ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 31, Number 2, 2006, pp. 115-129

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION D'UNE SORTE D'EQUATION INTEGRALE STOCHASTIQUE DANS $\mathbf{R}^n$

HISAO FUJITA YASHIMA AND ANNA GIANESINI

Résumé. Nous considérons l'équation intégrale stochastique à valuers dans $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire équation intégrale à laquelle une perturbation stochastique est ajoutée. En premier lieu nous considérons l'équation linéaire avec les coefficients constants. Pour cette équation nous établissons d'abord la borne uniforme de la solution et, en ulisant cette borne uniforme et en considérant la solution dans un espace de Hilbert convenable, nous démontrons l'existence d'une mesure invariante pour cette équation; la mesure invariante se démontrera unique. En second lieu nous considérons l'équation non-linéaire avec des conditions convenables et, en utilisant une méthode développée pour l'équation linéaire, nous démontrons l'existence d'une mesure invariante pour cette équation non-linéaire.

Abstract. We consider a stochastic integral equation in $\mathbf{R}^n$, i.e. integral equation to which a stochastic perturbation is added. In the first place we consider the linear equation with constant coefficients. For this equation, first of all, we establish the uniform boundedness of the solution and, by using this uniform boundedness and by considering the solution in a suitable Hilbert space, we prove the existence of an invariant measure for this equation; the invariant measure will be proved to be unique. In the second place we consider the non-linear equation with suitable conditions and, by using a method developed for the linear equation, we prove the existence of an invariant measure for this non-linear equation.

1. Introduction

Dans cet article on va considérer l'équation intégrale stochastique de la forme

$$dX(t) = F(X(t))dt + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)g(X(s))dsdt + \sigma(X(t))dW(t), \tag{1.1}$$

où $X(t)$ est le processus stochastique inconnu à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, tandis que F est une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, g une function définie sur $\mathbf{R}^n$

Received August 23, 2005; in revised form May 3, 2006.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 60H20.
Key words and phrases. Stochastic integral equation, inviariant measure, asymptotic behaviour.
Mots-clés: Équation intégrale stochastique, mesure invariante, comportement asymptotique.

à valeurs dans $\mathbf{R}^l$, φ une fonction définie sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{n\times l}$ ($\mathbf{R}^{n\times l}$ désigne l'ensemble des matrices du type $n \times l$), σ une function définie sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{n\times m}$, $W(t)$ le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; nous supposons que φ appartient, au moins, à $L^1(0,\infty;\mathbf{R}^{n\times l})$.

Pour une équation analogue, Mao [4] a examiné des conditions suffisantes pour que la solution tende vers 0, ce qui correspond à la mesure invariante réduite à δ de Dirac à l'origine. D'autre part, dans [2] on trouve une étude sur la mesure invariante pour l'équation stochastique avec un terme de retard ayant la forme $\sum_{i=1}^N \varphi_i X(t-\vartheta_i)$ au lieu de $\int_{-\infty}^t \varphi(t-s)g(X(s))ds$.

Dans le présent travail on va analyser le comportement asymptotique de la solution de l'équation (1.1) et démontrer l'existence d'une mesure invariante pour (1.1). La mesure invariante sera obtenue dans un espace de Hilbert qu'on va définir. Dans le cas linéaire, on démontrera aussi l'unicité de la mesure invariante.
Les auteurs tiennent à remercier vivement Professeur Wang Feng-yu (Pékin), qui leur a suggéré des idées très utiles pour achever le présent travail. Ils remercient également Professeur Jerzy Zabczyk (Varsovie) et Professeur Ryszard Rudnicki (Katowice) de discussions très utiles sur le sujet.

Pour étudier l'équation (1.1), nous précisons avant tout que sa condition initiale sera donnée sur un intervalle contenu dans $]-\infty,0]$ et contenant le support de la fonction $\varphi(-\,\cdot)$. Pour uniformiser l'exposition, nous posons

$$X(-\tau) = \bar{\xi}(\tau) \qquad \text{pour} \quad \tau \geq 0. \tag{1.2}$$

Il est facile de restreindre l'intervalle de la définition de la condition (1.2), s'il est possibile et commode, à un intervalle borné.

