

2. 3. Более общо, рассматривается уравнение

$$K\,\varphi = A^{(1)}\,\varphi + A^{(2)}\,\varphi = f\,, \tag{I. 2. 1'}$$

в котором $A^{(1)}$ имеет ограниченный обратный оператор.

Наряду с (I. 2. 1') рассмотрим

$$K_n\varphi = A^{(1)}\,\varphi + A^{(2)}_n\,\varphi = f\,. \tag{I. 2. 2'}$$

Операторы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(2)}_n$ удовлетворяют следующим условиям

(1') Если $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ то $\|A^{(2)}_n\,\varphi n - A^{(2)}\,\varphi\| \to 0\,.$

(2') $\exists\, k\,,\ 0 < k < 1$ такое, что

$\|A^{(2)}\,\varphi - A^{(2)}\,\psi\| \leqslant k\,\|A^{(1)}\|\ \|\varphi - \psi\|\,,\qquad \forall\ \varphi\,,\psi \in B\,.$

(3') $\exists\, N,\ \forall\ n > N,$

$\|A^{(2)}_n\,\varphi - A^{(2)}_n\,\psi\| \leqslant k\,\|A^{(1)}\|\ \|\varphi - \psi\|\,,$

$\|A^{(2)}_n\,\varphi - A^{(2)}_{n+1}\,\varphi\| \leqslant c_n\,\|\varphi\|\,,\ c_n > 0\,,\ \Sigma\, c_n < +\infty$

Теорема 4'. *При этих предположениях уравнение* (I. 2. 1') *имеет единственное решение, которое является пределом последовательности* (I. 2. 3) *или* (I. 2. 4).

2. 4. Этот процесс итераций можно применить к решению уравнения типа

$$\varphi\,(x) = \lambda\,F\left(x\,,\ \varphi\,(x),\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{G\,[\,\varphi\,(x)\,]}{x-t}\,dt\right), \tag{I. 2. 5}$$

нашедшее применение в области геофизики и теоритической физики.

В случае сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта

$$K\varphi = \varphi\,(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\,\varphi\,(y)\,dy = f\,(x)$$

или с ядром Коши

$$K\varphi = a\,(t)\,\varphi\,(t) + \frac{b\,(t)}{\pi i}\int \frac{\varphi\,(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \lambda\int k(t,\tau)\,\varphi\,(\tau)d\tau = f\,(t),$$

где γ — единичный круг, операторы A_n определяются соответственно следующим образом :

$$A_n\,\varphi = \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=0 \\ i<j-1,\ i>j+1}}^{2n-1} \varphi\left(\frac{i\pi}{n}\right)\left(\frac{1-(-1)^{i-j}}{2}\right)\operatorname{ctg}\,(i-j)\,\frac{\pi}{2n},$$

и

$$A_n\varphi = \frac{b\,(t)}{\pi i}\sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\ k>j+1}}^{n} \frac{\varphi\,(t_k) - \varphi\,(t)}{t_k - t}\,\Delta t_k + \lambda\sum_{\substack{k=1 \\ k<j-1,\ k>j+1}}^{n} K\,(t,t_k)\,\varphi\,(t_k)\,\Delta\,t_k\,.$$

в котором предполагается, что

$$\frac{2\|b\|}{\pi} + \|k\| \leqslant q < 1^{*})$$

Исследовались конкретные примеры. Вычисления производились на ЭВМ «Минск 22»

§ 3. ОДИН МЕТОД ИТЕРАЦИЙ (квази Зейделя)

3. 1. Рассмотрим операторное уравнение

$$(I + A)\varphi = f \tag{I.3.1}$$

как и в § 2.

Пусть $A = A_1 + A_2$, так что $I + A_1$ имеет непрерывный обратный оператор.

Тогда уравнение (I. 3. 1) можно переписать в виде

$$\varphi = (I + A_1)(f - A_2\varphi). \tag{I.3.2}$$

Пусть оператор $A_2\varphi$ приближенно заменяется оператором $\widetilde{A_2}\varphi$ следующего вида

$$\widetilde{A_2}\varphi = (\alpha_{ij})(\varphi_j) = P_n A_2\varphi,$$

где

(α_{ij}) — квадратичная матрица n-ого порядка,

φ_j — n-мерый вектор.

Тогда, уравнение (I. 3. 2) приводится к системе

$$\varphi_i = (I + A_1)^{-1}\left(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\varphi_j\right), \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{I.3.3}$$

Если P_n выбирается так, что

$$\alpha_{ij} = 0 \text{ при } j \leqslant i,$$

и

$$\| P_n A_2 - A_2 \| \to 0,$$

и кроме этого A_1 — линейный оператор, то нетрудно решать уравнение (I. 3. 3).

