ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 32, Number 1, 2007, pp. 61-70

SOLUTIONS FAIBLES D'UNE INCLUSION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE SEMI-LINÉAIRE À RETARD INFINI SUR UN ESPACE DE BANACH

SGHIR ABDELHAQ

Abstract. The aim of this note is to prove the existence of mild solutions for functional differential inclusion with infinite delay in a Banach space:

$$\begin{cases} x'(t) \in Lx_t + F(t, x_t), \ t \in [0, a] \ (a > 0) \\ x(t) = \varphi(t), \qquad\qquad t \in]\text{-}\infty, 0]. \end{cases}$$

The results are proved by using a variation of suitable constants formula with infinite delay and a direct application of topological transversality methods based on the degree theory for χ- Lipschitz multimappings.

1. Introduction

Soit E un espace de Banach réel de norme notée $|.|_E$ et soit $\mathcal{B} := \mathcal{B}^E$ l'espace de phases satisfaisant les axiomes fondamentaux introduits par Hale et Kato [7]. Si $x : I\!R \to E$, alors pour tout $t \in I\!R^+$, nous définissons une application $x_t : I\!R^- \to E$ par $x_t(\theta) = x(t + \theta)$.

En 1995 Arino-Sanchez [1] ont donné une formule de variation de la constante pour le problème de Cauchy non homogène associé à l'équation différentielle fonctionnelle à retard fini sur un espace de Banach

$$x'(t) = Lx_t + h(t) \quad t \geqslant 0$$

où $L : \mathcal{C} := C([-r, 0]; E) \to E$ est un opérateur linéaire continu et
$h : I\!R^+ \to E$ est une fonction continue.

En 1997 nous avons étudié dans [14] en première partie le même problème de Cauchy lorsque le retard est infini ensuite, par utilisation de la formule de variation de la constante trouvée, nous avons étudié l'existence des solutions du problème semi-linéaire à retard infini sur un espace de Banach

$$\begin{cases} x'(t) = Lx_t + f(t, x_t), \ t \in I := [0, a] \\ x_0 = \varphi \end{cases}$$

Received June 13, 2006; in revised form October 2, 2006.
2000 Mathematics Subject Classification. Primary 34 K30.
Key words and phrases. Inclusion différentielle fonctionnelle semi-linéaire à retard infini; formule de variation de la constante, multiapplication χ-Lipschitzienne, théorie du degré topologique.

où $(a, \varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathcal{B}$ sont donnés et $f : I \times \mathcal{B} \to E$ est une fonction complètement continue vérifiant une certaine propriété de bornage.

En 1999 voir [15], en utilisant la formule de variation de la constante sur un espace de Banach pour un retard fini et la notion de degré topologique pour les multiapplications χ-Lipschitziennes, nous avons donné l'existence de solutions faibles de l'inclusion différentielle fonctionnelle à retard fini

$$\mathcal{P}(\varphi) \begin{cases} x'(t) \in Lx_t + F(t, x_t), \ t \in I \\ x_0 = \varphi \end{cases}$$

où $L : \mathcal{C} \to E$ est un opérateur linéaire continu et F est une multiapplication χ-Lipschitzienne à valeurs dans $CC(E)$, sous-ensemble de parties non vides convexes et compactes de E, vérifiant certaines hypothèses.

Dans ce papier, nous allons étudier la même inclusion différentielle fonctionnelle mais à retard infini sous une hypothèse plus faible sur le bornage de F.

Dans $[4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 16, ..]$ le lecteur trouvera des informations et références sur les inclusions différentielles (ou fonctionnelles) et leurs applications.

2. Préliminaires

Désignons par $\mathcal{B} := \mathcal{B}(I\!R^-; E)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $I\!R^-$ à valeurs dans E muni d'une semi-norme notée $|.|_{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{E}[a] = \{x :]-\infty, a] \to E : x_0 \in \mathcal{B}$ et $x|_I$ est continue$\}$ pour $a > 0$.

$\mathcal{E} = \{x : I\!R \to E : x_0 \in \mathcal{B}$ et $x|_{I\!R^+}$ est continue $\}$.