Le problème (1.1)–(1.2) peut être écrit dans la forme

$$dX(t) = \big(F(X(t)) + \int_{-\infty}^0 \varphi(t-s)g(\bar{\xi}(-s))ds\big)dt + \tag{1.3}$$

$$+ \int_0^t \varphi(t-s)g(X(s))dsdt + \sigma(X(t))dW(t),$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^0 \varphi(t-s)g(\bar{\xi}(-s))ds. \tag{1.4}$$

Le théorème d'existence et unicité pour le problème (1.1)–(1.2) (ou (1.3)–(1.4)) sous des conditions habituelles, par exemple, la condition de Lipschtiz pour les fonctions $F(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$, fait partie des résultats classiques (voir par exemple [3]). Pour $\bar{\xi}$ (et éventuellement pour φ) nous supposons

$$\bar{\xi} \in L^\infty_{loc}(0,\infty;\mathbf{R}^n) \quad \text{p.s.}, \qquad \sup_{\tau\geq 0} \mathbf{E}(|\bar{\xi}(\tau)|^2) < \infty, \tag{1.5}$$

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [0,L_0], \quad 0 < L_0 < \infty, \quad \text{ou} \quad \mathbf{E}(\sup_{\tau\geq 0}|\bar{\xi}(\tau)|^2) < \infty, \tag{1.6}$$

de sorte que le terme $\int_{-\infty}^0 \varphi(t-s)g(\bar{\xi}(-s))ds$ dans (1.3) vérifie facilement les conditions requises dans les résultats classiques. Comme on verra, les conditions (1.5) et (1.6) sont compatibles avec la mesure invariante que l'on construira.

Remarquons que le théorème d'existence et unicité prouvé sous la condition lipschitzienne des fonctions F, g, σ peut être facilement généralisé au cas où F, g, σ sont localement lipschitziennes et il existe une suite $\{D_k, F_k, g_k, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$(1.7)\qquad D_k : \text{ouverts}, \qquad \cup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbf{R}^n, \qquad D_k \subset D_{k+1},$$

$$(1.8)\qquad F_k\big|_{D_k} = F\big|_{D_k}, \quad g_k\big|_{D_k} = g\big|_{D_k}, \quad \sigma_k\big|_{D_k} = \sigma\big|_{D_k},$$

(1.9) F_k, g_k, σ_k satisfont à la condition de Lipschitz,

(1.10) si $X_k(t)$ est la solution de l'équation obtenue en substituant les fonctions F_k,
g_k, σ_k au lieu de F, g, σ dans (1.1) avec la même condition initiale, on a
$\mathbf{P}(\{X_k(s) \in D_k \ \forall s \in [0,T]\}) \to 1 \quad \text{pour} \quad k \to \infty \qquad \forall T \geq 0.$

En effet, comme F_k, g_k, σ_k sont lipschitziennes, la solution $X_k(t)$ est unique. Si $k \leq k'$, alors pour presque tout

$$\omega \in \{X_k(s) \in D_k \ \forall s \in [0,T]\}$$

on a

$$X_k(\omega; s) = X_{k'}(\omega; s) \quad \forall s \in [0,T].$$

Donc, en vertu de (1.7) et (1.10) $X_k(t)$ converge presque surement vers un processus $X(t)$; en outre grâce à (1.7)–(1.8) il est évident que le processus $X(t)$ satisfait à l'équation (1.1) et à la condition (1.2) p. s..

Dans la suite on va établir une estimation globale de la solution du problème (1.1)–(1.2) et, en utilisant cette estimation, démontrer l'existence d'une mesure invariante. On considère d'abord le cas linéaire, où on démontre également l'unicité de la mesure invariante, et puis on examine le cas non-linéaire.

2. Équation linéaire: estimation dans $\mathbf{R}^n$

La plus simple des équations de la forme (1.1) est l'équation linéaire

$$(2.1)\qquad dX(t) = -AX(t)dt + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)X(s)ds dt + \sigma dW(t),$$

où A et σ sont des matrices constantes du type $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, $W(t)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, φ une fonction définie sur $[0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{n \times n}$.

Pour le problème (2.1), (1.2), on a l'estimation suivante.

Théorème 2.1. *On suppose que*

$$(2.2)\qquad \sup_{B \in GL(n)} \big(\min_{|x|=1} \langle BAB^{-1}x, x\rangle - \int_0^{\infty} \|B\varphi(\tau)B^{-1}\| d\tau \big) > 0,$$

où

$$\|B\varphi B^{-1}\| = \|B\varphi B^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)} = \sup_{|x|=1} |B\varphi B^{-1}x|.$$

Si $X(t)$ est la solution du problème (2.1), (1.2) *avec les conditions* (1.5)–(1.6), *alors il existe un nombre M tel que*

$$\mathbf{E}(|X(t)|^2) \leq M \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Démonstration. En vertu de (2.2) il existe une matrice B telle que

$$\min_{|x|=1} \langle BAB^{-1}x, x\rangle > \int_0^\infty \|B\varphi(\tau)B^{-1}\| d\tau. \tag{2.4}$$