Аналогично теореме сходимости проекционных методов имеем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть B — сепарабельное банахово пространство, последовательность $\{P_n B\} = \{X_n\}$ предельно плотна в B. Операторы P_n равномерно ограничены*

---

* Норма в пространстве H_μ функций, удовлетворяющих условию Гельдера, определяется следующим образом

$$\|\varphi\|_\mu = \max|\varphi| + \sup \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}$$

$$\| P_n \| \leqslant C \qquad (\forall n),$$

и
$$\| P_n A_2 - A_2 \| \to 0.$$

Тогда

$$\| \varphi - \tilde{\varphi}_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

$$\tilde{\varphi}_n = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n).$$

Замечание. В случае, когда A—ограничено-самосопряженный оператор, выражая A в виде $A = A_1^0 + A_2 + A_2^*$ так, что $I + A_1^0 + A_2 = I + A_1$ имеет обратный, получим метод Зейделя [13].

3. 2. Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi\,(y)\, dy = f(x) \tag{I.3.4}$$

Перепишем это уравнение в следующем виде.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K\,(x, y) \varphi(y) dy = f(x) + \lambda \int_x^1 K\,(x, y) \varphi(y) dy.$$

Обозначая

$$K^x\varphi = \int_0^x K\,(x,y)\, \varphi\,(y)\, dy,$$

$$K_x\varphi = \int_x^1 K\,(x,y)\, \varphi\,(y)\, dy,$$

имеем

$$(I - \lambda K^x)^{-1} = I + \lambda\Gamma^x,$$

(потому в L_2 оператор $I—\lambda K^x$ имеет непрерывный обратный оператор).

Вместо (I. 3. 4) рассмотрим

$$\varphi = (I + \lambda\Gamma^x)\,(f + \lambda K_x\varphi). \tag{I . 3. 5}$$

Если

$$|\lambda|\, \| I + \lambda\Gamma^x \| . \| K_x \| < 1, \tag{I . 3. 6}$$

то можно использовать метод простых итераций, чтобы приближенно решать (I. 3. 5) — это не что иное как метод Зейделя, применяющий к уравнению (I. 3. 4). Этот процесс сходится если K самосопряженно положительно определенный и λ не является характеристическим значением уравнения (I. 3. 4).

В случае, когда (I. 3. 6) не удовлетворяется, используем кубатурные формулы с узлами

$$x_i = \frac{i}{n}, \; i = 0,1,\ldots, n.$$

Точность решения зависит от выбранной формулы.

Этот метод применяемый к сингулярным и нелинейным интегральным уравнениям, особенно удобен ко квази-линейным уравнениям с маленькой нелинейной части Имеются иллюстрируемые примеры.

II. О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

В этой главе предложены некоторые методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений и их систем, не отраженные в [6]. Метод замены ядра регулярной части на вырожденное рассматривается и применяется эффективно к многим уравнениям разных типов. Исключительные случаи сингулярных интегральных уравнений рассматриваются как случай некорректно поставленной задачи и предлагаем удобный метод приближенного решения. Как известно, трудным вопросом в решении задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций является построение фундаментальной матрицы. Здесь же рассматривается один метод приближенного решения систем сингулярных уравнений, который позволяет избежать этой трудности.

§1. Об одном методе доказательства теорем Нетера.

1.1 Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,S\varphi + \lambda k\varphi = f(t), \tag{II. 1. 1}$$

где

$$S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$k\varphi = \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

L — кривая типа Ляпунова, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — функции класса Гёльдера на L. Следующая теорема является основой метода доказательства теорем Нетера.

Теорема 6. *Сингулярное интегральное уравнение* (II. 1. 1) *с ядром регулярной части* $k(t, \tau) \in L_2(L, L)$ *можно привести к эквивалентному уравнению того же типа с вырожденным ядром.*

Более общо, при

$$k(t, \tau) = \frac{k_0(t, \tau)}{|t-\tau|^{1-\mu}}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tag{II. 1. 2}$$

в котором $k_0(t, \tau) \in H_\mu$, имеем теорему

Теорема 6'. *Сингулярное интегральное уравнение* (II. 1. 1) *с ядром* (II. 1. 2.) *можно привести в эквивалентному уравнению того же типа с вырожденным ядром.*

С помощью этих теорем мы доказываем теоремы Нетера в общем случае'.

1. 2. В исключительном случае, когда $a(t) \mp b(t)$ имеют на L нули целого порядка в точках $\alpha_1, ..., \alpha_\mu$ и $\beta_1, ..., \beta_\nu$, теоремы Нетера уже не справедливы. В этом случае задачи поставлена некорректно.

Пусть

$$a(t) - b(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \alpha_j)^{m_j} . r(t),$$

$$a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} . s(t),$$

в которых $r(t), s(t)$ — отличные от нуля функции на L и m_j, p_j — натуральные числа. Обозначим

$$\chi = \operatorname{Ind} \frac{r(t)}{s(t)}, \ p = \sum_{j=1}^{\nu} p_j, \ m = \sum_{j=1}^{\mu} m_j .$$

Справедливы следующие предложения.

