ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
ТОМ 1, № 1 (1976)

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

NGUYỄN THÀNH BANG
Отдел «Механика» при АНВ

В настоящей статье ставится задача о выборе закона изменения во времени ограниченных по модулю управляющих воздействий, при помощи которых обеспечивалось бы наилучшее в некотором обобщенном смысле приближение движения динамической системы по наперед заданной траектории в фазовом пространстве.

Показана возможность применения принципа максимума Понтрягина для решения поставленной задачи и при некоторых определенных условиях доказано, что этот принцип является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности для рассматриваемой здесь задачи.

Приводится метод последовательных приближений для решения нелинейной двухточечной краевой задачи, полученной в результате применения принципа максимума Понтрягина. Доказана сходимость данного метода и указывается путь практической реализации последнего с помощью электронных вычислительных устройств.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть поведение некоторой динамической системы описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами следующего типа :

$$\frac{dz_\nu}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu}(t)\, z_\mu + \sum_{\rho=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\, u_\rho(t) + f_\nu(t),\ z_\nu(t_0) = z_\nu^0\ \ \nu = 1, 2,\ldots, n \quad (1.1)$$

Здесь $z_\nu = x_\nu - r_\nu(t)$ — отклонение фазовой координаты x_ν рассматриваемой системы от наперед заданного в фазовом пространстве движения $r_\nu(t)$, $\nu = 1, 2,\ldots, n$, где $r_\nu(t)$ — заданные функции времени, $a_{\nu\mu}(t)$ и $b_{\nu\rho}(t)$ — известные непрерывные функции времени, $f_\nu(t)$ — заданные внешние возмущения, $u_\rho(t)$ — управляющие воздействия, закон изменения которых подлежит определению.

Система скалярных уравнений (1.1) эквивалентна следующему матричному уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\,z + B(t)\,u(t) + f(t), \qquad z(t_0) = z^0, \tag{1.2}$$

где через z, $A(t)$, $B(t)$, $u(t)$, $f(t)$, z^0 обозначены следующие матрицы:

$z = \| z_\nu \| (n \times 1)$, $A(t) = \| a_{\nu\mu}(t) \|$ $(n \times n)$, $B(t) = \| b_{\nu\rho}(t) \| (n \times m)$,

$u(t) = \| u_\rho(t) \| (m \times 1)$, $f(t) = \| f_\nu(t) \| (n \times 1)$, $z^0 = \| z^0_\nu \| (n \times 1)$.

Вектор — функция $u(t)$, которую будем называть допустимым управлением, является измеримой вектор-функцией и в каждый момент времени t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, принадлежит параллелепипеду m-мерного пространства переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$:

$$u(t) \in U = \{ u(t);\ u_\rho(t) \in C^+,\ |u_\rho(t)| \leqslant U_\rho,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ \rho = 2, 1 \dots, m \}, \tag{1.3}$$

где через C^+ обозначен класс измеримых функций.

Решение матричного уравнения (1.2) при некотором допустимом управлении $u(t) \in U$ обозначим через $z(t, u)$. Последнее, как известно, может быть представлено в следующем виде:

$$z(t, u) = s(t) + \int_{t_0}^{t_1} X(t) X^{-1}(\sigma) B(\sigma) u(\sigma)\, d\sigma. \tag{1.4}$$

где через $s(t)$ обозначена следующая известная вектор-функция:

$$s(t) = X(t)\, z^0 + \int_{t_0}^{t_1} X(t) X^{-1}(\sigma) f(\sigma)\, d\sigma, \tag{1.5}$$

а $X(t)$ — нормированная фундаментальная матрица матричного уравнения (1.2) при $u(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$. Через $X^{-1}(\sigma)$ в выражении (1.4) и (1.5) обозначена обратная матрица по отношению к матрице $X(\sigma)$.

Ставится следующая задача. Требуется определить из класса допустимых управлений закон изменения вектор-функции $u^*(t)$, обеспечивающей наилучшее приближение движения рассматриваемой системы по наперед заданной в фазовом пространстве траектории $r(t) = \| r_\nu(t) \| (n \times 1)$.

Под наилучшим будем понимать такое приближение, при котором выполняется следующий критерий оптимальности:

$$J(u^* u^*) = \min_{u \in U} J(u, u) = \min_{u \in U} \left\{ \alpha R(u, u) + \beta I(u, u) + E(u, u) \right\}, \tag{1.6}$$

где α, β — неотрицательные постоянные величины, а через $R(u, u)$, $I(u, u)$, $E(u, u)$ обозначены сдедующие функционалы:

$$R(u, u) = \frac{1}{2} \langle z(t_1, u) \,.\, z(t_1, u) \rangle, \quad I(u, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle z(t, u) \,.\, z(t, u) \rangle dt, \tag{1.7}$$

$$E(u, u) = \frac{1}{2} \int \left[\sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t)\, u_\rho^2(t) \right] dt. \tag{1.8}$$

Время t_1 предполагается фиксированным заранее, а весовые множители $e_\rho(t)$ — известными неотрицательными функциями времени, причем последние могут обращаться в нуль на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ только в конечном числе точек.

Здесь как в дальнейшем через $\langle x. z \rangle$ в выражениях (1. 7) обозначено скалярное произведение двух векторов x и z.

На основании выражений (1. 7) нетрудно видеть, что функционал $R(u,u)$, значение которого представляет собой половину квадрата длины вектора отклонения изображающей точки от заданного движения в момент окончания переходного процесса, является мерой отклонения в конце траектории, а функционал $I(u, u)$, значение которого представляет собой интегральное квадратичное отклонение от заданного движения, является мерой накапливаемого рассматриваемой системой в течение всего времени переходного процесса отклонения.