Posons

$$\tilde{X}(t) = BX(t), \quad \tilde{A} = BAB^{-1}, \quad \tilde{\varphi}(\tau) = B\varphi(\tau)B^{-1}, \quad \tilde{\sigma} = B\sigma. \tag{2.5}$$

La formule d'Ito appliquée à $|\tilde{X}(t)|^2$ nous donne

$$d(|\tilde{X}(t)|^2) =$$

$$= 2\tilde{X}(t) \cdot \int_{-\infty}^t \tilde{\varphi}(t-s)\tilde{X}(s)dsdt - 2\tilde{A}\tilde{X}(t) \cdot \tilde{X}(t)dt + \tilde{R}dt + 2\tilde{X}(t) \cdot \tilde{\sigma}dW(t),$$

où

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{\sigma}_{ij}^2 = \sum_{i,k,l=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ik}\sigma_{kj}b_{il}\sigma_{lj}, \quad B = (b_{ij}).$$

Donc, compte tenu de la propriété de l'intégrale stochastique $\int_0^t \tilde{X}(t') \cdot \tilde{\sigma}dW(t')$, on a

$$\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2) = \mathbf{E}(|\tilde{X}(0)|^2) + \tag{2.6}$$

$$+2\mathbf{E}\int_0^t \tilde{X}(t') \cdot \int_{-\infty}^{t'} \tilde{\varphi}(t'-s)\tilde{X}(s)dsdt' - 2\mathbf{E}\int_0^t \tilde{A}\tilde{X}(t') \cdot \tilde{X}(t')dt' + \tilde{R}t.$$

Posons

$$y(t) = \mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2), \tag{2.7}$$

$$a_0 = \min_{|x|=1} \langle \tilde{A}x, x\rangle, \qquad c_0 = \int_0^\infty \|\tilde{\varphi}(\tau)\| d\tau. \tag{2.8}$$

Comme

$$2\mathbf{E}\big[\tilde{X}(t) \cdot \int_{-\infty}^t \tilde{\varphi}(t-s)\tilde{X}(s)ds\big] \leq$$

$$\leq a_0\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2) + \frac{1}{a_0}\int_{-\infty}^t \|\tilde{\varphi}(t-s)\| ds \mathbf{E}\int_{-\infty}^t \|\tilde{\varphi}(t-s)\| |\tilde{X}(s)|^2 ds,$$

de (2.6) on déduit que

$$y'(t) \leq \frac{c_0}{a_0}\int_{-\infty}^t \|\tilde{\varphi}(t-s)\| y(s)ds - a_0 y(t) + \tilde{R}. \tag{2.9}$$

Considérons maintenant une équation intégro-différentielle auxilière

$$H'(t) = \frac{c_0}{a_0}\int_{-\infty}^t \|\tilde{\varphi}(t-s)\| H(s)ds - a_0 H(t) \tag{2.10}$$

avec la condition initiale

$$H(s) = \mathbf{E}(|X(s)|^2) - \frac{a_0 \tilde{R}}{a_0^2 - c_0^2} \qquad \text{pour } s \leq 0. \tag{2.11}$$

Comme $a_0 > c_0 > 0$ (voir (2.4), (2.5), (2.8)), on a $a_0^2 - c_0^2 \neq 0$. L'équation intégro-différentielle (2.10) avec la condition (2.11) peut être transformée dans l'équation intégrale

$$H(t) = f(t) + \int_0^t \Psi(t-s)H(s)ds, \tag{2.12}$$

où

$$f(t) = H(0)e^{-a_0 t} + \frac{c_0}{a_0}\int_{-\infty}^0 \int_0^t \|\tilde{\varphi}(t'-s)\| e^{-a_0(t-t')} dt' H(s)ds,$$

$$\Psi(\tau) = \frac{c_0}{a_0}\int_0^\tau \|\tilde{\varphi}(\tau')\| e^{-a_0(\tau-\tau')} d\tau'.$$

Soit z un nombre complexe tel que $Re(z) > 0$. Alors pour la transformée de Laplace $\hat{\Psi}(z)$ de la fonction $\Psi(t)$ on a

$$|\hat{\Psi}(z)| = \Big|\frac{c_0}{a_0}\int_0^\infty e^{-zt}\int_0^t \|\tilde{\varphi}(\tau)\| e^{-a_0(t-\tau)} d\tau dt\Big| =$$

$$= \Big|\frac{c_0}{a_0}\int_0^\infty \int_0^\infty \|\tilde{\varphi}(\tau)\| e^{-a_0 q} e^{-z(q+\tau)} d\tau dq\Big| \leq$$

$$\leq \frac{c_0}{a_0}\int_0^\infty e^{-a_0 q}|e^{-zq}|dq \int_0^\infty \|\tilde{\varphi}(\tau)\||e^{-z\tau}|d\tau \leq \frac{c_0^2}{a_0^2} < 1.$$