(1) *Случай* $\chi \geqslant p$, т. е. $\chi - p \geqslant 0$, $- \chi - m < 0$.

Предложение 1. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ не является характеристическим значением, то уравнение $K\varphi = 0$ имеет $\chi - p$ решений (линейно независимых), а $K'\psi = 0$ не имеет решений.

Преддожние 2. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ характеристическое значение и n, n' соответственно являются числами решений уравнений $K\varphi = 0$ и $K'\psi = 0$, то

$$n - n' = \chi - p.$$

(2) *Случай* $- m < \chi < p$, т. е. $\chi - p < 0$, $- \chi - m < 0$.

Предложение 3. Имеем $n = n'$.

(3) *Случай* $\chi \leqslant - m$, т. е. $\chi - p < 0$, $- \chi - m \geqslant 0$.

Предложение 4. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ не является характеристическим значением, то $K\varphi = 0$ не имеет решений, а $K'\psi = 0$ имеет $- \chi - m$ решений.

Предложение 5. Если $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ — характеристическое значение, то

$$n - n' = \chi + m.$$

§2. Метод замены ядра регулярной части на вырожденное.

2.1. *Некоторые простые теоремы.*

Теорема 7. *Если* $\varkappa < 0$, *то уравнение*

$$K^0\varphi + b(t)\sum_{j=0}^{-\varkappa-1} c_j t^j = f(t) \qquad \text{(II. 2. 1)}$$

имеет единственное решение $(\varphi(t), c_0, c_1, \dots, c_{-\varkappa-1})$ *при любой правой части.*

Теорема 8. *Если* $\varkappa < 0$ *и* λ — *не является характеристическим значением, то уравнение*

$$K\varphi + \sum_{j=0}^{-\varkappa-1} c_j t^j = f(t)$$

имеет единственное решение $(\varphi, c_0, c_1, \dots, c_{-\varkappa-1})$ *при любой правой части.*

2.2. *Метод приближенного решения.* Вместо уравнения (II. 1.1) рассматриваются следующие

$$K_n\varphi_n = a_n\varphi_n + b_n S\varphi_n + \lambda k_n\varphi_n = f, \qquad \text{(II. 2. 2)}$$

при

$$\max_{t\in L} | a - a_n | < \varepsilon_n, \quad \max_{t\in L} | b - b_n | < \varepsilon_n,$$

$$\max | f - f_n | < \varepsilon_n, \quad \| k - k_n \|_{\mu} < \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad \text{(II.2.3)}$$

С помощью теорем 7 и 8 и некоторых других свойств можем доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Если* λ *не является характеристическим значением, то с одного* $n > N$, *уравнения*

$$K_n\varphi_n = 0$$

имеют число линейно независимых решений ровно числу решений уравнения $K\varphi = 0$.

Кроме этой теоремы справедлива следующая теорема 10, которая служит основой метода приближенного решения.

Пусть

$$k_n(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(\tau),$$

$$\Gamma(t,\tau;\lambda) = \frac{D(t,\tau;\lambda)}{D(\lambda)}, \qquad \text{(II.2.4)}$$

причем

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & 1+\lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & 1+\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D(t,\tau:\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & R\alpha_1(t) \quad R\alpha_2(t) \dots R\alpha_n(t) \\ \beta_1(\tau) & \\ & D(\lambda) \\ \beta_n(\tau) & \end{vmatrix},$$

где

$$a_{ij} = (\beta_j , R\alpha_i).$$

$$Rf = af - bZS\left(\frac{f}{Z}\right).$$

Теорема 10. *Пусть* $\Gamma(t, \tau ; \lambda)$ *дается формулой* (II. 2.4) *и удовлетворяет услови*

$$\left|\int_L \Gamma(t,\tau ; \lambda)\, d\tau \right| < M_1.$$

Тогда если выполнено условие

$$\varepsilon_n N_1(1 + \| S \| + | \lambda | l) (1 + | \lambda | M_1) < 1,$$

где

$$N_1 = \max_{t \in L} | a | + | \lambda | \max_{t \in L} | b | . \| S \| ,$$

l — длина контура L,

то уравнение (II. 2.1) *имеет единственное решение, имеющее на бесконечности наивысший возможный порядок и*

$$\| \varphi - \varphi_n \| < \frac{N_1^2 . N_2 \varepsilon_n (1 + \| S \| + | \lambda | l) (1 + | \lambda | M_1)^2}{1 - \varepsilon_n (1 + \| S \| + | \lambda | l) (1 + | \lambda | M_1) N_1} + N_1(1 + | \lambda | M_1)\varepsilon_n$$

где $N_2 = \| f \|$.

2.3. Улучшение приближеного решения.

Приближенное решение можно улучшить следуюшим процессом простых итераций :

$$\varphi_n = Rf - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i R\alpha_i + b Z P_{\chi-1} - \lambda R\gamma\varphi_{n-1}, \qquad \text{(II. 2.5)}$$

где $\gamma = k - k_n$.