Dans la suite de ce travail, nous supposons que l'espace de phases $\mathcal{B}$ satisfait les axiomes suivants:

$A)$ $\mathcal{B}$ est un espace complet.

$B_1)$ Si $x \in \mathcal{E}[a]$ (resp. $\mathcal{E}$), alors $x_t \in \mathcal{B}$ et la fonction $t \longmapsto x_t$ est continue pour tout $t \in I$ (resp. $t \in I\!R^+$).

$B_2)$ Il existe une constante $l > 0$ et deux fonctions $K, M : I\!R^+ \to I\!R^+$ telles que

- K est continue sur $I\!R^+$;
- M est localement bornée;
- pour toute fonction $x \in \mathcal{E}[a]$ (resp. $\mathcal{E}$) et tout $t \in I$ (resp. $t \in I\!R^+$),

$$\frac{1}{l}|x(t)|_E \leqslant |x_t|_{\mathcal{B}} \leqslant K(t) \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|_E + M(t)|x_0|_{\mathcal{B}}.$$

$C)$ Si (φ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ et si $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\theta \in K} |\varphi_n(\theta) - \varphi(\theta)|_E = 0$ pour tout compact $K \subset I\!R^-$, alors $\varphi \in \mathcal{B}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} |\varphi_n - \varphi|_{\mathcal{B}} = 0$.

Nous notons par

$$K_a = \sup_{t \in I} K(t) \quad \text{et} \quad M_a = \sup_{t \in I} M(t).$$

Pour des exemples d'espaces de phases $\mathcal{B}$ qui vérifient les axiomes précédents voir par exemple $[7, 8, 14, \cdots]$.

Rappelons (voir [14]) que le problème de Cauchy non homogène

$$(N.H)\begin{cases} x'(t) = Lx_t + h(t), \ t \geqslant 0 \\ x_0 = \varphi, \qquad\quad \varphi \in \mathcal{B} \end{cases}$$

admet une unique solution $x \in \mathcal{E} \cap C^1(I\!R^+; E)$ donnée par

$$x(t) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(h(s))ds & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

où pour tout $t \geqslant 0$, l'opérateur $T(t) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est défini par $T(t)\varphi = x_t$ et l'opérateur $\mathcal{U}\,(t) : E \to E$ est défini par

$$\mathcal{U}\,(t)\,e = (x^e)'(t), t \geqslant 0$$

où x^e est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} x'(t) = Lx_t + e, \ t \geqslant 0 \text{ et } e \in E \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{U}\,(t)$ est un opérateur linéaire continu et la famille d'opérateurs $(T(t))_{t \geqslant 0}$ définie un semi-groupe linéaire de classe (C_0) satisfaisant la propriété de translation:

$$(T(t)\varphi)(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta) & \text{si} \quad t+\theta \leqslant 0 \\ (T(t+\theta)\varphi)(0) & \text{si} \quad t+\theta \geqslant 0 \end{cases}$$

pour $t \in I\!R^+, \theta \in I\!R^-$ et $\varphi \in \mathcal{B}$.

Soit B un sous-ensemble borné de E, la mesure de non-compacité de B est le nombre réel $\chi(B)$ (voir par exemple, [5, 11]) défini par

$$\chi(B) = \inf \left\{ \begin{array}{l} d > 0 \ : \ B \text{ est recouvert par un nombre fini de} \\ \text{sous-ensembles de } E \text{ de diamètre } \leqslant d \end{array} \right\}.$$

Enfin, soit K un sous-ensemble convexe et fermé de E, $\Omega \subset K$ un ouvert borné relativement à la topologie de K, $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ désignent respectivement la fermeture et le bord de Ω par rapport à la topologie de K.
Soit $\Gamma : \overline{\Omega} \to CC(K)$ une multiapplication fermée et χ-Lipschitzienne, i.e.

$$\exists k \in [0, 1[: \forall B \subset \overline{\Omega} \ \ \chi(\Gamma(B)) \leqslant k\chi(B).$$