Comme $a_0 > c_0 > 0$, on a $|\hat{\Psi}(z)| \leq \frac{c_0^2}{a_0^2} < 1$ pour tout nombre complexe z tel que $Re(z) > 0$. Par conséquent, en vertu du théorème de Paley-Wiener (voir [5]), on peut représenter la solution $H(t)$ de l'équation (2.12) dans la forme

$$H(t) = \int_0^t R(t-s)f(s)ds$$

avec $R(\cdot) \in L^1(0,\infty)$. On voit facilement que $f(t) \to 0$ pour $t \to \infty$. Donc on a

$$H(t) \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to \infty. \tag{2.13}$$

Maintenant nous posons

$$\eta(t) = H(t) + \frac{a_0 \tilde{R}}{a_0^2 - c_0^2}. \tag{2.14}$$

Alors l'équation (2.10) se transforme en

$$\eta'(t) = \frac{c_0}{a_0}\int_{-\infty}^t \|\tilde{\varphi}(t-s)\|\eta(s)ds - a_0\eta(t) + \tilde{R}. \tag{2.15}$$

Conformément à (2.7), (2.11) et (2.14) on a $\eta(0) = y(0)$. Donc de (2.9) et de (2.15) il résulte que

$$y(t) \leq \eta(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

D'autre part, grâce à (2.13) et (2.14), on a

$$\eta(t) \to \frac{a_0 \tilde{R}}{a_0^2 - c_0^2}.$$

Par conséquent il existe un nombre positif $\tilde{M}$ tel que

$$y(t) \leq \tilde{M} \qquad \forall t \geq 0, \tag{2.16}$$

et, en vertu de (2.5), (2.7) on a

$$\mathbf{E}(|X(t)|^2) = \mathbf{E}(|B^{-1}\tilde{X}(t)|^2) \leq \|B^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)}\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2) = \|B^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)}y(t).$$

Donc, en posant $M = \|B^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)}\tilde{M}$, de (2.16) on obtient (2.3). Le théorème est démontré. □

3. Équation linéaire: mesure invariante

Dans ce paragraphe on va démontrer l'existence et l'unicité de la mesure invariante pour l'équation stochastique (2.1). Pour cela on introduit l'espace de Hilbert $H = H_0 \times \mathbf{R}^n$, où

$$H_0 = \Big\{\, u : \text{mesurable} \,\Big|\, \int_0^\infty |u(\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau < \infty \,\Big\} \tag{3.1}$$

avec la norme

$$\|u\|_{H_0} = \Big(\int_0^\infty |u(\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau \Big)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Pour ne pas alourdir la démonstration, on suppose que

$$\varphi \in C(\mathbf{R}_+), \qquad \operatorname{supp}\varphi \subset [0, L_0] \qquad (0 < L_0 < \infty). \tag{3.3}$$

Si $X(t)$ est la solution de l'équation (2.1) avec la condition (2.2), alors on définit

$$\xi_t(\tau) = X(t-\tau), \qquad Y(t) = \begin{pmatrix} \xi_t \\ X(t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

On a alors le

Théorème 3.1. *On suppose la condition* (3.3). *Alors dans l'espace de Hilbert* $H = H_0 \times \mathbf{R}$ *il existe une mesure invariante et une seule pour l'équation* (2.1) *si sa solution est exprimée dans la forme* $Y(t) = \begin{pmatrix} \xi_t \\ X(t) \end{pmatrix}$ *donnée dans* (3.4).

La démonstration de l'existence d'une mesure invariante consiste en plusieures étapes, en recourant avant tout à des estimations de la solution $X(t)$ du problème (2.1), (1.2). Pour cela, on définit l'ensemble A_γ par la relation

$$A_\gamma = \Big\{ u \in C^0([0,\infty[) \,\Big|\, \sup_{\tau_1,\tau_2 \geq 0, |\tau_1-\tau_2|\leq 1} \frac{|u(\tau_1)e^{-\tau_1/4} - u(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}} \leq \gamma \,\Big\} \tag{3.5}$$

et on considère l'équation (2.1) avec la condition initiale (1.2) avec $\bar{\xi}$ satisfaisant à la condition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \gamma = \gamma_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathbf{P}(\{\bar{\xi} \in A_{\gamma_\varepsilon}\}) \geq 1 - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Pour la solution $X(t)$ du problème (2.1)–(2.2) avec les conditions (2.3), (3.3) et (3.6) et les processus stochastiques ξ_t et $Y(t)$ définis dans (3.4) on démontre les lemmes suivants 3.1 – 3.7.