В качестве φ_0 возьмём

$$\varphi_0 = Rf - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i R\alpha_i + bZP_{\chi-1}.$$

Для сходимости процесса (II. 2.5), достаточно чтобы

$$\| R \| . \varepsilon_n < 1.$$

2.4. Доказывается, что метод моментов, применяемый В.В. Ивановым для приближенного решения с.и.у, является частным случаем этого метода.

Теорема 11. *Метод моментов есть частный случай метода замены ядра регулярной части* $k(t,\tau)$ *на вырожденное ядро типа*

$$k_n (t,\tau) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{\gamma_j} (\tau) R_1(t^j),$$

где

$$R_1\varphi = a_1(t)\varphi(t) - b_1(t)Z_1(t)S\left(\frac{\varphi}{Z_1}\right),$$

$$\overline{\gamma}_j(\tau)=\gamma_j(\tau)+\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{\delta_i}{\pi_i}-\varepsilon_i\right)\tau^{j-i-1},$$

$$a_n(t)=\sum_{i=-n}^{n}\delta_i t^i,\ b_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i t^i-\sum_{i=-n}^{-1}\varepsilon_i t^i,$$

Отсюда сходимость метода моментов непосредственно следует из теоремы 10.

§ 3. О применении метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений.

В этом параграфе доказана возможность применения метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению с.и.у. Пусть L — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Имеем следующую теорему :

Теорема 1. *При достаточном большом n уравнение*

$$\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\sum_{\substack{k=1\\ k<j-1,\ k>j+1}}^{n}\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t)}{t_k-t}\Delta t_k+\sum_{\substack{k=1\\ k<j-1,\ k>j+1}}^{n}k(t,t_k)\varphi(t_k)\Delta t_k=f(t),$$

где $t_k(k=1,2,\dots,n)$ деляет окружность L на n равных частей, а $t\in\overparen{t_j,t_{j+1}}$, $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$ имеет единственное ограниченное решение и при стремлении n к бесконечности это решение стремится равномерно к решению уравнения (II. 1. 1), единственность и существование которого предполагается.

§ 4. Два метода приближенного решения харатеристического уравнения.

В этом параграфе излагаются два метода приближенного решения характеристического уравнения.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$K^0\varphi\equiv a\varphi+bS\varphi=f. \qquad \text{(II. 4.1)}$$

Решение этого уравнения дается в замкнутой форме. Но так как функция $Z(t)$ имеет довольно сложный вид (который неудобно применять на практике), поэтому полезно рассматривать метод приближенного решения.

Путем приведения уравнения (II.4.1) к полному уравнению типа (II.1.1) но с простой функцией $Z(t)$ можем получить решение несложными вычислениями. Этим же способом можно применять к приближенному решению систем с.и.у.

§ 5. О приближенном решении системы сингулярных интегральных уравнений.

Будем рассматривать систему

$$\Lambda\varphi \equiv A(t)\varphi(t) + B(t)S\varphi + K\varphi(t) = f(t), \tag{II. 5.1}$$

в котором

$$A(t) = \|a_{ij}(t)\|,\ B(t) = \|b_{ij}(t)\|,\ K(t,\tau) = \|k_{ij}(t,\tau)\|,$$

$$\varphi(t) = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\ f(t) = (f_1,\ldots,f_n).$$

Как известно трудным вопросом в решении задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций является построение фундаментальной матрицы. Для того, чтобы избежать этого, наряду с уравнением (II. 5.1) мы рассмотрим оператор

$$\pi\psi \equiv A_1\,\psi + B_1\,S\psi,$$

где

$$A_1(t) = \frac{1}{2}\left[S^{-1} + D^{-1}R(t)\right],$$

$$B_1(t) = \frac{1}{2}\left[S^{-1} - D^{-1}R(t)\right],$$

причем $\quad S = A + B, \qquad D = A - B,$

$R(t)$ – некоторая рациональная матрица (т.е. элементы которой являются рациональными функциями), индекс которой равен χ. Исходное уравнение эквивалентно следующему

$$\Pi\Lambda\varphi \equiv \frac{1}{2}(E+R)\varphi + \frac{1}{2}(E-R)S\varphi + N\varphi = \Pi f. \tag{II.5.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$X(z) = \begin{cases} E & , z \in S^+ \\ \|z^{-\chi}\| & , z \in S^- \end{cases}$$

Нужно подобрать $R(t)$ так, чтобы $N(t,\tau)$ имела достаточно простым видом. Дальше, схема приближенного решения получается аналогично как и в случае одного уравнения.

§ 6. Некоторые результаты приближенного вычисления сингулярных интегралов и их применение к решению сингулярных интегральных уравнений.

