ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

ТОМ 1, № 1 (1976)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

NGUYỄN VĂN ĐẠO

Ханойский политехнический институт

Будучи естественным развитием предыдущей работы автора [11], предлагаемая статья посвящена исследованию параметрических колебаний прямоугольных пластинок, нагруженных электромагнитной силой. Были выяснены те условия, при выполнении которых пластинки совершают колебания с частотой электрического контура. Уравнения движения пластинок записываются в форме Кармана. Полученные нелинейные уравнения решаются приближенно асимптотическим методом нелинейной механики. Теоретические результаты проверяются экспериментом.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНКИ.

В дальнейщем изложении принимается, что материал пластинки однородный и изотропный и что она имеет постоянную толщину , рассматриваемую как малая величину по сравнению с другими размерами a, b пластинки. Возьмём плоскость x y в срединной плоскости пластики и начало координат 0 в одном из их углов.

Колебания пластинки с достаточно большой амплитудой описываются уравнениями:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 w+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta_x}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial\sigma_y}{бy}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{1}{h}p(x,y,t)$$

где u, v обозначают перемещения частицы в срединной плоскости соответственно в x, y — направления, w — перемещение этой частицы, нормальное к срединной плоскости, σ_x, σ_y, τ_{xy} составляющие напряжений, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)}$ — изгибная жёсткость пластинки, γ — коэффициент Пуассона, $p(x,y,t)$ — поперечная нагрузка, ∇^2 — дифференциальный оператор, $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Если пренебрегаем инерцией в плоскости пластинки, приравнивая нулю правую часть первых уравнений системы, то её последнее уравнение стало быть :

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 w + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{p}{h}.$$

Вводя такую функцию напряжения Φ, чтобы

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},$$

мы можем записать уравнения движения прямоугольной пластинки, нагруженной электромагнитной силой в форме

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(L\dot q) + R\dot q + \frac{1}{C}q = e\sin\nu t,\\
&\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2 w + \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\delta\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}(w,\Phi) + \frac{p}{h}, \qquad (1.2)\\
&\nabla^2\nabla^2\Phi = -\frac{E}{2}\mathcal{L}(w,w),
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},$$

$$\mathcal{L}(w,w) = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right].$$

Допустим, что индуктивность L является функцией координаты w:

$$L = L_0(1 - \alpha_1 w + \alpha_2 w^2) \qquad (1.4)$$

Электромагнитная сила считается непосредственно приложенной к прямоугольнику S_r : $\Delta\xi \times \Delta\eta$ с центром в точке (ξ, η), а именно

$$p(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{\dot q^2}{2\Delta\xi\,\Delta\eta}\dfrac{dL}{dw} & \text{для } \xi - \dfrac{\Delta\xi}{2} \leqslant x \leqslant \xi + \dfrac{\Delta\xi}{2},\ \eta - \dfrac{\Delta\eta}{2} \leqslant y \leqslant \eta + \dfrac{\Delta\eta}{2},\\ 0 & \text{вне } S_r. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Подставляя выражение (1. 4) в (1. 2) получим уравнения движения электромеханической системы в виде

$$\ddot q + \Omega_0^2 q = \frac{e}{L_0}\sin\nu t - Q(w, \dot w, \dot q, \ddot q)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{D}{h} \nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{h} + \mathcal{L}(w, \Phi), \tag{1.6}$$

$$\nabla^2\nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} \mathcal{L}(w, w),$$

здесь

$$Q(w, \dot w, \dot q, \ddot q) = \frac{R}{L_0} \dot q + \dot w \mathring{q} (-\alpha_1 + 2\alpha_2 w) + \ddot q (-\alpha_1 w + \alpha_2 w^2)$$

В линейной постановке задачи уравнения движения рассматриваемой колебательной системы имеют вид :

$$\ddot q + \Omega_0^2 q + \frac{R}{L_0} \dot q = \frac{e}{L_0} \sin \nu t,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{D}{h} \nabla^2\nabla^2 w = \frac{p}{h}, \tag{1.7}$$

$$L = L_0 (1 - \alpha_1 w)$$

Из этих уравнений вытекает, что в данной системе существует лишь главный резонанс, где пластинка сильно колеблется с частотой дважды больше частоты электрического контура.

Присутствие нелинейных членов в уравнениях движения (1. 6) существенно меняет это положение. Кроме упомянутого главного резонанса, в определённых условиях пластинка будет колебаться с частотой электрического контура (параметрический резонанс).

§ 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ.

В данном параграфе мы будем рассматривать случай, когда величины w, Φ,δ,Q,p являются малыми, а именно, предположим что Q,δ,Φ имеют такой же порядок малости что и w^2, положим

$$Q = \mu Q_1, \quad \delta = \mu\delta_1, \quad \Phi = \mu\Phi_1, \quad w = \sqrt{\mu}\, w_1.$$

Ниже для краткости записи пропускаем индекс 1 при буквах.

Допустим так же, что нагрузка (1. 5) является малой типа

$$p = \begin{cases} \dfrac{\mu L_0}{2\Delta\xi\Delta\eta} (2\alpha_2 w - \sqrt{\mu}\,\alpha_1) \dot q^2 & \text{в } S_r \\ 0 & \text{вне } S_r . \end{cases} \tag{2.1}$$

Тогда уравнения движения (1. 6) примут вид :

$$\ddot q + \Omega_0^2 q = -\mu Q(w, \dot w, \dot q, \ddot q) + \frac{e}{L_0} \sin\nu t,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^2\nabla^2 w = -\mu\delta\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \mu\mathcal{L}(w,\Phi) + \mu \frac{\tilde p}{h}, \tag{2.2}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = -\frac{E}{2} \mathcal{L}(w,w),$$

где

$$\tilde{p} = \begin{cases} \dfrac{L_0}{2\Delta\xi\Delta\eta}(2\alpha_2 w - \alpha_1)\,\dot{q}^2 & \text{в} \quad S_r, \\ 0 \quad \text{вне} \quad S_r . \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение системы (2. 2) будем искать в форме

$$q = e^* \sin\nu t + B \sin(\Omega_0 t + \theta), \qquad e^* = \frac{e}{L_0(\Omega_0^2 - \nu^2)}$$

$$\dot{q} = \nu e^* \cos\nu t + \Omega_0 B \cos(\Omega_0 t + \theta),$$

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(x,y) A_{mn} \cos\psi_{mn}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nu \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(x,y) A_{mn} \sin\psi_{mn},$$

$$\Phi = \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \Phi_{rsij}(x,y) A_{rs} A_{ij} \cos\psi_{rs} \cos\psi_{ij},$$