Итак, составляющая часть $\alpha R(u, u) + \beta I(u, u)$ функционала $J(u,u)$ представляет собой ничто иное как обобщенную меру отклонения рассматриваемой системы от заданного движения. Что касается функционала $E(u, u)$, то, на основании выражения (1. 8), нетрудно видеть, что его значение с физической точки зрения означает энергию, затраченную для осуществления управляющих воздействий, представляет собой меру управления.

Таким образом, выбирая закон оптимального управления мы хотим добиться того, чтобы движение рассматриваемой системы было по возможности наиболее близким к заданной в фазовом пространстве траектории в смысле минимизации суммы обобщенной меры отклонения и меры управления.

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $e_\rho(t) \equiv 0$, $\rho = 1,2,\ldots, m$, мы проходим к задаче, рассматриваемой различными авторами в работах [1 — 3]; при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $e_\rho(t) \equiv 0$ $(\rho = 1,2,\ldots,m)$ мы имеем дело с задачей терминального управления [4 — 7]; при $\beta = 1$, $\alpha = \lambda$, $0 < \lambda < +\infty$, $e_\rho(t) \equiv 0$ $(\rho = \overline{1, m})$ поставленная здесь задача превращается в задачу, исследуемую автором в работе [8]; при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ рассматриваемая задача представляет собой оптимальную в смысле минимизации меры управления задачу о приближенном осуществлении движения по заданной траектории [9 — 10], а случай, когда $\alpha = 1$, $\beta = 0$, соответствует оптимальной задаче терминального управления [11].

Таким образом, поставленная выше задача представляет собой ничто иное как обобщенную задачу о приближенном осуществлении движения динамической системы по наперед заданной в фазовом пространстве траектории, оптимального в смысле минимизации одновременно и обобщенной меры отклонения и меры управления.

Допустимое управление, дающее решение поставленной задачи, будем называть оптимальным управлением, а соответствующая ему траектория — оптимальной траекторией.

Делая аналогично работе [9], нетрудно доказать существование единственной оптимальной траектории для поставленной задачи и при выполнении B-условия, т. е. если $m \leqslant n$ и ранг матрицы $B(t)$ почти всюду на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равен m, легко доказать единственность оптимального управления. Перейдем поэтому сразу к решению поставленной выше задачи.

§2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. Исходя из матричного уравнения (1.2) нетрудно показать, что выражение для функционала $R(u,u)$ может быть представлено в следующем интегральном виде:

$$R(u,u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\langle z.\, A(t) z \rangle + \langle z.\, B(t)\, u(t) \rangle + \langle z.\, f(t) \rangle \right] dt + \frac{1}{2} \langle z^0.\, z^0 \rangle \qquad (2.\ 1)$$

1. Необходимые условия оптимальности. Принимая во внимание выражения (1.2) и на основании принципа максимума Понтрягина, изложенного в монографии [12], легко показать, что оптимальное управление должно находиться среди допустимых управлений, определяемых по закону :

$$w_\rho(t,\lambda) = \begin{cases} s_\rho(t,\lambda)/e_\rho(t) & \text{при } |s_\rho(t,\lambda)| < e_\rho(t) U_\rho, \\ U_\rho \operatorname{sign} s_\rho(t,\lambda) & \text{при } |s_\rho(t,\lambda)| \geqslant e_\rho(t) U_\rho, \end{cases} \qquad (2.\ 2)$$

где через $s_\rho(t,\lambda)$ обозначены следующие функции

$$s_\rho(t,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t) \lambda_\nu, \quad \rho = 1,2,\dots,m. \qquad (2.3)$$

Входящие сюда величины λ_ν, $\nu = 1,2,\dots, n$, суть нетривиальное решение матричного уравнения

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\ A^\tau(t)\, \lambda + \beta\, z(t, w), \qquad (2.\ 4)$$

при следующем граничном условии

$$\lambda(t_1) = -\alpha\, z(t_1, w) \qquad (2.5)$$

Здесь через $z(t, w)$ обозначено решение матричного уравнения (1.2) при $u(t) = w\ (t, \lambda) = \| w_\rho(t, \lambda) \| (m \times 1)$, где элементы $w_\rho(t, \lambda)$ определяются согласно закону (2.2). Символ τ в правой части матричного уравнения (2.4) означает транспонирование по отношению к данной матрице.

Допустимое управление, элементы которого определяются согласно формулам 2.2), будем называть экстремальным управлением. Поскольку принцип максимума Понтрягина представляет собой лишь необходимые условия оптимальности, то ясно, что не всякое экстремальное управление может быть оптимальным.

Ниже предлагаемая теорема 1 будет дать нам ответ на вопрос о том , при каких условиях экстремальное управление будет оптимальным.

Следует заметить, что при $e_\rho(t) \not\equiv 0$, $\rho = 1, 2,\dots, m$, элементы вектора экстремального управления являются непрерывными функциями времени, а для случая, когда $e_\rho(t) \equiv 0$, $\rho = 1, 2,\dots, m$, то нетрудно видеть, что закон экстремального управления принимает вид :

$$w_\rho(t, \lambda) = U_\rho \operatorname{sign} s_\rho(t, \lambda), \ \rho = 1, 2,\dots, m. \qquad (2.\ 6)$$

В последнем случае элементы вектора экстремального управления являются кусочно — постоянными финкциями времени.

2. Достаточность принципа максимума.

Теорема 1. Пусть найдено такое начальное условие Λ^* для векторной переменной λ, при котором обеспечивалось бы выполнение граничного условия (2.5) и путсь $\lambda^*(t) = \| \lambda_\nu^*(t) \| (n \times 1)$ есть соответствующее этому начальному условию нетривиальное решение матричного уравнения (2.4) и такое, что мера множества нулей функции :

$$s_\rho(t, \lambda^*) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda_\nu^*(t)\,, \ \rho = 1, 2, \dots, m \tag{2.7}$$

равна нулю. Тогда экстремальное управление, определяемое по закону (2.2) при $\lambda_\nu = \lambda_\nu^*(t)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, будет оптимальным.