Supposons que l'ensemble des points fixes de Γ : $Fix\Gamma = \{x \in \overline{\Omega} : x \in \Gamma(x)\}$, n'a pas d'intersection avec le bord $\partial\Omega$. Alors, par les travaux [2, 3], le degré topologique $\deg(\Gamma, \Omega)$ peut être défini. Ce degré topologique a les propriétés suivantes:

$i)$

$$\deg\,(\Gamma, \Omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \Gamma(\overline{\Omega}) \subset \Omega \\ 0 \text{ si } \Gamma(\overline{\Omega}) \subset K \backslash \Omega. \end{cases}$$

ii) Si les multiapplications fermées et χ-Lipschitziennes $\Gamma_0, \Gamma_1 : \overline{\Omega} \to CC(K)$ sont homotopiques, i.e. il existe une famille de multiapplications fermées et χ-Lipschitziennes, $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to CC(K)$ telles que

$$[\bigcup_{\lambda\in[0,1]} FixH(.,\lambda)] \cap \partial\Omega = \emptyset \text{ et } H(.,0) = \Gamma_0, H(.,1) = \Gamma_1,$$

alors $\deg(\Gamma_0, \Omega) = \deg(\Gamma_1, \Omega)$.
iii) Si $\deg(\Gamma, \Omega) \neq 0$ alors $\emptyset \neq Fix\Gamma \subset \Omega$.

Dans la suite de ce travail, nous supposons que E est un espace de Banach séparable.

3. Inclusion semi-linéaire

Considérons le problème semi-linéaire suivant

$$\mathcal{P}(\varphi) \quad \begin{cases} x^{'}(t) \in Lx_t + F(t, x_t), & t \in I \\ x_0 = \varphi \end{cases}$$

où $(a, \varphi) \in I\!R_*^+ \times \mathcal{B}$, L et F vérifient les hypothèses suivantes:
H_1) $L : \mathcal{B} \to E$ est un opérateur linéaire continu.
H_2) $F : I \times \mathcal{B} \to CC(E)$ (ensemble non vide de parties convexes et compactes de E) est une multiapplication vérifiant les conditions suivantes:

F_1) Pour tout $\psi \in \mathcal{B}$, la multiapplication $F(., \psi)$ admet une sélection mesurable. En particulier (F_1) est satisfaite si $F(., \psi)$ est mesurable pour tout $\psi \in \mathcal{B}$ (voir, [4]);

F_2) pour presque tout $t \in I$, la multiapplication $F(t, .)$ est semi-continue supérieurement (s.c.s. en bref), i.e. $\{\psi \in \mathcal{B} : F(t, \psi) \subset V\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{B}$ pour tout ouvert $V \subset E$;

F_3) pour tout sous-ensemble borné non vide $B \subset \mathcal{B}$, il existe une fonction $m \in L^1_+(I)$ telle que, pour tout $\psi \in B$ et pour presque tout $t \in I$

$$\|F(t, \psi)\| := \sup\{|y|_E : y \in F(t, \psi)\} \leqslant m(t)h(|\psi|_{\mathcal{B}})$$

où h est une fonction continue strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $h > 0$ sur $]0, +\infty[$;

F_4) il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que, pour tout borné non vide $B \subset \mathcal{B}$ et tout $t \in I$

$$\chi(F(t, B)) \leqslant k\chi_0(B)$$

où χ_0 est la mesure de non-compacité sur $\mathcal{B}$, $k < \frac{1}{N}$ et $N = \sup_{t\in I} \|\mathcal{U}(t)\|$.

Pour $x \in \mathcal{E}[a]$, posons $G_x : I \to CC(E)$ la multiapplication définie par
$G_x(t) = F(t, x_t)$. Par les conditions $F_1) - F_3)$ il résulte que pour tout $x \in \mathcal{E}[a]$

$$I^1_{G_x} := \{f \in L^1(I; E) : f(t) \in G_x(t) \text{ p.p.}\} \neq \emptyset \ .$$

Définition 3.1. Une fonction $x \in \mathcal{E}[a]$ est dite une solution faible du problème $\mathcal{P}(\varphi)$ s'il existe une fonction $f \in I^1_{G_x}$ telle que

$$x(t) = \begin{cases} (T(t)\varphi)(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(f(s))ds & \text{si} \quad t \in I \\ \varphi(t) & \text{si} \quad t \in]\text{-}\infty, 0]. \end{cases}$$