6.1. Многие важные интегралы в прикладных задачах приведены к следующим видам :

$$\sigma\varphi = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)\,dx}{(x-x_0)\sqrt{1-x^2}}, \tag{II.6.1}$$

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{x-x_0}, \tag{II.6.2}$$

$$T\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\mathrm{ctg}\frac{x-x_0}{2}\,dx\ . \qquad (II.6.3)$$

Некотрые авторы как А.А. Корнейчук, Г.Н. Пыхтеев, В.В. Иванов [12, 4, 18] уже рассматривали приближенное вычисление таких типов интегралов.

Здесь мы изложим некоторые способы вычисления этих интегралов, которые удобны при приближенном решении с.и.у.

а) Пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $[-1,1]$. Заметим, что

$$\sigma\, T_n = U_n,$$

где T_n, U_n – многочлены Чебышева 1-ого и 2-ого рода.

Затем используя кубатурную формулу Эрмита получим

$$\sigma\varphi = \sum_{n=1}^{2m-1} a_n U_n(x_0).$$

Погрешность будет

$$\varepsilon = o\left(\frac{1}{(2m)^k}\right),$$

если $\varphi(x)$ имеет производные до k-ого порядка.

Аналогично для $S\varphi$.

б) При вычислений $T\varphi$ особенно выделить внимание на случай, когда $\varphi(x) = x$, потому что этот интеграл играет важную роль в приближенном решении с.и.у. с ядром Гильберта. В [25] дается конкретный способ вычисления такого интеграла. Имеем

$$Tx = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n+1)!}\left(x_0^{2n+1} + (2\pi - x_0)^{2n+1}\right),$$

где B_n – числа Бернулли.

6.2. Подробно рассматривается приближенное решение следующих типов уравнений

(1) Сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта,

(2) Сингудярного интегрального уравнения 1-ого рода,

(3) Интегрального уравнения типа свёртки,

(4) Интегрального уравнения Абеля и его обобщенного уравнения.

§ 7. О приближенном решении одного класса с.и.у. с ядром сдвига и его применение к задаче диффракции волн в однородной и неоднородной упругой сфере.

7.1. Рассмотрим уравнение типа

$$K\varphi \equiv a\varphi + bS_\alpha\varphi + \lambda k\varphi = f, \qquad (II.7.1)$$

где

$$S_\alpha\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau,$$

причем $\alpha(t)$ – преобразующая L в себя и имеющая $\alpha'(t) \neq 0 \in H_\mu$. Функция $\alpha(t)$ предполагается удовлетворять условию Карлемана: $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$.

Предложили метод приближенного решения уравнения (II.7.1), который основан на идее приведении его к системе двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и разложении ядра по многочленам Фабера. Этот метод был применен к задаче диффракции волн.

7.2. Рассматривается задачу диффракции волн в однородной и неоднородной упругой сфере. Излагается метод приведения этой задачи в случае однородной сфере и угол α_0 к системе с.и.у.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\, i \operatorname{ctg} \chi_1 \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(x)}{s-x}\, dx + v(s) = f_1(s), \\ u(s) - \dfrac{1}{\pi}\, i \operatorname{ctg} \chi_2 \displaystyle\int_{c}^{d} \frac{v(x)}{s-x}\, dx - \frac{1}{\pi}\, i \operatorname{ctg} \chi_2 \int_{c}^{d} k(s,x)\, v(x)\, dx \doteq f_2(s), \end{cases}$$

где

$$f_1(s) = -\alpha(s)\sqrt{1-\alpha^2(s)}\; i F_2(\alpha),$$

$$f_2(s) = -s\sqrt{1-s^2}.\; i F_1(s)$$

$$k(s,x) = \frac{1}{s-x}\left[\frac{s-x}{\alpha(s)-\alpha(x)}\,.\alpha'(x) - 1\right]$$

$$\alpha(s) \doteq \frac{\cos\pi/2\alpha_0.\chi_1}{\cos\pi/2\alpha_0.\chi_2},\ \cos\frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{b}{a},$$

$2\alpha_0$ — пропущенный угол сферы, b,a — const упругости сферы.

Применяя метод, изложенный выше, к частному случаю когда $\alpha_0 = 0$, мы получим численные результаты, которые сходны с результатом А.Ф.Филиппова [30]*.

§ 8. Приближенное решение сингулярных уравнений в исключительных случаях.

В этом параграфе рассматривается один метод приближенного решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях и доказывается возможность применения метода регуляризации А.Н. Тихонова к этим случаям.

8.1. Известно, что наша задача поставлена некорректно. Пусть уравнение (II. 1.1) имеет единственное решение. Будем предполагать, что решение $\varphi \in H(M_1,M_2,\mu)$, где $H(M_1,M_2,\mu)$ —класс функций удовлетворяющих условию Гельдера с постоянным M_1 и ограниченных в совокупности, т.е.