Доказательство. Для этой цели введем в рассмотрение следующий вспомогательный функционал :

$$j(u, u) = \frac{\alpha}{2} \langle z(t_1, u) \,.\, z(t_1, u) \rangle + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Big[\beta \langle z(t, u) \,.\, z(t, u) \rangle +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t)\, u_\rho^2 - 2 \frac{dj^*(t)}{dt} \Big]\, dt\,. \tag{2.8}$$

Входящая сюда функция $j^*(t)$ определяется по формуле

$$j^*(t) = \langle z(t, u) \,.\, \lambda^*(t) + \alpha z(t_1, w^*) \rangle \tag{2.9}$$

В силу граничного условия $\lambda^*(t_1) = -\alpha z(t_1, w^*)$ (по условию теоремы) имеем:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dj^*(t)}{dt}\, dt = -\langle z^0 \,.\, \Lambda^* + \alpha z(t_1, w^*) \rangle \tag{2.10}$$

Подставляя последнее выражение в правую часть соотношения (2.8), получим

$$j(u,u) = J(u, u) + \langle z^0 .\ \Lambda^* + \alpha z(t_1, u^*) \rangle \tag{2.11}$$

Таким образом, функционалы $j(u,u)$ и $J(u,u)$, отличаясь только на независимую от вектора элемента u константу, будут одновременно достигать минимума.

С другой стороны, на основании выражения (2.9) и матричных уравнений (1. 2) и (2.4) будем иметь :

$$\frac{dj^*(t)}{dt} = \left\langle \frac{dz(t,u)}{dt} .\, \lambda^*(t) + \alpha z(t_1, w^*) \right\rangle + \left\langle z(t, u) . \frac{d\lambda^*(t)}{dt} \right\rangle =$$

$$= \langle B^\tau(t)\, \lambda^*(t) .\ u(t) \rangle + \beta \langle z(t, u) . z(t, w^*) \rangle + \alpha \left\langle \frac{dz(t,u)}{dt} . z(t_1, w^*) \right\rangle +$$

$$+ \langle \lambda^*(t) .\ f(t) \rangle$$

Подставляя выражение для $\frac{dj^*(t)}{dt}$ в правую часть соотношения (2.8) и делая элементарные операции, получим :

$$j(u,u) = \frac{\alpha}{2} \langle z(t_1, u) - z(t_1, w^*). z(t_1, u) - z(t_1, w^*) \rangle + \frac{\beta}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle z(t, u) - z(t, w^*) .$$

$$z(t,u) - z(t, w^*) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} [\langle B^{\tau}(t) \lambda^*(t). u(t) \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t) u_\rho^2(t)] dt + j^*, \quad (2.12)$$

где j^* — следующая величина :

$$j^* = \alpha \langle z^0. z(t_1, w^*) \rangle - \frac{\alpha}{2} \langle z(t_1, w^*). z(t_1, w^*) \rangle - \frac{\beta}{2} \int_{t_0}^{t_1} \langle z(t, w^*). z(t, w^*) \rangle dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \langle \lambda^*(t). f(t) \rangle dt.$$

Выражение (2.12) показывает что при выполнении условия теоремы 1 функционал $j(u,u)$, а следовательно, и функционал $J(u,u)$ принимает наименьшее значение из всех возможных тогда и только тогда, если $u_\rho \equiv w_\rho^*(t) \equiv w_\rho(t, \lambda^*)$, то есть экстремальное управление в этом случае является оптимальным, что и потребовалось доказать.

Следует заметить, что для случая, когда $\beta = 0$ условие теоремы будет выполнено, если для исходной системы выполняется обобщенное условие общности положения (см. [11-13]).

3. Обсуждение результатов.. Согласно изложенным выше результатам для нахождения закона оптимального управления мы должны решать матричное уравнение (1.2) при $u(t) = w(t,\lambda) = \| w_\rho(t, \lambda) \| (m \times 1)$, где элементы $w_\rho(t,\lambda)$ определяются по закону (2.2), совместно с матричным уравнением (2.4) при граничном условии (2.5)

Поскольку определяемые по формулам (2.2) величины $w_\rho(t,\lambda)$ представляют собой нелинейные функции по отношению к переменным $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то здесь с математической точки зрения мы имеем дело с нелинейной краевой задачей, эффективный метод в настоящее время не описан. Главная трудность здесь заключается, в частности, в нахождении начальных условии для вспомогательных переменных λ_ν, обеспечивающих выполнение граничных условий (2.5). Нахождение этих постоянных представляет собой самостоятельную задачу, которая, как показано в работе [14], может быть решена на обычных электронных моделирующих устройствах методом поиска Гаусса-Зайделя [15]. Однако, при наличии нелинейностей типа (2.2) трудно установить сходимость указанного метода (фактически нигде не доказана !). Более того, нахождение требуемых начальных условий для вспомогательных переменных по методу поиска Гаусса-Зайделя в ряде случаев затруднительно из-за неустойчивости сопряженной системы (здесь, разумеется, имеем в виду случай, когда исходная система устойчива).

Таким образом, основанное на принципе максимума Понтрягина решение поставленной задачи во многих случаях сопряжено с большими трудностями даже при помощи электронных вычислительных устройств.

В связи с этим в настоящей работе будет предложен приближенный метод для решения полученной выше нелинейной двухточечной краевой задачи. Сущность метода заключается в построении минимизирующей последовательности допустимых управлений, т.е. такой, что соответствующая ей последовательность значений функционала $J(u, u)$ будет строго-убывающей и в пределе будет стремиться к величине $J(u^*, u^*) = \min\limits_{u \in U} J(u, u)$.