В этих уравнениях $\varphi_{mn}(x,y)$ являются нормальными функциями, удовлетворяющими граничным условиям, а Φ_{rsij}, A_{ij}, B, θ — неизвестными функциями, которые подлежат определению.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w,w) &= 2\left(\sum_{rs} \frac{\partial^2\varphi_{rs}}{\partial x^2} A_{rs} \cos\psi_{rs}\right)\left(\sum_{ij} \frac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial y^2} A_{ij} \cos\psi_{ij}\right) - \\ &- 2\left(\sum_{rs} \frac{\partial^2\varphi_{rs}}{\partial x\partial y} A_{rs}\cos\psi_{rs}\right)\left(\sum_{ij} \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x\partial y} A_{ij}\cos\psi_{ij}\right) = \\ &= \sum_{rs}\sum_{ij} A_{sr} A_{ij}\cos\psi_{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi_{rs}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_{rs}}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial x\partial y}\right) + \\ &+ \sum_{sr}\sum_{ij} A_{ij} A_{rs}\cos\psi_{ij}\cos\psi_{rs}\left(\frac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{sr}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{rs}}{\partial x\partial y}\right) = \\ &= \sum_{rs}\sum_{ij} A_{rs} A_{ij}\cos\psi_{rs}\cos\psi_{ij}\,\mathcal{L}(\varphi_{ij}, \varphi_{rs}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

и аналогично,

$$\mathcal{L}(\Phi, w) = \sum_{rs}\sum_{ij}\sum_{pq} A_{rs} A_{ij} A_{pq} \cos\psi_{rs}\cos\psi_{ij}\cos\psi_{pq}\,\mathcal{L}(\Phi_{rsij}, \varphi_{pq}) \tag{2.6}$$

Подставляя выражение $\mathcal{L}(w,w)$ (2.5) в последнее уравнение системы (2.2) и приравнивая коэффициенты членов $A_{rs} A_{ij} \cos\psi_{rs} \cos\psi_{ij}$ получим следующее уравнение для Φ_{rsij}:

$$\nabla^2\nabla^2 \Phi_{rsij} = -\frac{E}{2}\mathcal{L}(\varphi_{rs}, \varphi_{ij}). \tag{2.7}$$

Разложим теперь функции $\mathcal{L}(\Phi_{rsij},\ \varphi_{pq}),\ \widetilde{p}$ по нормальным функциям φ_{mn} используя их ортогональность, имеем :

$$\mathcal{L}(\Phi_{rsij},\ \varphi_{pq}) = \sum_{mn} l_{mn}^{rsijpq} \varphi_{mn}\ (x,y), \tag{2.8}$$

где

$$l_{mn}^{rsijpq} = \frac{1}{S} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \mathcal{L}(\Phi_{rsij},\ \varphi_{pq})\ \varphi_{mn}\ (x,y)\ dx\ dy.$$

$$S = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \varphi_{mn}^2\ (x,y)\ dx\ dy. \tag{2.9}$$

Для функции $\widetilde{p}$ имеем

$$\widetilde{p} = \sum_{mn} \widetilde{p}_{mn}\, \varphi_{mn}\,(x,\,y)\,. \tag{2.10}$$

Здесь

$$\widetilde{p}_{mn} = \frac{1}{S} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \widetilde{p}\ \varphi_{mn}\,(x,\,y)\,dxdy =$$

$$= \frac{L_0\,\dot{q}^2}{2\Delta\xi\Delta\eta S} \left\{ 2\,\alpha_2 \int\limits_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}} \int\limits_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \sum_{ij} A_{ij}\ \cos\psi_{ij}\ \varphi_{ij}\ (x,\,y)\ \varphi_{mn}\ (x,\,y)\ dx\ dy\ - \right.$$

$$\left. -\ \alpha_1 \int\limits_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}} \int\limits_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}(x,\,y)\ dx\,dy \right\} =$$

$$= \alpha_2\,(1 + \cos 2\nu t)\ \sum_{ij} d_{ijmn}\ A_{ij}\ \cos\psi_{ij} + k_{mn}\ \ (1 + \cos 2\nu t) + \ldots, \tag{2.11}$$

где многоточие обозначает члены, которые обращаются в нуль вместе с B.

Из уравнений для w, $\frac{\partial w}{\partial t}$ (2.4) следует :

$$\frac{dA_{mn}}{dt}\ \cos\psi_{mn} - A_{mn}\ \frac{d\psi_{mn}}{dt}\ \sin\psi_{mn} = -\,\nu A_{mn}\,\sin\,\psi_{mn}\ . \tag{2.12}$$

Подставляя затем выражения (2. 4) в (2. 2), учитывая при этом формулы (2. 8), (2. 10) получим

$$- \rho\nu \sum_{mn} \varphi_{mn} \left(\frac{dA_{mn}}{dt} \sin\psi_{mn} + A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} \cos\psi_{mn} \right) +$$

$$+ \frac{D}{h} \sum_{mn} A_{mn} \cos\psi_{mn} \nabla^2 \nabla^2 \varphi_{mn} (x, y) =$$

$$= \mu \sum_{mn} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} \varphi_{mn} l_{mn}^{rsijpq} A_{rs} A_{ij} A_{pq} \cos\psi_{rs} \cos\psi_{ij} \cos\psi_{pq} +$$

$$+ \mu\delta\rho\nu \sum_{mn} \varphi_{mn} A_{mn} \sin \psi_{mn} + \frac{\mu}{h} \sum_{mn} \widetilde{p}_{mn} \varphi_{mn} (x, y) + \ldots , \tag{2.13}$$

где ненаписанные члены обращаются в нуль когда $B = 0$.

Приравнивая коэффициенты при ψ_{mn}, учитывая при этом разложение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_{mn} (x, y) = \alpha_{mn} \varphi_{mn} + \ldots ,$$

и полагая

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \alpha_{mn} \tag{2. 14}$$

получим соотношение

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} \sin \psi_{mn} + \nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} \cos\psi_{mn} = \omega_{mn}^2 A_{mn} \cos \psi_{mn} - \mu \frac{\delta\nu}{\rho} A_{mn} \sin \psi_{mn} -$$

$$- \frac{\mu}{\rho h} \widetilde{p}_{mn} - \frac{\mu}{\rho} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} l_{mn}^{rsijpq} A_{rs} A_{ij} A_{pq} \cos\psi_{rs} \cos\psi_{ij} \cos\psi_{pq} + \ldots \tag{2.15}$$