Notons par

$$\mathcal{E}^{\varphi}[a] = \{x :]\text{-}\infty, a] \to E : x_0 = \varphi \text{ et } x_{|_I} \text{ est continue }\},$$

$$C_0 = \{y \in C(I; E) : y(0) = 0\}.$$

Pour tout $y \in C_0$, considérons la fonction $\tilde{y} \in \mathcal{E}[a]$ définie par

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ y(t) & \text{si} \quad t \in I. \end{cases}$$

Posons pour $\varphi \in \mathcal{B}$,

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ (T(t)\varphi)(0) & \text{si} \quad t \in I. \end{cases}$$

D'après l'axiome B_1) $\tilde{\varphi}_t, \tilde{y}_t \in \mathcal{B}$ et les fonctions $t \longmapsto \tilde{\varphi}_t$, $t \longmapsto \tilde{y}_t$ sont continues sur I.
Considérons l'opérateur Γ défini sur C_0 par

$$\Gamma y = \{z \in C_0 : z(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(f(s))ds \ \text{ pour } t \in I \text{ et } \ f \in I^1_{G_{\tilde{y}+\tilde{\varphi}}}\}.$$

Il est facile de voir que $x \in \mathcal{E}^{\varphi}[a]$ est une solution faible du problème $\mathcal{P}(\varphi)$ si, et seulement si, $x = \tilde{y} + \tilde{\varphi}$ où $y \in \Gamma y$ et que l'ensemble Γy est non vide et convexe pour tout $y \in C_0$.
Par des raisonnements classiques (voir [10, 15]), nous obtenons le lemme suivant:

Lemme 3.1. *L'opérateur Γ est fermé.*
Pour tout borné $\Omega \subset C_0$, l'ensemble $\Gamma\Omega$ est borné et équicontinu.
Pour tout borné $\Omega \subset C_0$

$$\chi_0^1(\Gamma\Omega) \leqslant k_1 \chi_0^1(\Omega)$$

où χ_0^1 est la mesure de non-compacité sur C_0 avec $k_1 = kN < 1$.

Théorèm 3.1. *Sous les hypothèses $(H_1), (H_2)$ et s'il existe une constante $\rho > 0$ telle que $\sup_{t \in I} |x(t)|_E < \rho$, pour chaque x solution faible du problème*

$$\mathcal{P}_\lambda(\varphi) \quad \begin{cases} x'(t) \in Lx_t + \lambda F(t, x_t), \quad t \in I, \ \lambda \in [0, 1] \\ x_0 = \varphi \end{cases}$$

alors, le problème $\mathcal{P}(\varphi)$ admet au moins une solution faible.

Démonstration. Afin d'appliquer le principe du degré topologique, nous posons

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{y \in C_0 : \|y\| < \rho'\right\} \text{ où } \rho' > \rho + l\sup_{t\in I} \|T(t)\|\, |\varphi|_{\mathcal{B}}\,, \\ K &= \overline{Co}(\{0\} \cup \Gamma\overline{\Omega}) \text{ et } \Omega_K = \Omega \cap K, \end{aligned}$$

où $\overline{Co}(\{0\} \cup \Gamma\overline{\Omega})$ est l'enveloppe convexe fermée de $\{0\} \cup \Gamma\overline{\Omega}$.

Nous savons que la multiapplication $\Gamma : \overline{\Omega}_K \to CC(K)$ est fermée et χ_0^1-Lipschitzienne. De plus pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $y \in Fix\lambda\Gamma$ alors $x = \widetilde{y} + \widetilde{\varphi}$ est une solution faible du problème $\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$, donc pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} |y(t)|_E &= |x(t) - (T(t)\varphi)(0)|_E \\ &\leqslant |x(t)|_E + l\sup_{t\in I}\|T(t)\|.|\varphi|_{\mathcal{B}} \\ &< \rho + l\sup_{t\in I} \|T(t)\|\, |\varphi|_{\mathcal{B}} < \rho' \end{aligned}$$

et donc $(Fix\lambda\Gamma) \cap \partial\Omega_K = \emptyset$.