Следует заметить, что идея такого подхода впервые предложена В.Ф. Демьяновым в работах [3,7] и нашедша свое развитие в статьях автора [8, 10, 11].

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2. Для любого заданного допустимого управления $u^j(t) \in U$ имеет место следующее соотношение

$$J(u^j, v^j) = \min_{u \in U} J(u^j, u) \leqslant J(u^j, w^j) \leqslant J(u^j, u^j), \tag{2.13}$$

где элементы $v^j_\rho(t)$ вектор-функции $v^j(t) = \| v^j_\rho(t) \| \, (m \times 1)$ определяются формулами

$$v^j_\rho(t) = U_\rho \operatorname{sign}[s_\rho(t, \lambda^j) - e_\rho(t)\, u^j_\rho(t)], \; \rho = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.14}$$

а элементы $w^j_\rho(t)$ вектор-функции $w^j(t) = \| w^j_\rho(t) \| (m \times 1)$ определяются согланс закону:

$$w^j_\rho(t) = \begin{cases} s_\rho(t, \lambda^j)/e_\rho(t) & \text{при} \quad |s_\rho(t, \lambda^j)| < e_\rho(t) U_\rho, \\ U_\rho \operatorname{sign} s_\rho(t, \lambda^j) & \text{при} \quad |s_\rho(t, \lambda^j)| \geqslant e_\rho(t) U_\rho. \end{cases} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.15}$$

Входящие сюда функции $s_\rho(t, \lambda^j)$ вычисляются по формулам:

$$s_\rho(t, \lambda^j) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda^j_\nu(t), \; \rho = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\lambda^j_\nu(t)$ суть решение матричного уравнения

$$\frac{d\lambda^j(t)}{dt} = -A^\tau(t)\, \lambda^j(t) + \beta\, z(t, u^j), \tag{2.16}$$

при следующем граничном условии

$$\lambda^j(t) = -\alpha\, z(t_1, u^j). \tag{2.17}$$

Доказательство праведливости формулированной выше теоремы будет дано в приложении.

§ 3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ.

В качестве нулевого приближения для закона оптимального управления возьмём любую измеримую вектор-функцию $u^0(t) \in U$. Решение матричного уравнения (1. 2) при $u(t) = u^0(t)$ будем обозначать через $z(t, u^0)$. Решая вспомогательное матричное уравнение

$$\frac{d\lambda^0(t)}{dt} = -A^{\tau}(t)\,\lambda^0(t) + \beta\, z(t, u^0), \tag{3. 1}$$

при граничном условии

$$\lambda^0(t_1) = -\alpha\, z(t_1, u^0) \tag{3. 2}$$

будем получать закон изменения вектор-функции $\lambda^0(t) = \| \lambda^0_\nu(t) \|$ $(n \times 1)$. После чего элементы $v^0_\rho(t)$ вектор-функции $v^0(t) = \| v^0_\rho(t) \|$ $(m \times 1)$ определяются по формулам

$$v^0_\rho(t) = U_\rho \operatorname{sign}\left[s_\rho(t, \lambda^0) - e_\rho(t)\, u^0_\rho(t)\right], \quad \rho = 1, 2, \ldots, m, \tag{3. 3}$$

а элементы $w^0_\rho(t)$ вектор-функции $w^0(t) = \| w^0_\rho(t) \|$ $(m \times 1)$ — по формулам :

$$w^0_\rho(t) = \begin{cases} s_\rho(t, \lambda^0)/e_\rho(t) & \text{при } \ | s_\rho(t, \lambda^0) | < e_\rho(t)\, U_\rho, \\ U_\rho \operatorname{sign} s_\rho(t, \lambda^0) & \text{при } \ | s_\rho(t, \lambda^0) | \geqslant e_\rho(t)\, U_\rho. \end{cases} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \tag{3. 4}$$

Входящие сюда функции $s_\rho(t, \lambda^0)$ вычисляются по закону :

$$s_\rho(t, \lambda^0) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda^0_\nu(t), \quad \rho = 1, 2, \ldots, m.$$

На основании теоремы 2 будем иметь

$$J(u^0, v^0) = \min_{u \in U} J(u^0, u) \leqslant J(u^0, w^0) \leqslant J(u^0, u^0). \tag{3. 5}$$

Возможно два случая : либо $J(u^0, v^0) = J(u^0, u^0)$, либо $J(u^0, v^0) < J(u^0, u^0)$. В первом случае нетрудно показать, что $u^0(t)$ является оптимальным управлением и процесс окончен, а во втором случае в качестве следующего приближения для закона оптимального управления возьмём

$$u^1(t) = \begin{cases} v^0(t) & \text{если} \quad J(v^0, v^0) \leqslant J(u^0, v^0), \\ \alpha_0\, u^0(t) + (1 - \alpha_0)\, v^0(t) & \text{если} \quad J(v^0, v^0) > J(u^0, v^0), \end{cases} \tag{3.6}$$

где величина α_0 определяется следующим образом

$$0 < \alpha_0 = \frac{J(v^0, v^0) - J(u^0, v^0)}{J(v^0, v^0) - 2J(u^0, v^0) + J(u^0, u^0)} < 1. \tag{3.7}$$

Нетрудно показать, что при таком выборе первого приближения будем иметь :

$$J(u^1, u^1) < J(u^0, u^0). \tag{3.8}$$

Таким образом, если нулевое приближение не является оптимальным то всегда можно выбрать первое приближение так, чтобы выполнялось условие (3.8).