Разрешая уравнения (2.12) и (2.15) находим :

$$\nu \frac{dA_{mn}}{d} = (\omega_{mn}^2 - \nu^2) A_{mn} \sin\psi_{mn} \cos\psi_{mn} - \mu P_{mn} \sin\psi_{mn} + \ldots ,$$

$$\tag{2.16}$$

$$\nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} = A_{mn} (\nu^2 \sin^2 \psi_{mn} + \omega_{mn}^2 \cos^2 \psi_{mn}) - \mu P_{mn} \cos\psi_{mn} + \ldots ,$$

где обозначено

$$P_{mn} = \frac{\delta\nu}{\rho} A_{mn} \sin \psi_{mn} + \frac{1}{\rho h} \left[\alpha_2 (1 + \cos 2\nu t) \sum_{ij} d_{ijmn} A_{ij} \cos \psi_{ij} + k_{mn} (1 + \cos 2\nu t) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} l_{mn}^{rsijpq} A_{rs} A_{ij} A_{pq} \cos\psi_{rs} \cos\psi_{ij} \cos\psi_{pq} . \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь одночастотный режим колебания,при котором все точки пластинки совершают колебания с одной и той же частотой. Допустим, что в рассматриваемой системе отсутствует внутренний резонанс и что частота электрического контура находится вблизи некоторой собственной частоты ω_{mn}, а именно предположим, что имеет место сооношение

$$\omega_{mn}^2 = \nu^2 + \mu\sigma \tag{2.18}$$

Тогда в исследуемой системе лишь амплитуда A_{mn} значительна. Другие амплитуды находятся вдали от резонанса; их значения будут малыми по сравнению с A_{mn} и в первом приближении ими можно пренебречь. Так, имеем:

$$P_{mn} = \frac{\delta\nu}{\rho} A_{mn} \sin\psi_{mn} + \frac{\alpha_2 \bar{d}}{\rho h}(1+\cos 2\nu t)\, A_{mn}\cos\psi_{mn} +$$

$$+ \frac{k}{\rho h}(1+\cos 2\nu t) + \frac{\beta}{\rho} A_{mn}^3 \cos^3 \psi_{mn}, \tag{2.19}$$

где

$$\bar{d} = \frac{L_0 \nu^2 e^{*2}}{2\Delta\xi\Delta\eta S} \int_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}^2\, dx\, dy \approx$$

$$\approx \frac{L_0 \omega_{mn}^2 e^{*2}}{2\Delta\xi\Delta\eta S} \int_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}^2\, dx\, dy\,,$$

$$\beta = l_{mn}^{mn\,mn\,mn} = \frac{1}{S}\int_0^a\int_0^b \mathcal{L}(\Phi_{mn\,mn}, \varphi_{mn})\, \varphi_{mn}\, dx\, dy,$$

$$k = -\frac{\alpha_1 L_0 \nu^2 e^{*2}}{4\Delta\xi\Delta\eta S} \int_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}\, dx\, dy\,,$$

$$e^* \approx \frac{e}{L_0(\Omega_0^2 - \omega_{mn}^2)}\,.$$

Усредная правую часть системы (2. 16) получим

$$[1 + o(\mu)]\frac{dB}{dt} = -\mu\frac{R}{2L_0} B\,,$$

$$\nu\frac{dA_{mn}}{dt} = -\mu\frac{\delta\nu}{2}A_{mn} - \mu\frac{\alpha_2\bar{d}}{4\rho h}A_{mn}\sin 2\psi_{mn}^* + \dots,$$

$$\nu A_{mn}\frac{d\psi_{mn}^*}{dt} = (\omega_{mn}^2 - \nu^2)\frac{A_{mn}}{2} - \frac{3}{8}\frac{\mu\beta}{\rho}A_{mn}^3 - \mu\frac{\alpha_2\bar{d}}{4\rho h}A_{mn}\cos 2\psi_{mn}^* + \dots,$$

. . . .

$$\psi_{mn}^* = \psi_{mn} - \nu t$$

§ 3. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛУЧАЕ $\alpha_2 = 0$.

Допустим теперь, что функция $L(w)$ имеет вид ($\alpha_2 = 0$)

$$L = L_0 (1 - \alpha_1 w) \tag{3.1}$$

и что внешняя нагрузка p является малой величиной порядка $\sqrt{\mu}$:

$$p = \sqrt{\mu}\, p_0 ,$$

где

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{-L_0 \alpha_1}{2 \Delta \xi \Delta \eta} \dot{q}^2 & \text{в} \quad S_r \\ 0 & \text{вне} \quad S_r . \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда вместо уравнений (2, 2) имеем:

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = -\mu \widetilde{Q} (w, \dot{w}, \dot{q}, \ddot{q}) + \frac{e}{L_0} \sin \nu t ,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \mu\, \mathcal{L} (\Phi, w) - \mu\, \delta \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{p_0}{h} , \tag{3.3}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} \mathcal{L} (w, w).$$

Здесь

$$\mu \widetilde{Q} = \frac{R}{L_0} \dot{q} - \alpha_1 \dot{w} \dot{q} - \alpha_1 w \ddot{q} . \tag{3.4}$$

Преобразуем систему уравнений (3. 3) в стандартную форму с помощью формул замены переменных

$$q = e^* \sin \nu t + B \sin (\Omega_0 t + \Theta) ,$$

$$\dot{q} = \nu e^* \cos \nu t + \Omega_0 B \cos (\Omega_0 t + \Theta) ,$$

$$w = \sum_{m,n} \left[\frac{k_{mn}}{\rho h \omega_{mn}^2} + \frac{k_{mn}}{\rho h (\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)} \cos 2\nu t + A_{mn} \cos \psi_{mn} \right] \varphi_{mn}(x, y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\sum_{mn} \left[\frac{2 \nu k_{mn}}{\rho h (\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)} \sin 2\nu t + \nu A_{mn} \sin \psi_{mn} \right] \varphi_{mn} (x, y),$$

$$\Phi = \sum_{rs} \sum_{ij} \Phi_{rsij} f_{rs} (t) f_{ij} (t) , \tag{3.5}$$

где B, Θ, A_{mn}, ψ_{mn}, Φ_{rsij} суть новые функции, а

$$f_{ij} (t) = \frac{k_{ij}}{\rho h \omega_{ij}^2} + \frac{k_{ij} \cos 2\nu t}{\rho h (\omega_{ij}^2 - 4\nu^2)} + A_{ij} \cos \psi_{ij} ,$$

$$k_{mn} = -\frac{L_0\alpha_1 e_*^2 \nu^2}{4\Delta\xi\,\Delta\eta\, S}\int\limits_{\xi-\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi+\frac{\Delta\xi}{2}}\;\int\limits_{\eta-\frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta+\frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}(x,y)\,dx\,dy, \tag{3.6}$$