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant M_1 |t' - t''|^{\mu}\ |\varphi| < M_2,\ 0 < \mu \leqslant 1.$$

Вводим в H_μ норму следующим образом

$$\|\varphi\| = M + M_0,\ M = \max|\varphi|,\ M_0 \text{ — const Гёльдера}$$

Заменим в (II.1.1) близкими вырожденными ядрами k_n так, что $\|k - k_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

---

*Способом А.Ф.Филиппова можно только получить решение в этом частном случае.

Решения φ_n уравнений

$$K_n\varphi_n = a\varphi_n + bS\varphi_n + \lambda k_n\varphi_n f$$

считаются приближеными решениями уравнения (II.1.1). Схема вычислений и улучшения этих приближенных решений построена аналогично [24]. Согласно теореме из [21] и в силу компактности множества $H(M_1,M_2,\mu)$ в $H(\mu-\varepsilon)$ можно доказать сходимость φ_n к точному решению.

8.2. *Вопрос о регуляризации.* Будем для простоты считать, что L имеет длину 2π. Как известно уравнение (II.1.1) можно привести к уравнению с ядром Гильберта

$$L\psi \equiv a(s)\,\psi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(s,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,\psi(\sigma)d\sigma = g(s). \tag{II.8.1}$$

Рассматривая уравнение (II.8.1), будем искать его решение $\bar\psi$ в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Предполагаем, что такое решение существует, и оно единственно. Можем считать, не нарушая общности, что $\bar\psi(0) = \bar\psi(2\pi) = 0$ (так как, вообще, если $\bar\psi(0) = \bar\psi(2\pi) = \beta$, то вместо (II.8.1) можно рассматривать $L\psi^\circ = g^\circ$, $\psi^\circ = \bar\psi - \beta$, $g^\circ = g - L[\beta]$).

Вводим оператор

$$M^\alpha[\psi,g] = N[\psi,g] + \alpha\,\Omega[\psi],$$

где

$$N[\psi,g] = \int_0^{2\pi}[L\psi - g]^2 ds,$$

$$\Omega[\psi] = \int_0^{2\pi}\Big[k_1(s)\psi^2(s) + M\psi\Big]ds,\ k_1(s) > 0,$$

причем

$$M\psi = \sup\frac{|\psi(s_2)-\psi(s_1)|}{|s_2-s_1|^\mu},\ 0 \leqslant s_i \leqslant 2\pi,\ (i=1,2).$$

Аналогично [22] имеем предложение:

Для любой функции $g \in H_\mu$ и любого $\alpha > 0$ существует единственная $\psi^\alpha \in H_\mu$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[\psi,g]$. Функция ψ^α определяется как решение уравнения

$$\Big[\alpha k_1(s) + a^2(s) + L^2(s,s)\Big]\psi(s) + \bar g(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K^*(s,\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

где

$$K^*(s,\xi) = a(s)\int_0^{2\pi} L(s,\xi)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(s,\sigma).L(\sigma,\xi).\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{}.\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\,d\sigma,$$

$$\bar{g}(s) = \int_0^{2\pi} L(s,\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s-\sigma}{2} g(\sigma)\, d\sigma + a(s)\, g(s).$$

Справедлива и следующая теорема

Теорема 13. *Пусть функция* $\bar{g}(x) \in H_\mu$ *соответствует решению уравнения* (II. 8.1) *равному* $\bar{\psi}(s) \in H_\mu$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое,* $\delta_0(\varepsilon, \bar{\psi})$, *что если*

$$\| \bar{\bar{g}} - \bar{g} \| < \delta \text{ и } q_1\delta^2 \leqslant \alpha(\delta) \leqslant q_2\delta^2, \ (q_1 > 0),$$

то $| \psi^{\alpha(\delta)} - \bar{\psi}(s) | < \varepsilon$ *при* $\delta < \delta_0$ *(где* ψ^α *реализующая минимум* $M^\alpha[\psi, g]$).

III. О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

§ 1. Об одном методе приближенного вычисления резольвенты.

Пусть в уравнении (II.2.1)

$$k(t,\tau) = k_1(t,\tau) + k_2(t,\tau)$$

и $K_1 = K^0 + \lambda k_1$ имеет ограниченный обратный оператор (нужно только λ не является характеристическим значением оператора Rk_1). Тогда уравнение (II.2.1) можно записать в виде

$$\varphi + \lambda K_1^{-1} k_2 \varphi = K_1^{-1} f.$$

Отсюда, если λ не является характеристическим значением $K_1^{-1} k_2$, то имеем

$$\varphi = (I + \Gamma_1) K_1^{-1} f,$$

причем Γ_1 — резольвента оператора $\lambda K_1^{-1} k_2$.

Таким образом, если известна резольвенты Γ_1, то решение уравнения (II . 2. 1) дается в замкнутой форме.

Приближенное вычисление резольвенты является важным делом не только для решения уравнения Фредгольма но и для решения с.и.у.

Здесь предложен один метод приближенного вычисления значения резольвенты.