Допустим, что к-ое приближение уже определено, т.е. нам известны вектор-функции $u^k(t)$ и $z(t, u^k)$. Тогда, решая матричное уравнение

$$\frac{d\lambda^k(t)}{dt} = -A^\tau(t)\,\lambda^k(t) + \beta\, z(t, u^k) \tag{3.9}$$

при граничном условии

$$\lambda^k(t_1) = -\alpha z(t_1, u^k), \tag{3.10}$$

будем получать закон изменения вектор-функции $\lambda^k(t)$. Рассмотрим тогда вектор-функцию $v^k(t) = \| v^k_\rho(t) \| \,(m\times 1)$, элементы которой определяются формулами

$$v^k_\rho(t) = U_\rho \operatorname{sign}\left[s_\rho(t, \lambda^k) - e_\rho(t)\, u^k_\rho(t) \right],\ \rho = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.11}$$

и вектор-функцию $w^k(t) = \| w^k_\rho(t) \| \,(m \times 1)$, где $w^k_\rho(t)$ определяются следующим образом

$$w^k_\rho(t) = \begin{cases} s_\rho(t, \lambda^k)/e_\rho(t) & \text{при } \ | s_\rho(t, \lambda^k) | < e_\rho(t)\, U\rho, \\ U\rho \operatorname{sign}\, s\rho\ (t, \lambda^k) & \text{при } \ | s_\rho(t, \lambda^k) | \geqslant e_\rho(t) U\rho, \end{cases} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.12}$$

Входящие сюда функции $s_\rho(t, \lambda^k)$ вычисляются по закону

$$s_\rho(t, \lambda^k) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\, \lambda^k_\nu(t),\ \rho = 1, 2, \ldots, m.$$

Точно также, как в случае нулевого приближения на основании теоремы 2 будем иметь :

$$J(u^k, v^k) = \min_{u \in U} J(u^k, u) \leqslant J(u^k, w^k) \leqslant J(u^k, u^k) \tag{3.13}$$

Если $J(u^k, v^k) = J(u^k, u^k)$, то $u^k(t)$ будет оптимальным управлением и процесс окончен. Если $J(u^k, v^k) < J(u^k, u^k)$, то в качестве $(k+1)$-го приближения для закона оптимального управления возьмём

$$u^{k+1}(t) = \begin{cases} v^k(t) & \text{если } J(v^k, v^k) \leqslant J(u^k, v^k), \\ \alpha_k\, u^k(t) + (1 - \alpha_k)\, v^k(t) & \text{если } J(v^k, v^k) > J(u^k, v^k), \end{cases} \tag{3.14}$$

где α_k определяется по формуле

$$0 < \alpha_k = \frac{J(v^k, v^k) - J(u^k, v^k)}{J(v^k, v^k) - 2\, J(u^k, v^k) + J(u^k, u^k)} < 1 \tag{3.15}$$

При таком выборе $(k+1)$-го приближения нетрудно показать, что справедливо следующее неравенство

$$J(u^{k+1}, u^{k+1}) < J(u^k, u^k) \tag{3.16}$$

Построенная последовательность допустимых управлений $\{ u^k(t) \}$ и соответствующая ей последовательность поведений рассматриваемой динамической системы $\{ z(t, u^k) \}$ таковы, что

$$J(u^0, u^0) > J(u^1, u^1) > \ldots > J(u^k, u^k) > \ldots . \tag{3.17}$$

Справедливы следующие утверждения :

Теорема 3. Пусть J^* есть предел строго-убывающей последовательности (3.17), *т.е.* $J^* = \lim\limits_{k\to\infty} J(u^k, u^k)$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\left[\min_{u\in U} J(u^k, u)\right] = \inf\left[\lim_{k\to\infty} J(u^k, v^k)\right] \geqslant J^*. \tag{3.18}$$

Теорема 4. Для построенной выше последовательности значений функционала $J(u, u)$ *справедливо равенство*

$$J^* = \lim_{k\to\infty} J(u^k, u^k) = \min_{u\in U} J(u, u) \tag{3.19}$$

Доказательство теоремы 3 и 4 ради сокращения основного текста приведено в приложении.

Используя результаты, полученные в монографии [12] (стр. 146— 147) при доказательстве теоремы существования для задачи об оптимальном быстродействии и повторяя ход рассуждений, приведенных в статье автора [8], нетрудно показать, что из последовательностей $\{u^k(t)\}$ и $\{z(t, u^k)\}$ можно извлечь пару сходящихся последовательностей $\{u^{kl}(t)\}$ и $\{z(t, u^{kl})\}$ причём их пределы обладают следующими свойствами $u^*(t) \in U$, $z(t, u^*)$ является непрерывной вектор-функцией. Далее, легко показать, что предельная вектор-функция $z(t, u^*)$ единственна и не зависит от выбора пары указанных выше сходящихся подпоследовательностей.

Переходя к пределу при $l\to\infty$, получим

$$J^* = \min_{u\in U} J(u, u) = \lim_{l\to\infty} J(u^{kl}, u^{kl}) \equiv J(u^*, u^*). \tag{3.20}$$

Принимая во внимание соотношение (3.13), (3.18) и (3.19) и опираясь на выражение (3.12) нетрудно видеть, что для тех ρ, для которых мера множества нулей функций

$$s_\rho(t,\lambda^*) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu\rho}(t)\,\overset{*}{\lambda}_\nu(t),\ \rho = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.21}$$

равна нулю, соответствующие функции $w_\rho{}^{kl}(t)$ стремятся к единственным предельным функциям

$$u^*(t) = \begin{cases} s_\rho(t,\lambda^*)/e_\rho(t) & \text{при } |s_\rho(t,\lambda^*)| < e_\rho(t)\,U_\rho, \\ U_\rho \operatorname{sign} s_\rho(t,\lambda^*) & \text{при } |s_\rho(t,\lambda^*)| \geqslant e_\rho(t)\,U_\rho, \end{cases} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.23}$$

где $\lambda^*(t)$ суть решение матричного уравнения

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt} = -A^\tau(t)\,\lambda^*(t) + \beta\, z(t, u^*) \tag{3.23}$$

при граничном условии

$$\lambda^*(t_1) = -\alpha\, z(t_1, u^*). \tag{3.24}$$

Таким образом, предельная вектор-функция $u^*(t)$, являющаяся на основании соотношения (3.20) оптимальным управлением, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, что и должно ожидать.