$$\omega_{nm}^2 = \frac{D\alpha_{nm}}{\rho h}.$$

Аналогично (2.5), (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, w) &= \sum_{rs}\sum_{ij}\sum_{pq} f_{rs}(t)\, f_{ij}(t) f_{pq}(t)\,\mathcal{L}(\Phi_{rsij}, \varphi_{pq}),\\ \mathcal{L}(w, w) &= \sum_{rs}\sum_{ij} f_{rs}(t) f_{ij}(t)\mathcal{L}(\varphi_{rs}, \varphi_{ij}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Разложим теперь функции $\mathcal{L}(\Phi_{rsij}, \varphi_{pq})$ и p_0 по нормальным функциям:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi_{rsij}, \varphi_{pq}) &= \sum_{mn} l_{mn}^{rsijpq}\,\varphi_{mn}(x, y),\\ p_0 &= \sum_{nm} p_{mn}\varphi_{mn}(x, y) + \ldots, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где многоточие обозначает те члены, которые обращаются в нуль вместе с B,

$$l_{mn}^{rsij\,pq} = \frac{1}{S}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \mathcal{L}(\Phi_{rsij}, \varphi_{pq})\,\varphi_{mn}\,dx\,dy,$$

$$S = \int\limits_0^a\int\limits_0^b \varphi_{mn}^2\,dx\,dy, \tag{3.9}$$

$$p_{mn} = k_{mn}(1 + \cos 2\nu t).$$

Подставляя выражения (3.5), (3.9) в (3.3) находим:

$$-\rho\sum_{mn}\varphi_{mn}\left[\frac{4\nu^2 k_{mn}}{\rho h(\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)}\cos 2\nu t + \nu\,\frac{dA_{mn}}{dt}\sin\psi_{nm} +\right.$$

$$\left. + \nu A_{mn}\frac{d\psi_{mn}}{dt}\cos\psi_{mn}\right] + \frac{D}{h}\sum_{mn}\alpha_{mn}\varphi_{mn}\left[\frac{k_{mn}}{\rho h\,\omega_{mn}^2} + \frac{k_{mn}\cos 2\nu t}{\rho h(\omega_{m}^2 - 4\nu^2)} +\right.$$

$$\left. + A_{mn}\cos\psi_{mn}\right] = \mu\,\delta\,\rho\sum_{mn}\left[\frac{2\nu k_{mn}}{\rho h(\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)}\sin 2\nu t + \nu A_{nm}\sin\psi_{mn}\right]\varphi_{mn} +$$

$$+\mu\sum_{mn}\sum_{rs}\sum_{ij}\sum_{pq} l_{nm}^{rsijpq} f_{rs} f_{ij} f_{pq}\,\varphi_{mn} + \frac{(1+\cos 2\nu t)}{h}\sum_{mn} k_{mn}\varphi_{mn} + \ldots,$$

$$\Omega_0\frac{dB}{dt} = -\mu\,\widetilde{Q}(w, \dot w, \dot q, \ddot q)\cos(\Omega_0 t + \Theta).$$

Приравнивая коэффициенты φ_{mn} имеем

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} \sin \psi_{mn} + \nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} \cos \psi_{mn} = \omega_{mn}^2 A_{mn} \cos \psi_{mn} - \mu G + \ldots, \qquad (3.10)$$

где

$$G = \delta \left[\frac{2\nu k_{mn} \sin 2\nu t}{\rho h (\omega^2{}_{mn} - 4\nu^2)} + \nu A_{mn} \sin\psi_{mn} \right] + \frac{1}{\rho} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} l_{mn}^{rsijpq} f_{rs} f_{ij} f_{pq} \qquad (3.11)$$

Уравнение (3.10) вместе с очевидным соотношением :

$$\frac{dA_{mn}}{dt} \cos\psi_{mn} - A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} \sin \psi_{mn} = -\nu A_{mn} \sin \psi_{mn},$$

которое является непосредственным следствием системы (3.5), даёт :

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} = A_{mn} (\omega_m^2 - \nu^2) \sin \psi_{mn} \cos \psi_{mn} - \mu G \sin\psi_{mn} + \ldots, \qquad (3.12)$$

$$\nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} = A_{mn} (\omega_{mn}^2 \cos^2 \psi_{mn} + \nu^2 \sin^2 \psi_{mn}) - \mu G \cos \psi_{mn} + \ldots,$$

где ненаписанные члены обращаются в нуль когда $B = 0$.

Допустим, что частота ν электрического контура находится вблизи некоторой определенной натуральной частоты ω_{mn}, а именно, имеет место резонансное соотношение (2. 18). Тогда в первом приближении можем заменять правую часть (3.12) её среднением.

Прежде чем усреднить уравнения (3.12) представим функции f_{ij} и их произведения в явном виде от $\sin \nu t$, $\cos \nu t$. Имеем

$$f_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \cos\nu t + c_{ij} \sin\nu t + d_{ij} \cos 2\nu t,$$

где

$$a_{ij} = \frac{k_{ij}}{\rho h \omega_{ij}^2}, \quad b_{ij} = A_{ij} \cos \psi_{ij}^*, \quad c_{ij} = - A_{ij} \sin \psi_{ij}^*, \quad d_{ij} = \frac{k_{ij}}{\rho h (\omega_{ij}^2 - 4\nu^2)}$$

и следовательно,

$$f_{rs} f_{ij} f_{pq} = a_{rs} a_{ij} a_{pq} + [a_{rs} (a_{ij} b_{pq} + a_{pq} b_{ij}) + b_{rs} a_{ij} a_{pq}] \cos \nu t +$$
$$+ [a_{rs} (a_{ij} c_{pq} + a_{pq} c_{ij}) + c_{rs} a_{ij} a_{pq}] \sin \nu t +$$
$$+ [a_{rs} (a_{ij} d_{pq} + a_{pq} d_{ij}) + a_{ij} a_{pq} d_{rs}] \cos 2 \nu t + \ldots$$