В [19] было получено функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Gamma(x,y,z)}{\partial z} = \Gamma(x,z,z)\, \Gamma(z,y,z), \tag{III. 1.1}$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию

$$\Gamma(x,y,0) = K(x,y) \tag{III. 1. 2}$$

при $z = 1$ является резольвентой интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x,y)\,\varphi(y)\,dy + f(x).$$

Относительно уравнения (III.1.1) справедливы следующие результаты.

Теорема 14. *Если непрерывная в области* $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ *функция* $K(x,y)$ *удовлетворяет для любых* $0 \leqslant z \leqslant 1$ *следующему условию*

$$\int_0^z \frac{|K(x,z)\,K(z,y)|}{(1-\alpha z)^2}\,dz < \frac{|K(x,y)|\,\alpha z}{1-\alpha z},$$

$$(0 < \alpha < 1)$$

то уравнение (III. 1. 1) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* (III. 1. 2.)

Теорема 15. *Пусть* $K(x,y)$ *непрерывна в* $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ *и*

$$\int_0^1 K^2(x,y)\,dx \leqslant M^2 < 1, \int_0^1 K^2(x,y)\,dy \leqslant M^2 < 1,$$

то уравнение (III. 1. 1) *имеет единственное ограниченное решение в* $[0,1]$, *удовлетворяющее начальному условию* (III. 1.2).

Теорема 16. *Пусть* $K(x,y)$ *непрерывна и неотрицательна в* $[0,1;0,1]$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\beta(b-a)\,K(x,y) \leqslant \int_a^b K(x,t)\,K(t,y)\,dt \leqslant \alpha(b-a)\,K(x,y),$$

в которых $\beta \geqslant 0,\ \alpha \geqslant \beta,\ \alpha \geqslant 1$ *при всех* $0 \leqslant a,\ b \leqslant 1$.

Тогда уравнение (III.1.1) *имеет единственное ограниченное решение, удовлетворяющее условию* (III. 1. 2).

Теорема 17. *Пусть* $K(x,y)$ *непрерывна в области* $[0,1;0,1]$. *Для того чтобы уравнение* (III.1.1) *имело единственное ограниченное решение, удовлетворяющее условию* (III. 1.2), *необходимым и достаточным условием является*

$$\left|\int_0^z K(x,x)\,dx\right| < 1 \text{ при всех } 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Чтобы доказать эту теорему, нам понадобилась следующая лемма

Лемма. *Пусть* $K_n(x,y)$ *равномерно сходятся к непрерывной функции* $K(x,y)$ *и уравнение* (III.1.1) *имеет ограниченные решения, удовлетворяющие условиям*

$$\Gamma_n(x,y,0) = K_n(x,y).$$

Тогда уравнение (III.1.1) *также имеет ограниченное решение, удовлетворяющее условию* (III.1.2) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n (x, y, z) = \Gamma (x, y, z).$$

Мы можем использовать, например, метод Рунге-Кутта чтобы приближенно вычислить значение резольвенты. Имеются иллюстрируемые примеры.

§ 2. Один метод итераций приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Рассматривается уравнение

$$K\varphi = \mu \varphi + f,$$

где

$$K\varphi = \int_a^b K\ (x,y)\ \varphi\ (y)\ dy.$$

Предложен метод итераций, позволяющее приближенно решать это уравнение в случае

$$\mu \overline{\in} \sigma(K),$$

где $\sigma(K)$ — спектр оператор K. Процесс итераций сходится и в случае $|\mu| \leqslant \|K\|$. [42]

Поступила в редакцию 15/11/1975г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] БЕЛЬТЮКОВ Б.А., ВОЛОКИТИН С.С. ЖВМ и МФ, XIII, 6, 1973 1390 — 1401.

[2] ГАХОВ Ф.Д. *Краевые задачи.* Физматиз, М, 1963.

[3] ДОМБРОВСКАЯ И.И., ИВАНОВ В.К. *Некорректные линейные ур вненияи исключительные случаи уравнений типа свертки.* ЖВМ и МФ, Т. 4, № 2, 1964.

[4] ИВАНОВ В.В. *Приближенное решение особых интегральных уравнений* ДАН СССР, Т. 110, № 1, 1956, 15 — 18.

[5] ИВАНОВ В.В. *Методы приближенного решения систем с.и.у* ЖВМ и МФ, Т.3. № 4, 1963, 664 — 682.

[6] ИВАНОВ В.В. *Методы приближенного решения с.и.у.* сб. «Математический анализ 1963» Итоги науки, Ин-т науч. информ. АН СССР, М, 1965, 125 — 177.

[7] КАЛАНДИЯ А.И. ДАН СССР, Т. 125, № 4, 1959, 715 — 718.

[8] КАНТОРОВИЧ Л.В. *Приближенное решение функциональных уравнений*, УМН, II, вып. 6, 1956.