Следует заметить, что из доказанного непосредственно не вытекает единственность оптимального управления. Но, если выполнено B-условие, т. е. если $m \leqslant n$ и ранг матрицы $B(t)$ почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ равен m, то, в силу единственности оптимальной траектории, нетрудно доказать единственность оптимального управления.

§4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРИ ПОМОЩИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ.

Из предыдущего пункта видно, что, решая рассматриваемую задачу изложенным выше приближенным методом, мы должны на каждой итерации решать матричное уравнение типа (3. 9) при граничном условии (3. 10). Поскольку здесь известны лишь конечные значения векторной переменной λ^k в момент $t = t_1$, то для определения закона изменения вектор-функции при помощи вычислительных устройств надо сперва найти соответствующие начальные условия для этих переменных. Последние, как показано в работе [16], можно найти, интегрируя матричное уравнение (3. 9) «назад», т.е. вводя новую независимую переменную посредством соотношения

$$t = t_1 + t_0 - \sigma, \ \sigma = t_1 + t_0 - t. \tag{4.1}$$

После такой замены матричное уравнение (3. 9) преобразуется к виду

$$\frac{d\Lambda^k(\sigma)}{d\sigma} = A^{\tau}(t_1 + t_0 - \sigma)\,\Lambda^k(\sigma) - \beta\, Z(\sigma, u^k), \tag{4.2}$$

где через $\Lambda^k(\sigma)$ и $Z(\sigma, u^k)$ обозначены следующие вектор-функции

$$\Lambda^k(\sigma) = \lambda^k(t_1 + t_0 - \sigma), \ Z(\sigma, u^k) = z(t_1 + t_0 - \sigma, u^k) \tag{4.3}$$

Матричное уравнение (4. 2) следует проинтегрировать при следующем начальном условии

$$\Lambda^k(t_0) = -\alpha\, z(t_1, u^k) \tag{4.4}$$

На основании первого соотношения (4. 3) нетрудно видеть, что значения элементов вектор-функции $\Lambda^k(\sigma)$ в момент $\sigma = t_1$ служат начальными условиями для вектор-переменной λ^k, обеспечивающими выполнение граничных условий (3.10).

Из изложенного вытекает также и метод решения рассматриваемой задачи с помощью электронных вычислительных устройств, особенно удобны для этой цели комбинированные аналогово-цифровые вычислительные машины. Процедура реализации должна происходить следующим образом.

1. Выбирается некоторое допустимое управление $u^k(t) \in U$, и решается матричное уравнение (1.2) при $u(t) = u^k(t)$. В процессе интегрирования обеспечивается получение закона изменения вектор-функции $z(t, u^k)$ и одновременно с этим вычисляется величина $J(u^k, u^k)$. Для последующих операции следует запоминать указанные здесь величины и преобразовать величины $z(t, u^k)$ к величинам $z(t_1 + t_0 - \sigma, u^k) = Z(\sigma, u^k)$.

2. Моделируется матричное уравнение (4.2), которое интегрируется в пределе $t_0 \leqslant \sigma \leqslant t_1$ при налальном условии (4.4). В процессе интегрирования обеспечивается получение вектора $\Lambda^k(t_1) = \lambda^k(t_0)$, обеспечивающего выполнение граничного условия (3.10).

3. Проинтегрируется матричное уравнение (3.9) в пределе $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ при начальном условии $\lambda^k(t_0) = \Lambda^k(t_1)$. В процессе интегрирования этого уравнения обеспечивается получение закона изменения вектор-функции $\lambda^k(t)$ и одновременно с этим можно вычислять функции $v^k_\rho(t)$ по формулам (3.11) с помощью добавочных функциональных блоков.

4. Опять решается матричное уравнение (1.2) при $u(t) = v^k(t) = \| v^k_\rho(t) \| \, (m \times 1)$. В процессе интегрирования с помощью дополнительных функциональных блоков обеспечивается получение величины $J(v^k, v^k)$ и, воспользуясь запоминаемыми на первой операции величинами $u^k(t)$ и $Z(t, u^k)$, можно вычислять величину $J(u^k, v^k)$.

5. Сравнить величину $J(u^k, v^k)$ с запоминаемой на первой операции величиной $J(u^k, u^k)$. Если $J(u^k, v^k) = J(u^k, u^k)$, то, как уже указывалось, $u^k(t)$ является оптимальным управлением и процесс окончен. Если $J(u^k, v^k) < J(u^k, u^k)$ то мы можем с помощью некоторого функционального блока вырабатывать следующее приближение для закона оптимального управления по формулам (3.14) и (3.15) и процесс повторяется снова.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. *Доказательство теоремы 2.* Для этой цели докажем сначала, что справедливы следующие леммы:

Лемма 1. Для любой заданной измеримой вектор-функции $u^j(t) \in U$ имеет место следующее равенство

$$J(u^j, v^j) = \min_{u \in U} J(u^j, u) = \min_{u \in U} \{ \alpha R(u^j, u) + \beta I(u^j, u) + E(u^j, u) \},$$

где элементы $v^j_\rho(t)$ вектор-функции $v^j(t) = \| v^j_\rho(t) \| \; (m \times 1)$ определяются по формулам (2.14).