Не трудно проверить, что :

$$\left\langle f_{rs} f_{ij} f_{pq} \sin \psi_{mn} \right\rangle = \frac{1}{4} (2 a_{rs} a_{ij} + d_{rs} d_{ij}) A_{pq} \sin (\psi_{mn}^* - \psi_{pq}^*) +$$
$$+ \frac{1}{4} (2 a_{rs} a_{pq} + d_{rs} d_{pq}) A_{ij} \sin (\psi_{mn}^* - \psi_{ij}^*) +$$

$$+\frac{1}{4}(d_{rs}a_{ij}+a_{rs}d_{ij})A_{pq}\sin(\psi^*_{mn}+\psi^*_{pq})+$$

$$+\frac{1}{4}(d_{rs}a_{pq}+a_{rs}d_{pq})A_{ij}\sin(\psi^*_{mn}+\psi^*_{ij})+$$

$$+\frac{1}{4}(a_{ij}d_{pq}+a_{pq}d_{ij})A_{rs}\sin(\psi^*_{mn}+\psi^*_{rs})+$$

$$+\frac{1}{4}(d_{ij}d_{pq}-2a_{ij}a_{pq})A_{rs}\sin(\psi^*_{rs}-\psi^*_{mn})+$$

$$+\frac{3}{8}A_{rs}A_{ij}A_{pq}(\sin\psi^*_{mn}\cos\psi^*_{rs}\cos\psi^*_{ij}\cos\psi^*_{pq}-\cos\psi^*_{mn}\sin\psi^*_{rs}\sin\psi^*_{ij}\sin\psi^*_{pq})+$$

$$+\frac{1}{8}A_{rs}A_{ij}A_{pq}[\sin\psi^*_{mn}\cos\psi^*_{rs}\sin\psi^*_{ij}\sin\psi^*_{pq}-\cos\psi^*_{mn}\sin\psi^*_{rs}\cos\psi^*_{ij}\cos\psi^*_{pq}-$$

$$-\cos(\psi^*_{mn}+\psi^*_{rs})\sin(\psi^*_{ij}+\psi^*_{pq})],$$

$$\left\langle f_{rs}f_{ij}f_{pq}\cos\psi_{mn}\right\rangle=\frac{1}{4}(2a_{rs}a_{ij}+d_{rs}d_{ij})A_{pq}\cos(\psi^*_{mn}-\psi^*_{pq})+$$

$$+\frac{1}{4}(2a_{rs}a_{pq}+d_{rs}d_{pq})A_{ij}\cos(\psi^*_{mn}-\psi^*_{ij})+\ldots.$$

Усреденные уравнения для системы (3.12) поэтому будут иметь довольно сложную форму. Однако, если предположить что, в рассматриваемой системе отсутствует внутренний резонанс, и что она совершает одночастотные колебания (последнее предположение выполняется для большинства механических сиситем [1]), то лишь координата A_{mn} будет значительной. Остальные координаты являются малыми и ими в первом приближении пренебрегаем. В результате имеем следующие уравнения:

$$[1+o(\mu)]\frac{dB}{dt}=-\mu\frac{R}{2L_0}B, \tag{3.13}$$

$$\nu\frac{dA_{mn}}{dt}=-\mu\frac{\delta\nu}{2}A_{mn}-\frac{\mu}{\rho}S_{mn}A_{mn}\sin 2\psi^*_{mn}+\ldots,$$

$$\nu A_{mn}\frac{d\psi_{mn}}{dt}=\frac{\mu\sigma}{2}A_{mn}-\frac{\mu}{\rho}R_{mn}A_{mn}-\frac{3}{8}\frac{\mu}{\rho}l_{mn}A^3_{mn}-\frac{\mu}{\rho}S_{mn}\cos\psi^*_{mn}+\ldots,$$

. . . .

где ненаписанные члены обращаются в нуль когда $B=0$ и

$$S_{mn}=\frac{1}{4}\sum_{rs}\sum_{ij}l^{rsijpq}_{mn}(a_{rs}d_{ij}+a_{ij}d_{rs})+\frac{1}{4}\sum_{pq}l^{rsmnpq}_{mn}(a_{rs}d_{pq}+a_{pq}d_{rs})+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{ij}\sum_{pq}l^{mnijpq}_{mn}(a_{ij}d_{pq}+a_{pq}d_{ij}),$$

$$R_{mn}=\frac{1}{4}\sum_{rs}\sum_{ij}l^{rsijmn}_{mn}(2a_{rs}a_{ij}+d_{ij}d_{rs})+\frac{1}{4}\sum_{rs}\sum_{pq}l^{rsmnpq}_{mn}(2a_{rs}a_{pq}+d_{pq}d_{rs})+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{ij}\sum_{pq}l^{mnijpq}_{mn}(2a_{ij}a_{pq}+d_{ij}d_{pq}), \tag{3.14}$$

$$l_{mn}=l^{mnmnmn}_{mn}$$

Так как B асимптотически стремится к нулю когда $t \to \infty$, то система уравнений (3.13) приводится к следующей:

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} = -\mu \frac{\delta\nu}{2} A_{mn} - \frac{\mu}{\rho} S_{mn} A_{mn} \sin 2\psi^*_{mn}, \tag{3.15}$$

$$\nu A_{mn} \frac{d\psi^*_{mn}}{dt} = \mu \frac{\sigma}{2} A_{mn} - \frac{\mu}{\rho} R_{mn} A_{mn} - \frac{3}{8}\frac{\mu}{\rho} l_{mn} A^3_{mn} - \frac{\mu}{\rho} S_{mn} A_{mn} \cos 2\psi^*_{mn}$$

Устойчивое стационарное решение $\overset{0}{A}_{mn}$, $\overset{0}{\psi}_{mn}$ уравнений этого типа неоднократно получено в [11].

Таким образом на основании формул (3.5) и приведенных выше рассуждений имеем в первом приближении:

$$w = \varphi_{mn}(x, y) \overset{0}{A}_{mn} \cos(\nu t + \overset{0*}{\psi}_{mn}) + \sum_{pq} \left[\frac{k_{pq}}{\rho h \omega^2_{pq}} + \frac{k_{pq}}{\rho h (\omega^2_{pq} - 4\nu^2)} \cos 2\nu t \right] \varphi_{pq} \tag{3.16}$$

Если вся пластинка совершает колебание с одинаковой модой, которая соответствует некоторой функции $\varphi_{mn}(x, y)$, то полученные выражения сильно упрощаются:

$$w = \left[\frac{k_{mn}}{\rho h \omega^2_{mn}} + \frac{k_{mn} \cos 2\nu t}{\rho h (\omega^2_{mn} - 4\nu^2)} + \overset{0}{A}_{mn} \cos(\nu t + \overset{0*}{\psi}_{mn}) \right] \cdot \varphi_{mn}(x, y),$$

$$\Phi = \Phi_{mnmn}(x, y) f^2_{mn}(t),$$

$$l_{mn} = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(\Phi_{mnmn}, \varphi_{mn}) \varphi_{mn} \, dx \, dy, \tag{3.17}$$

$$S_{mn} = \frac{3}{2} l_{mn} a_{mn} d_{mn},$$

$$R_{mn} = \frac{3}{2} l_{mn} a^2_{mn} + \frac{3}{4} l_{mn} d^2_{mn}.$$

Так, в рассматриваемом в данном параграфе случае пластинка колеблётся с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$, равным периоду электрического контура.