Prenons $\Gamma_0 = 0$ et $\Gamma_1 = \Gamma$, alors il existe une famille de multiapplications fermées χ-Lipschitziennes $H : \overline{\Omega}_K \times [0,1] \to CC(K)$ telles que

$$\left[\bigcup_{\lambda\in[0,1]} FixH(.,\lambda)\right] \cap \partial\Omega_K = \emptyset,\ H(.,0) = \Gamma_0 \text{ et } H(.,1) = \Gamma_1$$

(il suffit de prendre $H(.,\lambda) = \lambda\Gamma$); ainsi Γ_0 et Γ_1 sont homotopiques et donc $\deg(\Gamma_0, \Omega_K) = \deg(\Gamma_1, \Omega_K)$. Mais $\deg(\Gamma_0, \Omega_K) = 1$ car $0 \in \Omega_K$, ce qui donne $\deg(\Gamma, \Omega_K) = \deg(\Gamma_1, \Omega_K) = 1$, et donc $\emptyset \neq Fix\Gamma \subset \Omega_K$. Par suite, le problème $\mathcal{P}(\varphi)$ admet au moins une solution faible. □

Si nous remplacons l'hypothèse (H_2) par (H_2') : $(F_1), (F_2), (F_4)$ et (F_3') c'est à dire il existe une fonction $m \in L^1_+(I)$ telle que pour tout $\psi \in \mathcal{B}$ et pour presque tout $t \in I$

$$\|F(t,\psi)\| \leqslant m(t)h(|\psi|_{\mathcal{B}}),$$

où h est une fonction continue strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $h > 0$ sur $]0, +\infty[$; alors on a le théorème suivant.

Théorèm 3.2. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2'), le problème $\mathcal{P}(\varphi)$ admet au moins une solution faible, si pour tout $c > 0$*

$$\int_0^c \frac{ds}{h(s)} < +\infty \ \textit{et}\ \int_0^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} = +\infty \quad (*)$$

ou si

$$NK_a \int_0^a m(s)ds < \int_{c_1}^{+\infty} \frac{ds}{h(s)} \quad (**)$$

où $c_1 = (lMK_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}}$ avec $M = \sup_{t\in I}\|T(t)\|$.

Démonstration. Pour montrer l'existence de solutions faibles de $\mathcal{P}(\varphi)$, nous appliquons le théorème 3.1. Afin d'appliquer ce théorème nous allons établir un bornage a priori sur les solutions de $\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$. Soit x une solution de $\mathcal{P}_\lambda(\varphi)$, alors pour tout $t \in I$

$$x(t) = (T(t)\varphi)(0) + \lambda \int_0^t \mathcal{U}(t-s)(f(s))ds, \ t \in I \text{ and } f \in I^1_{G_x},$$

et donc

$$\begin{aligned} |x(t)|_E &\leqslant |(T(t)\varphi)(0)|_E + \lambda \int_0^t \|\mathcal{U}(t-s)\| \, |f(s)|_E \, ds \\ &\leqslant l \ |T(t)\varphi|_{\mathcal{B}} + \int_0^t \|\mathcal{U}(t-s)\| \, |f(s)|_E \, ds \\ &\leqslant l \, M \ |\varphi|_{\mathcal{B}} + N \int_0^t m(s)h(|x_s|_{\mathcal{B}})ds. \end{aligned}$$

En utilisant la même idée vue dans [14], posons pour tout $t \in I$

$$z(t) = \sup\{|x_s|_{\mathcal{B}} : 0 \leqslant s \leqslant t\}$$

alors on démontre (voir [14] p.142) que

$$\begin{aligned} z(t) = |x_{\bar{t}}|_{\mathcal{B}} &\leqslant K(\bar{t}) \sup_{0\leqslant s\leqslant \bar{t}} |x(s)|_E + M(\bar{t})|\varphi|_{\mathcal{B}} \\ &\leqslant K_a \sup_{0\leqslant s\leqslant \bar{t}} [lM|\varphi|_{\mathcal{B}} + N \int_0^s m(\nu)h(|x_\nu|_{\mathcal{B}})d\nu] + M_a.|\varphi|_{\mathcal{B}} \\ &\leqslant (lMK_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}} + NK_a \int_0^t m(s)h(|x_s|_{\mathcal{B}})ds \\ &\leqslant (lMK_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}} + NK_a \int_0^t m(s)h(z(s))ds := u(t). \end{aligned}$$