Доказательство. На основании выражений (1.7) и (1.8) будем иметь следующие выражения для функционалов $R(u^j, u)$, $I(u^j, u)$, $E(u^j, u)$, а именно

$$R(u^j, u) = \frac{1}{2} \left\langle z(t_1, u^j) \,.\, z(t_1, u) \right\rangle, \; I(u^j, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\langle z(t, u^j) \,.\, z(t, u) \right\rangle dt,$$

$$E(u^j, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t)\, u^j_\rho(t)\, u_\rho(t) \Big] dt. \tag{1}$$

Подставляя выражение (1.4) для $z(t_1, u)$ и $z(t, u)$ в правые части соотношения (1) и делая элементарные операции над скалярным произведением, получим

$$J(u^j, u) = J^j - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big\langle B^{\tau}(t)\,\lambda^j(t)\,.\,u(t)\Big\rangle - \sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t)\,u_\rho^j(t)\,u_\rho(t)\Big]dt, \tag{2}$$

где через J^j обозначена независимая от вектора u величина

$$J^j = \frac{\alpha}{2}\Big\langle z(t_1, u^j)\,.\,s(t_1)\Big\rangle + \frac{\beta}{2}\int\limits_{t^0}^{t_1}\Big\langle z(t, u^j)\,.\,s(t)\Big\rangle dt,$$

а λ^j — следующая вектор-функция

$$\lambda^j(t) = [X^{-1}(t)]^{\tau}\; X^{\tau}(t_1)\,[-\alpha\, z(t_1, u^j) - \int\limits_{t}^{t_1} X^{\tau}(\sigma)\,\beta\, z(\sigma, u^j)\,d\sigma] \tag{3}$$

Нетрудно показать, что определяемая по формуле (3) вектор-функция $\lambda^j(t)$ является решением матричного уравнения (2.16) при граничном условии (2.17).

В развернутом виде выражение (2) выглядит так :

$$J(u^j, u) = J^j - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{\rho=1}^{m}\Big[s_\rho(t, \lambda^j) - e_\rho(t)\,u_\rho^j(t)\Big]\,u_\rho(t)\Big\}dt, \tag{4}$$

где через $s_\rho(t, \lambda^j)$ обозначена следующие функции

$$s_\rho(t,\lambda^j) = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu\rho}(t)\,\lambda_\nu^j(t),\ \rho = 1, 2, \dots, m.$$

Выражение (4) показывает, что функционал $J(u^j, u)$ принимает минимальное значение из всех возможных тогда и только тогда, если $u_\rho(t) \equiv v_\rho^j(t)$, $\rho = 1, 2, \dots, m$ (см.формулы (2.14)), что и потребовалось доказать.

Лемма 2. Для любой заданной измеримой вектор-функции $u^j(t) \in U$ имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned}&2\alpha\, R(u^j, w^j) + 2\beta\, I(u^j, w^j) + E(w^j, w^j) = \\ &\min_{u \in U}\{2\alpha\, R(u^j\, u) + 2\beta\, I(u^j, u) + E(u, u)\},\end{aligned} \tag{5}$$

где элементы $w_\rho^j(t)$ вектор-функции $w^j(t) = \| w_\rho^j(t) \|\ (m \times 1)$ определяются согласно закону (2.15).

Доказательство. Принимая во внимание (1) и на основании выражения (1.8) для функционала $E(u, u)$, имеем

$$2\alpha\, R(u^j, u) + 2\beta\, I(u^j, u) + E(u, u) =$$

$$= 2\,J^j - \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_{\rho=1}^{m}\Big[s_\rho(t, \lambda^j)\,u_\rho(t) - \frac{1}{2}\,e_\rho(t)\,u_\rho^2(t)\Big]\Big\}dt =$$

$$= 2\,J^j + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\rho=1}^{m} e_\rho(t)\left[\left(u_\rho(t) - s_\rho(t,\lambda^j)/e_\rho(t)\right)^2 - \left(s_\rho(t,\lambda^j)/e_\rho(t)\right)^2\right]\right\} dt$$

Из последнего выражения следует, что функционал $[2\alpha R(u^j, u) + 2\beta I(u^j, u) + E(u, u)]$ достигает минимального возможного значения тогда и только тогда, если $u_\rho(t) \equiv w_\rho^j(t)$, $\rho = 1, 2, \ldots, m$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любой заданной измеримой вектор-функции $u^j(t) \in U$ *справедливо следующее неравенство*

$$J(u^j, w^j) \leqslant J(u^j, u^j), \tag{6}$$

где вектор-функция $w^j(t)$ *определяется согласно закону* (2.15).

Доказательство. Из соотношения (5) следует, что

$$2\alpha R(u^j, w^j) + 2\beta I(u^j, w^j) + E(w^j, w^j) \leqslant 2\alpha R(u^j, u^j) + \\ + 2\beta I(u^j, u^j) + E(u^j, u^j), \tag{7}$$

а на основании того факта, что величина $[E(u^j, u^j) - 2E(u^j, w^j) + E(w^j, w^j)]$ неотрицательна, будем иметь

$$2E(u^j, w^j) \leqslant E(u^j, u^j) + E(w^j, w^j). \tag{8}$$

Сложив (7) и (8), получим

$$2\alpha R(u^j, w^j) + 2\beta I(u^j, w^j) + 2E(u^j, w^j) \leqslant 2\alpha R(u^j, u^j) + \\ + 2\beta I(u^j, u^j) + 2E(u^j, u^j),$$

что и доказывает лемму 3.