§4 — ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ПРИ БОЛЬШОЙ НАГРУЗКЕ.

Предположим теперь, что нагрузка $p(x, y, t)$ имеет вид

$$p = \begin{cases} -\sqrt{\mu} \dfrac{L_0 \alpha_1}{2\Delta\xi\Delta\eta} \dot{q}^2 + \mu \dfrac{\alpha_2 L_0}{\Delta\xi \Delta\eta} \dot{q}^2 w & \text{в} \quad S_r, \\ 0 \quad \text{вне} \quad S_r. \end{cases} \tag{4.1}$$

и что выражение для индуктивности $L(w)$ будет таким же как (1.4). Тогда уравнения движения электромеханической системы примёт вид:

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = -\mu Q(w, \dot{w}, \dot{q}, \ddot{q}) + \frac{e}{L_0} \sin\nu t,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \mu \mathscr{L}(\Phi, w) - \mu\delta\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \mu \frac{p^*}{h} + \frac{p^0}{h}, \tag{4.2}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} \mathscr{L}(w, w).$$

Здесь p^0 выражается формулой (3.1) и

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{\alpha_2 L_0}{\Delta\xi\,\Delta\eta} \dot{q}^3 w & \text{в} \quad S_r, \\ 0 & \text{вне} \quad S_r. \end{cases} \tag{4.3}$$

Аналогично §3 решение системы (4.2) представим в форме

$$\begin{aligned} q &= e^* \sin\nu t + B\sin(\Omega_0 t + \Theta), \\ \dot{q} &= \nu e^* \cos\nu t + \Omega_0 B \cos(\Omega_0 t + \Theta), \\ w &\equiv \sum_{ij} f_{ij}(t)\, \varphi_{ij}(x, y), \\ \Phi &= \sum_{rs} \sum_{ij} \Phi_{rsij}\, f_{rs}(t)\, f_{ij}(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Разложим теперь выражение p^* по нормальным функциям $\varphi_{mn}(x, y)$:

$$p^* = \sum_{mn} p^*_{mn} \varphi_{mn}(x, y), \tag{4.5}$$

где

$$p^*_{mn} = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^b p^* \varphi_{mn}(x, y)\, dx\, dy.$$

Заменяя сюда значение p^* из (4.3) с учётом w из (4.4) находим

$$p^*_{mn} = \alpha_2 (1 + \cos 2\nu t) \sum_{ij} d_{ijmn} f_{ij}(t), \tag{4.6}$$

где

$$d_{ijmn} = \frac{L_0 \nu^2 e_*^2}{2\Delta\xi\Delta\eta S} \int_{\xi - \frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi + \frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{ij}(x, y)\, \varphi_{mn}(x, y)\, dx\, dy.$$

Подставляя выражения (4.4), (4.6) в (4.2) получим

$$- \rho \sum_{mn} \left[\frac{4 \nu^2 k_{mn} \cos 2\nu t}{\rho h (\omega^2_{mn} - 4\nu^2)} + \nu \frac{dA_{mn}}{dt} \sin \psi_{mn} + A_{mn} \nu \frac{d\psi_{mn}}{dt} \cos\psi_{mn} \right] \varphi_{mn} +$$

$$+ \frac{D}{h} \sum_{mn} (\nabla^2 \nabla^2 \varphi_{mn}) f_{mn} = \mu \sum_{mn} \left(\sum_{sr} \sum_{ij} \sum_{pq} l^{rsijpq}_{mn} f_{rs} f_{ij} f_{pq} \right) \varphi_{mn} +$$

$$+ \mu \delta \rho \sum_{mn} \left[\frac{2\nu k_{mn} \sin 2\nu t}{\rho h (\omega^2_{mn} - 4\nu^2)} + A_{mn} \nu \sin \psi_{mn} \right] \varphi_{mn} +$$

$$+ \frac{\mu}{h} \sum_{mn} \left[\alpha_2 (1 + \cos 2\nu t) \sum_{ij} \bar{d}_{ij\,mn} f_{ij} \right] \varphi_{mn} + \frac{(1 + \cos 2\nu t)}{h} \sum_{mn} k_{mn} \varphi_{mn} + \dots,$$

где ненаписанные члены обращаются в нуль когда $B = 0$.

Приравнивая коэффициенты φ_{mn} в полученном уравнении имеем:

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} \sin \psi_{mn} + \nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} \cos\psi_{mn} = \omega^2_{mn} A_{mn} \cos \psi_{mn} - \frac{\mu}{\rho} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} l^{rsijpq}_{mn} f_{rs} f_{ij} f_{pq} -$$

$$- \mu \delta \left[\frac{2\nu k_{mn} \sin 2\nu t}{\rho h (\omega^2_{mn} - 4\nu^2)} + A_{mn} \nu \sin \psi_{mn} \right] - \frac{\mu}{\rho h} \left[\alpha_2 (1 + \cos 2\nu t) \sum_{ij} \bar{d}_{ijmn} f_{ij} \right] + \dots \quad (4.7)$$

Оно вместе с уравнением (2. 12) даёт

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} = A_{mn} (\omega^2_{mn} - \nu^2) \cos\psi_{mn} \sin \psi_{mn} - \mu F \sin \psi_{mn} + \dots,$$

$$\nu A_{mn} \frac{d\psi_{mn}}{dt} = A_{mn} (\omega^2_{mn} \cos^2 \psi_{mn} + \nu^2 \sin^2\psi_{mn}) - \mu F \cos \psi_{mn} + \dots,$$

где

$$F = \frac{1}{\rho} \sum_{rs} \sum_{ij} \sum_{pq} l^{rsij\,pq}_{mn} f_{rs} f_{ij} f_{pq} + \delta \left[\frac{2\nu k_{mn} \sin 2\nu t}{\rho h (\omega^2_{mn} - 4\nu^2)} + A_{mn} \nu \sin \psi_{mn} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\rho h} \left[\alpha_2 (1 + \cos 2\nu t) \sum_{ij} \bar{d}_{ij\,mn} f_{ij} \right]. \quad (4.8)$$

Допустим, что пластинка совершает одночастотное колебание когда частота ν близка к некоторой собственной частоте ω_{mn}, тогда как и в предыдущих параграфах, амплитуда A_{mn} и фаза ψ_{mn} удовлетворяют уравнениям

$$\nu \frac{dA_{mn}}{dt} = - \mu \frac{\delta \nu}{2} A_{mn} - \frac{\mu}{\rho} \widetilde{S}_{mn} A_{mn} \sin 2 \psi^*_{mn}, \quad (4.9)$$

$$\nu A_{mn} \frac{d\psi^*_{mn}}{dt} = \mu \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\widetilde{R}_{mn}}{\rho} \right) A_{mn} - \frac{3}{8} \frac{\mu}{\rho} l_{mn} A^3_{mn} - \frac{\mu}{\rho} \widetilde{S}_{mn} A_{mn} \cos 2 \psi^*_{mn}.$$