On a $z(t) \leqslant u(t)$ pour tout $t \in I$, $u(0) = (lMK_a + M_a)|\varphi|_{\mathcal{B}}$ et

$$\begin{aligned} u'(t) &= NK_a m(t)h(z(t)) \\ &\leqslant NK_a m(t)h(u(t)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{h(u(s))} ds \leqslant NK_a \int_0^t m(s)ds$$

ce qui donne

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{ds}{h(s)} \leqslant NK_a \int_0^a m(s)ds < +\infty.$$

Si nous faisons l'hypothèse $(*)$ nous obtenons

$$\int_0^{u(t)} \frac{ds}{h(s)} < +\infty.$$

Ce qui donne, $\exists\ \rho > 0 : \forall t \in I,\ z(t) \leqslant \rho$ et par l'axiome B_2)

$$|x(t)|_E \leqslant l|x_t|_{\mathcal{B}} \leqslant l\rho,$$

ainsi $\sup\limits_{t\in I}|x(t)|_E \leqslant l\rho$.
Si nous utilisons l'hypothèse $(**)$

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{ds}{h(s)} \leqslant NK_a \int_0^a m(s)ds < \int_{c_1}^{+\infty} \frac{ds}{h(s)}.$$

Cette inégalité implique qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que pour tout $t \in I,\ u(t) \leqslant \rho$, donc $z(t) \leqslant \rho$ et comme précédemment $\sup\limits_{t\in I}|x(t)|_E \leqslant l\rho$. □

4. Application

Dans cette section, nous allons donner une application intervenant dans la théorie du contrôle optimale.
Soit $E = C(I; I\!R)$ avec $I = [0, a]$ $(a > 0)$
Soit $f : I \times I \times I\!R \to I\!R$ une fonction telle que

i) $|f(t, s, x)| \leqslant m_1(t)h_1(t)$ où $m_1 \in L^1_+(I)$, h_1 est une fonction continue croissante sur $[0, +\infty[, h > 0$ sur $]0, +\infty[$ et vérifiant pour tout $c > 0, \int_0^c \frac{ds}{h_1(s)}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{h_1(s)} = +\infty$;

ii) $\exists \alpha > 0 : |f(t, s, x) - f(t, s, y)| \leqslant \alpha\,|x - y|$;

iii) f engendre un opérateur continu $\mathbf{f}$: $I \times E \to E$ défini par $\mathbf{f}(t, e)(s) = f(t, s, e(s))$.

Soit $\mathcal{W} : E \to CC(U)$ une multiapplication s.c.s. où U est un intervalle compact de $I\!R$.
Soient $\lambda : I \to I\!R^+$ une fonction continue et $k : I\!R^- \to I\!R^+$ une fonction telle qu' il existe $K > 0 : \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma\theta}\,|k(\theta)|\,d\theta \leqslant K$ pour tout $\gamma > 0$.
Considérons maintenant le problème suivant:

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}v(t, s) = \int_{-\infty}^0 k(\theta)v(t + \theta, s)d\theta + f(t, s, v(t, s))w(t) \\ \text{où } t, s \in I \text{ et } w(t) \in \mathcal{W}(v(t - \lambda(t), .)) \\ \text{avec } w \text{ une fonction mesurable sur } I \\ v(\theta, s) = \varphi(\theta)(s) \text{ pour tous } \theta \leqslant 0, s \in I. \end{array} \right.$$

Posons $\mathcal{B} = \mathcal{C}_\gamma := \{\psi \in C(]\text{-}\infty, 0]; E) : \lim\limits_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\psi(\theta)$ existe dans $E\}$ et $|\psi|_{\mathcal{B}} := \sup\limits_{\theta\leqslant 0} e^{\gamma\theta}\,|\psi(\theta)|_E$. Supposons que $\varphi \in \mathcal{B}$.
Alors on sait (voir par exemple $[7, 8, 14]$) que cet espace vérifie les axiomes fondamentaux de Hale et Kato.