[9] КАНТОРОВИЧ Л.В, АКИЛОВ Г.И. *Функциональный анализ в нор-х пространствах*, Физматиз М, 1959.

[10] КАНТОРОВИЧ Л.В., КРЫЛОВ В.И. *Приближенные методы высшего анализа*, физматиз 1962.

[11] КИМ ЗЕ ПХЕН. ДАН СССР, 1963, 150, 6, 1249 — 1251.

[12] КОРНЕЙЧУК А.А. Дополнение к ЖВМ и МФ, 1964, 4, 4, 64 — 74.
[13] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и др. *Приближенное решение операторных уравнений*, М, 1969.
[14] ЛАВРЕНТЬЕВ М.М. *О некоторых некорректн поставленных задачах мат-физики*, сб. « Некоторые вопросы прикладной и вычислительной математики » Новосибирск 1966.
[15] МАНДЖАВИДЗЕ Г.ф. *Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций* Исс. по современным проблемам теории функций комплексного переменного Сб. статей под редакцией А.И. Маркушевича, М, 1960, стр. 365 — 370.
[16] МИХЛИН С.Г., СМОЛЦКИЙ Х.Л. *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*, М, 1965.
[17] МУСХЕЛИШВИЛИ Н.И. *Сингулярные интегральные уравнений*, Физматиз, М, 1962.
[18] ПЫХТЕЕВ Г.Н. Прикладная мат. и механика. 1959, 23, 6, 1074 - 1082.
[19] СОБОЛЕВ С.Л. Известия АН СССР, Т.20, 4, 1956
[20] СОФРОНОВ И.Д. ДАН СССР, Т. 110, № 6, 1956, 940 - 942.
[21] ТИХОНОВ А.Н. *Об устойчивости обратных задач* ДАН СССР, 1943, Т. XXXIX № 5 195 - 198.
[22] ТИХОНОВ А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* ДАН СССР, 1963, Т.151, 13, 501-504.
[23] ТИХОНОВ А.Н. ДАН СССР, 1963, Т. 153, № 1, 49-52.
[24] ФАН ВАН ХАП. *Об одном методе приближенного решения с.и.у.* ЖВМ и МФ, 1965, № 2, 171-184.
[25] ФАН ВАН ХАП. *Приближенное решение с.и.у. с ядром Гильберта* Вестник МГУ, 1965, 41-59.
[26] — *Приближенное решение линейных с.и.у.* Сб. « Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики ». Дубна, 1965, 46-50.
[27] — *Приближенное решение с.и.у. в исключительных случаях* Дубна Р5-3642, 1967.
[28] — *О применении метода замены интеграла конечной суммой к приближенному решению с.и.у.* Дубна Р5-3643, 1967.
[29] — Вестник МГУ, 1969, 3.
[30] ФИЛИППОВ В. Ф. *Некоторые задачи диффракции плоских упругих волн* ПММ, Т. XX вып. 6, 1956, 688-703.
[31] ХВЕДЕЛИДЗЕ Б.В. Сообщ. АН Груз ССР, Т. XXI, № 2, 1955, стр. 81-88.
[32] CHERRAULT A., LIONS J.L. *Approximation des distributions et applications*, Institut Blaix Pascal, 1967.
[33] COLLATZ L. Functional analysis and Numerical Mathematics, 1964.
[34] LATTES R., LIONS J.L. *Méthode de quasi-réversibilité et applications* — Dunod, Paris 1967
[35] PHAN VAN HAP. *Sur une nouvelle méthode pour résoudre approximativement un système d'équations intégrales singulières.* Tạp san Toan Ly, V, No—3 4, 1966, p. 71—74, Hanoi.
[36] PHAN VAN HAP. Soc. Ind. and Appl. Math, 1966, 14.
[37] — Tap san CO HOC, II, 3, 1966, 185-201, Hanoi.
[38] — *Méthode approximative de résolution des équations intégrales singulières dans certaincas particuliers.* Tap san Toan Ly, VII, № 1- 1968, p. 47 - 54, Hanoi,
[39] — Сб. Краткие сообщения на международном конгрессе математиков в Ницце 1970г. (9/1970-Nice),
[40] — *On the approximate solution of a class of singular integral equations with displacement kernel* Tap san Toan Ly, IX, 3 - 4, 1970, p. 41 - 43.
[41] — *Resolution approximative des équations et systèmes d'équations intégrales.* Acta Scientiarum Vietnamicarum, VI, 1970, p. 120 — 149
[42] — Thong bao khoa hoc Đai hoc tong hop Hanoi, № 4, 1971, 19-49
[43] — Thông báo khoa học Đại học tổng hợp Hà Nội №3, (1968—1969), p. 28-42
[44] — *Об одном методе итераций приближенного решения операторных уравнений и его применение к приближенному решению с.и.у.* Tập san Toán học, I, № 4, 1973, 22 — 27, Hanoi
[45] STEWART CHARLES E. SIAM, 1960, 8, 2, 343—353.