Здесь обозначено

$$\widetilde{R}_{mn} = R_{mn} + \frac{\alpha_2}{2h} d_{mnmn},$$

$$\widetilde{S}_{mn} = S_{mn} + \frac{\alpha_2}{4h} d_{mnmn}, \qquad (4.\ 10)$$

а R_{mn}, S_{mn} имеют вид (3. 14)

Если пластинка колеблётся с одинаковой модой, соответствующей форме $\varphi_{mn}(x, y)$ то имеем следующие простые формулы :

$$w = \varphi_{mn}(x, y) \left[\frac{k_{mn}}{\rho h \omega_{mn}^2} + \frac{k_{mn} \cos 2\nu t}{\rho h (\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)} + A_{mn}^0 \cos(\nu t + \psi_{mn}^*) \right],$$

$$\Phi = \Phi_{mn}(x, y) f_{mn}^2(t),$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_{mn} = -\frac{E}{2} \mathcal{L}(\varphi_{mn}, \varphi_{mn}),$$

$$R_{mn} = \frac{3}{2} l_{mn} a_{mn}^2 + \frac{3}{4} l_{mn} d_{mn}^2, \qquad (4.11)$$

$$S_{mn} = \frac{3}{2} l_{mn} a_{mn} d_{mn},$$

$$a_{mn} = \frac{k_{mn}}{\rho h \omega_{mn}^2}, \quad d_{mn} = \frac{k_{mn}}{\rho h (\omega_{mn}^2 - 4\nu^2)},$$

$$l_{mn} = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^l \mathcal{L}(\Phi_{mn}, \varphi_{mn}) \varphi_{mn}\, dx\, dy,$$

$$k_{mn} = \frac{-L_0 \alpha_1 e^{*2} \nu^2}{4 \Delta\xi \Delta\eta S} \int_{\xi - \frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi + \frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}(x, y)\, dx\, dy,$$

$$d_{mnmn} = \frac{L_0 \nu^2 e^{*2}}{2 \Delta\xi \Delta\eta S} \int_{\xi - \frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi + \frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\eta - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta + \frac{\Delta\eta}{2}} \varphi_{mn}^2(x, y)\, dx\, dy.$$

Из уравнений (4.4), (4.11) вытекает, что когда частота ν находится вблизи некоторой собственной частоты ω_{mn}, то пластинка будет колебаться с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$ электрического контура. Однако, следует почеркнуть, что для пластинок лишь колебания с основной частотой (ω_{11}) имеют значительную амплитуду.

§5. КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ С ШАРНИРНО ОПЕРТЫМИ КРОМКАМИ

В качестве примера рассмотрим колебания прямоугольной пластинки с шарнирно опертыми кромками. Граничные условия в данном случае будут:

$$\begin{aligned} &\text{Для} \quad x=0 \quad, x=a \qquad w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ &\text{Для} \quad y=0 \quad, y=b \qquad w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Этим условиям удовлетворяет следующая нормальная функция:

$$\varphi_{mn}=\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{5.2}$$

Отсюда находим

$$\nabla^2\nabla^2\varphi_{mn}=\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn}$$

и, следовательно, формула (2.14) даёт

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}&=\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2, \\ \omega^2_{mn}&=\frac{D}{\rho h}\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Для колебаний с одинаковой модой, сооветствующей $m=n=1$, $\varphi_{11}=\varphi$ имеем

$$w=f(t)\,\varphi(x,y), \tag{5.4}$$

$$\Phi=\widetilde{\Phi}(x,y)\,f^2(t),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi,\varphi)&=-\frac{\pi^4}{a^2b^2}\left(\cos\frac{2\pi}{a}x+\cos\frac{2\pi}{b}y\right), \\ \nabla^2\nabla^2\widetilde{\Phi}&=\frac{E\pi^4}{2a^2b^2}\left(\cos\frac{2\pi}{a}x+\cos\frac{2\pi}{b}y\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Решение уравнения (5.5) найдём в форме

$$\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Phi}_1+\widetilde{\Phi}_2, \tag{5.6}$$

где $\widetilde{\Phi}_1$ суть частное решение уравнения (5.5), и Φ_2 — решение однородного уравнения

$$\nabla^2\nabla^2\widetilde{\Phi}=0. \tag{5.7}$$

Функция $\widetilde{\Phi}_1$ имеет вид

$$\widetilde{\Phi}=c_1\cos\frac{2\pi}{a}x+c_2\cos\frac{2\pi}{b}y \tag{5.8}$$

Для нахождения постоянных c_1 и c_2 приравниваем коэффициенты $\cos\frac{2\pi}{a}x$, $\cos\frac{2\pi}{b}y$ в (5.5), подставив сюда значение $\widetilde{\Phi}$ из (5.8)

$$c_1=\frac{Ea^2}{32a^2},\quad c_2=\frac{Eb^2}{32a^2},$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\Phi}_1=\frac{E}{32}\left(\frac{a^2}{b^2}\cos\frac{2\pi}{a}x+\frac{b^2}{a^2}\cos\frac{2\pi}{b}y\right). \tag{5.9}$$

Функция $\widetilde{\Phi}_2$ определяется динамическими условиями на кромках.

1. Случай, когда сумма напряжений обращается в нуль для кромок в целом [5,6]

Имеем в данном случае

$$\text{Для } x=0,\quad x=a \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial x\partial y}=0,\ \int_0^b\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial y^2}\,dy=0. \tag{5.10}$$

$$\text{Для } y=0,\quad y=b \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial x\partial y}=0,\ \int_0^a\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial x^2}\,dx=0. \tag{5.11}$$

Подставляя сюда выражение

$$\widetilde{\Phi}=\frac{E}{32}\left(\frac{a^2}{b^2}\cos\frac{2\pi}{a}x+\frac{b^2}{a^2}\cos\frac{2\pi}{b^2}y\right)+\widetilde{\Phi}_2,$$

получим

$$\left.\begin{aligned}&\text{Для } x=0,\ x=a \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \int_0^b\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2}{\partial y^2}\,dy=0,\\ &\text{Для } y=0,\ y=b \qquad \frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2}{\partial x\partial y}=0,\quad \int_0^a\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2}{\partial x^2}\,dx=0,\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