Posons $x(t)(s) = v(t,s)$ pour tous $t \in]\text{-}\infty, a], s \in I$. Soient $L : \mathcal{B} \to E$ l'opérateur défini par

$$(L\psi)(s) = \int_{-\infty}^{0} k(\theta)\psi(\theta)(s)d\theta$$

et $F : I \times \mathcal{B} \to CC(E)$ la multiapplication définie par

$$F(t,\psi) = \{w(t)\mathbf{f}(t,\psi(0)) : w(t) \in \mathcal{W}(\psi(-\lambda(t))\}.$$

Alors L est un opérateur linéaire continu et F est une multiapplication vérifiant les hypothèses $(F_1) - (F_4)$; en effet

(F_1) résulte du fait que $\mathbf{f}$ est continu et de la mesurabilité de w,

(F_2) résulte du fait que $\mathcal{W}$ est s.c.s.

(F_3) résulte du bornage de U avec $m(t) = |w(t)|\, m_1(t) \leqslant w_a m_1(t)$ où $w_a = \sup\limits_{t\in I} |w(t)|$ et $h(t) = h_1(lt) = h_1(t)$ car $l = 1$ pour l'espace $\mathcal{C}_\gamma$.

(F_4) résulte du bornage de U et de l'hypothèse (ii) sur la fonction f (voir [10]) avec $k = w_a\alpha$.

Donc si nous choisissons un $k < e^{-al'}$ où $l' = \|L\|$ car il est facile de montrer que $\sup\limits_{t\in I} \|\mathcal{U}(t)\| \leqslant e^{al'}$ (voir [14, p. 136]), alors le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

References

[1] O. Arino and E. Sanchez, *A variation of constant formula for abstract delay differential equations*, J. Diff. and Integral Equation **9** (6) (1996), 1305-1320.

[2] Yu G. Borisovich, B. D. Gel'Man, A. D. Myshkis and V. V. Obukhovskii, *Topological methods in the fixed-point theory of multivalued maps*, Uspekhi Math. Nauk. **35** (1980), 59-126.

[3] Yu G. Borisovich, B. D. Gel'Man, A. D. Myshkis and V. V. Obukhovskii, *Multivalued mappings*, Math. Anal. Vol. 19, Viniti an SSSR, Moscow, 1982 (in Russian).

[4] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lect. Notes Math. Vol. 580; Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[5] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[6] J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, 1977.

[7] J. K. Hale and J. Kato, *Phase spaces for retarded equations with infinite delay*, Funkcialay Ekvacioj **21** (1978), 11-41.

[8] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, *Functional differential equations with infinite delay*, Lect. Notes Math. Vol. 1473, Springer, New York, 1991.

[9] T. Iwamiya, *Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces*, Hiroshima. Math. J. **16** (1986), 499-530.

[10] M. Kamenskii and V. Obukhovskii, *Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional differential inclusions in Banach spaces*, Nonlinear Anal. Theory Appl. **20** (7) (1993), 781-792.

[11] R. H. Jr Martin, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley-Interscience, New York, 1976.

[12] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, Berlin, 1983.

[13] K. Schumacher, *Remarks on semilinear partial functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Anal. Appl. **80** (1981), 261-290.
[14] A. Sghir, *Solutions d'une équation différentielle fonctionnelle semi-linéaire à retard infini dans un espace de Banach*, Acta Math. Vietnam. **24** (2) (1999) 192-145.
[15] A. Sghir, *Existence results for functional inclusions in Banach spaces*, Accepté pour publication dans Math-Recherche and Applications. Kénitra-Maroc.
[16] J. S. Shin, *Uniqueness of mild solutions to semilinear functional differential equations in Banach spaces*, Proc. Int. Symp. Functional differential equations, World Scientific, Singapore, (1991) 334-338.
[17] C. C. Travis and G. F. Webb, *Existence and stability for functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 395-418.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
BP: 2390. Marrakech 40000, Maroc.