Таким образом, из доказанной выше леммы 1 следует, что

$$J(u^j, v^j) = \min_{u \in U} J(u^j, u) \leqslant J(u^j, w^j).$$

Неравенство (6) вместе с последним соотношением показывает справедливость теоремы 2.

2. *Доказательство теоремы 3.* Докажем эту теорему от противного. Допустим, что это не так, т. е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что каково бы ни было N, найдутся $k > N$, при которых $J(u^k, v^k) = J^* - \mu_k \leqslant J^* - \varepsilon$, $\mu_k \geqslant 0$.

Заметим, что тогда $J(v^k, v^k) > J(u^k, v^k)$, ибо в противном случае, т. е. если $J(v^k, v^k) \leqslant J(u^k, v^k)$, то по нашему правилу выбора мы должны взять $u^{k+1}(t) = v^k(t)$. Но тогда $J(u^{k+1}, u^{k+1}) \leqslant J(u^k, v^k) \leqslant J^* - \varepsilon < J^*$, что противоречит тому, что $\{J(u^k, u^k)\}$ является строго-убывающей последовательностью, имеющей предел J^*.

Значит, по нашему допущению, имеем $J(v^k, v^k) > J(u^k, v^k)$. Тогда мы должны взять

$$u^{k+1}(t) = \alpha_k\, u^k(t) + (1 - \alpha_k)\, v^k(t),$$

где α_k выбрано по формуле (3. 15).

Поскольку

$$J(u^{k+1}, u^{k+1}) = \alpha_k^2\, J(u^k, u^k) + 2\alpha_k (1 - \alpha_k)\, J(u^k, v^k) + (1-\alpha_k)^2\, J(v^k, v^k),$$

то, подставляя выражение для α_k в правую часть последнего, получим

$$J(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{J(v^k, v^k)\, J(u^k, u^k) - J^2(u^k, v^k)}{J(v^k, v^k) - 2J(u^k, v^k) + J(u^k, u^k)}.$$

Взяв k настолько большим, что

$$J(u^k, u^k) = J^* + \varepsilon_k,\ \varepsilon_k \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

будем иметь следующую оценку

$$J(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{J^*[J(v^k, v^k) + \varepsilon_k (J(v^k, v^k)/J^*) - J^* + 2\mu_k - \mu_k^2/J^*]}{J(v^k, v^k) + \varepsilon_k - J^* + 2\mu_k} < J^*$$

что невозможно, так как последовательность $\{J(u^k, u^k)\}$ стремится к пределу J^* сверху. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, тем самым доказана справедливость теоремы 3.

3. *Доказательство теоремы 4.* Допустим, что утверждение теоремы 4 неверно Это означает, что существует допустимое управление $v(t) \in U$, такое, что

$$J(v, v) = J^* - \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

В силу неотрицательности величины $[J(u^k, u^k) - 2J(u^k, v) + J(v, v)]$ будем иметь

$$J(u^k, v) \leqslant \frac{J(u^k, u^k) + J(v, v)}{2} = J^* + \frac{\varepsilon_k}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как при $k \to \infty$, $\varepsilon_k \to 0$, то при достаточно больших k имеем

$$J(u^k, v) < J^*.$$

Итак, по нашему допущению, для достаточно больших k

$$\min_{u \in U} J(u^k, u) \leqslant J(u^k\, v) < J^*,$$

TL 121

что противоречит теореме 3. Теорема 4 доказана.

Поступило в редакцию 14/V/1974г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. Барбашин Е. А. *Об одной задаче теории динамического программиронания.* ПММ, т.XXIУ, Вып. 6, 1960.

[2]. Барбашин Е.А. *О приближенном осуществлении движения по заданной траектории.* Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 6, 1961.

[3]. Демьянов В. Ф. *Построение программного уравнения в линейной системе, оптимального в интегральном смысле.* ПММ, т. XXVII, вып. 3, 1963.

[4]. Bellman R.E. *Adaptive Control. Princeton University Press, 1962*

[5]. Хо Ю-ши. *Метод последовательных приближений для оптимальных систем регулирования с ограничением по управляющему сигналу.* Техническая механика, № 1, 1962.

[6]. Кирилова Л. С.*Задача об оптимизации конечного состояния регулируемой системы,* Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 12, 1962.

[7]. Демьянов В. ф. *К построению оптимальной программы в линейной системе.* Автоматика и телемеханика, т. XXV, №1, 1964.

[8]. Нгуен Тхань Банг. *Некоторые оптимальные задачи о приближенном осуществлении движения по заданной траектории.* 1. Автоматика и телемеханика, № 6, 1967.

[9]. Нгуен Тхань Банг. *Некоторые оптимальные задачи о приближенном осуществлении движения по заданной траектории. II.* Автоматика и телемеханика, №7, 1967.

[10]. Нгуен Тхань Банг. *Метод последовательных приближений для ретения одной задачи оптимального управления.* Автоматика и телемеханика, № 6, 1969.

[11]. Нгуен Тхань Банг. *Оптимальная задача терминального управления.* ПММ, т. 33, Вып. 2, 1969

[12]. Понтрягин Л.С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов,.* физматгиз, 1961.

[13]. Нгуен Тхань Банг. *Приближенные методы решения некоторого класса оптимальных задач программного управления движением линейных систет.* Prace Iustytutu Cybernetyki Stosowanej PAN, Zeszyt 4, Warszawa 1972.

[14]. Нгуен Тхань Банг. *Оптимальная здача о «попадании» в нестационарных линейных системах* Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, №1, 1965.

[15]. Фельдбаум А.А. *Вычислительные устройства в автоматических системах.* физматгиз, 1959.

[16]. Нгуен Тхань Банг. *К рещению некоторых задач теории динамического программирования при помощи электронных моделируюших устройств.* Автоматика и телемеханика, т. XIII, №9, 1962.