отсюда находим

$$\widetilde{\Phi}_2=0\,. \tag{5.13}$$

Так, имеем

$$\widetilde{\Phi}=\frac{cE}{32}\left(\cos\frac{2\pi}{a}x+\frac{1}{c^2}\cos\frac{2\pi}{b}y\right),\ c=\frac{a^2}{b^2} \tag{5.14}$$

и следовательно,

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Phi},\varphi)=\frac{4E\pi^4}{32a^2b^2}\,c\left(\cos\frac{2\pi}{a}x+\frac{1}{c^2}\cos\frac{2\pi}{b}y\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

$$l_{11} = \frac{1}{S}\int_0^a\int_0^b \mathscr{L}(\Phi, \varphi)\,\varphi dx dy = -\frac{E\pi^4}{16a^4}(1+c^2),$$

$$\omega_{11} = \frac{h\pi^2}{2a^2}(1+c)\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\mu^2)}},$$

$$k_{11} = -\frac{L_0\alpha_1 \overset{2}{e_*} \nu^2}{ab}\sin\frac{\pi\xi}{a}\sin\frac{\pi\eta}{b}. \tag{5.15}$$

2. Случай, когда кромки имеют заданные перемещения Δx, Δy.

Используясь законом Гука

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

получим

$$\Delta x = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{1}{E}\int_0^a\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx,$$

$$\Delta y = \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y}dy = \frac{1}{E}\int_0^b\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{E}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dy. \tag{5.16}$$

Полагая в данном случае

$$\Phi_2 = r(t)\frac{x^2}{2} + s(t)\frac{y^2}{2}, \tag{5.17}$$

имеем

$$\widetilde{\Phi} = \frac{cE}{32}\left(\cos\frac{2\pi}{a}x + \frac{1}{c^2}\cos\frac{2\pi}{b}y\right) + r\frac{x^2}{2} + s\frac{y^2}{2}. \tag{5.18}$$

Подставляя (5.18) в (5.16) находим

$$\Delta x = \frac{f^2}{E}\left(sa - \nu ra - \frac{E\pi^2}{8a}\right),$$

$$\Delta y = \frac{f^2}{E}\left(rb - \nu bs - \frac{E\pi^2}{8b}\right).$$

Отсюда получим :

$$r = \frac{E}{f^2} \frac{a \Delta y + \nu b \Delta y}{ab(1-\nu^2)} + \frac{E\pi^2}{8} \frac{\left(\frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a}\right)}{ab(1-\nu^2)},$$

$$s = \frac{E}{f^2} \frac{b \Delta x + \nu a \Delta y}{ab(1-\nu^2)} + \frac{E\pi^2}{8} \frac{\left(\frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b}\right)}{ab(1-\nu^2)}. \qquad (5.19)$$

Если $\Delta x = \Delta y = 0$ то

$$r = r_0 = \frac{E\pi^2}{8} \frac{\left(\frac{a}{b} + \nu \frac{b}{a}\right)}{ab(1-\nu^2)},$$

$$s = s_0 = \frac{E\pi^2}{8} \frac{\left(\frac{b}{a} + \nu \frac{a}{b}\right)}{ab(1-\nu^2)},$$

$$\widetilde{\Phi} = \frac{cE}{32} \left(\cos \frac{2\pi}{a} x + \frac{1}{c^2} \cos \frac{2\pi}{b} y \right) + \frac{r_0}{2} x^2 + \frac{s_0}{2} y^2,$$

$$\mathcal{L}(\widetilde{\Phi}, \varphi) = \left\{ \frac{4\pi^4 E}{32 a^2 b^2} c \left(\cos \frac{2\pi}{a} x + \frac{1}{c^2} \cos \frac{2\pi}{b} y \right) - \right.$$

$$\left. - \left[r_0 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + s_0 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

$$l_{11} = \frac{1}{S} \int_0^a \int_0^b \mathcal{L}(\Phi, \varphi)\, dx\, dy = - \frac{E\pi^4}{16 a^4} (1 + c^2) - \pi^2 \left(\frac{r_0}{b^2} + \frac{s_0}{a^2} \right).$$

Величины ω_{11}, k_{11} имеют прежние значения (5.15).

Экспериментальные результаты.

Для проверки теоретических выводов был проведен эксперимент. Колебания пластинки с размерами 350 × 320 × 1,5 mm, две кромки которой свободно оперты и две другие свободы исследовались экспериментально. Основная частота пластинки была 50г.

Увеличивая частоту ν электрического контура от нуля мы наблюдали, что для $\nu < 50$г пластинка колебается с частотой вдвое больше ν. Когда ν была от 24 — 25г наступает главный резонанс пластинки : она сильно колеблётся с частотой 50г. Когда ν находится в интервале 50 — 54г происходит параметрический резонанс, пластинка сильно колеблется с частотой электрического контура. Для $\nu > 54$г пластинка опять колебается с частотой вдвое больше ν. Параметрические колебания пластинки с частотой больше основной частоты незначительны.

Таким образом, экспериментальные результаты находятся в согласии с теоретическими расчетами. Это свидетельствует о приемлемности ограничений, использованных в решении и показывает, что приближенные решения, построенные с использованием предположения об одночастотных режимах колебаний в областях резонансов, могут считаться приемлемыми.

Поступила в редакцию 7/V/1974 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Н.Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебачий*, М. 1963.

[2]. Л.Г. Эткин. *О возбуждении колебаний упругий систем электромагнитными возбуждениями*, Приборостроение №2, 1960.

[3]. А.Е. Чесноков. *К теории и расчёту электромагнитного вибратора*. Электричество №12, 1961

[4]. D.D. Kana. *Parametric coupling in a nonlinear electromechanical*. Proceeding of the vibrations conference 1967, Vol. 2, trans. ASME.

[5]. Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*, Москва 1963.

[6]. Огибалов П.М., Колтунов М.А. *Оболочки и пластины*. Изд. МГУ. 1969.

[7]. Тмощенко С.П., Войновский С. Кригер. *Пластинки и оболочки*. Москва, 1966.

[8]. Рабинович Р.И. *Свободные колебания гибких пластин*. Изв. вузов — строительство — архитектура 1-1966.

[9]. Nguyen xuan Hung — *die Biegeschwingungen von Rechteckplaten mit grozen Amplituden*. ZAMM Berlin, 49, 1969, py. 459 — 470.

[10]. Chu H., Herman G. *Ingluence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic Plates*. Journal of applied mechanics 1956, pp 532 — 540.

[11]. Нгуен ван Дао. *Параметрические колебания в электромеханических системах.*. Acta Scientiarum Vietnamicarum, Sectio Mathematicarum et Physicarum, T.8, 1972.