Lemme 3.1. *On a*

$$\mathbf{E}(\|\xi_t\|_{H_0}^2) \leq M, \qquad \mathbf{E}(\|Y(t)\|_H^2) \leq 2M \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.7}$$

où M est la constante figurant dans (2.3).

Démonstration. De (1.5), (2.3) et (3.4) on déduit que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\|\xi_t\|_{H_0}^2) &= \mathbf{E}\int_0^\infty |\xi_t(\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau = \int_0^\infty \mathbf{E}(|\ X(t-\tau)|^2) e^{-\tau} d\tau \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = M.\end{aligned}$$

La deuxième inégalité de (3.7) s'obtient immédiatement de la définition de H et $Y(t)$, de la première inégalité et de (2.3). □

Soit $\delta > 0$. Posons

$$B_\delta = \{\, u \in H_0 \mid \sup_{k \in \mathbf{N}} |u(k)| e^{-k/4} \leq \delta \,\}, \tag{3.8}$$

$$C_\delta = \left\{ u \in H_0 \,\middle|\, \sup_{k \in \mathbf{N}} \int_k^{k+1} |u(\tau)|^2 d\tau \leq \delta^2 \right\}. \tag{3.9}$$

Lemme 3.2. *On a*

$$\mathbf{P}(\{\xi_t \in B_\delta \cap C_\delta\}) \geq 1 - 6M\delta^{-2} \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

Démonstration. Comme grâce au théorème 2.1 on a

$$\mathbf{E}(|\xi_t(\tau)|^2) = \mathbf{E}(|X(t-\tau)|^2) \leq M,$$

on a

$$\mathbf{P}(\{\, |\xi_t(k)| e^{-k/4} > \delta \,\}) = \mathbf{P}(\{|\xi_t(k)|^2 > \delta^2 e^{k/2}\}) \leq \frac{M}{\delta^2 e^{k/2}}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{P}(\{\, \sup_{k \in \mathbf{N}} |\xi_t(k)| e^{-k/4} \leq \delta \,\}) \geq 1 - \sum_{k=0}^\infty \frac{M}{\delta^2 e^{k/2}} \geq 1 - 3M\delta^{-2}, \tag{3.11}$$

où nous avons utilisé la relation $\sum_{k=0}^\infty e^{-k/2} < 3$.

Il est clair que du théorème 2.1 il résulte également que

$$\mathbf{E}\int_k^{k+1} |\xi_t(\tau)|^2 d\tau = \mathbf{E}\int_{t-k-1}^{t-k} |X(s)|^2 d\tau \leq M.$$

Par conséquent on a

$$\mathbf{P}\big(\{\sup_{k\in\mathbf{N}}\int_k^{k+1}|\xi_t(\tau)|^2d\tau \le \delta^2 e^{k/2}\,\}\big) \ge 1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M}{\delta^2 e^{k/2}} \ge 1-3M\delta^{-2}. \tag{3.12}$$

De la définition de B_δ et de C_δ (voir (3.8)–(3.9)) et de (3.11)–(3.12) on déduit (3.7). □

Soit $\delta>0$. Posons

$$\tilde{A}_\delta^{[t]} = \big\{\,u\in C^0([0,t])\,\big|\sup_{0\le\tau_2<\tau_1\le t,|\tau_1-\tau_2|\le 1}\frac{e^{-\tau_2/4}|u(\tau_1)-u(\tau_2)|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le\delta\,\}. \tag{3.13}$$

Lemme 3.3. *Il existe une constante positive C telle que*

$$\mathbf{P}(\{W(t-\cdot)\in\tilde{A}_\delta^{[t]}\})\ge 1-C\delta^{-3} \qquad \forall t\ge 0. \tag{3.14}$$

Démonstration. Pour chaque $k\in\mathbf{N}$ on définit

$$D_{\delta,k} = \big\{\,u\in C^0([0,\infty[)\,|\sup_{k\le\tau_2<\tau_1\le k+1}\frac{|u(\tau_1)-u(\tau_2)|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le\delta\,e^{k/4}\,\big\}.$$

Des propriétés des trajectoires du mouvement brownien, on déduit qu'il existe des constantes positives C', C'' telles que

$$\mathbf{P}\big(\{\sup_{T\le t_1<t_2\le T+1}\frac{|W(t_1)-W(t_2)|}{|t_1-t_2|^{1/6}}>\eta\,\}\big)\le C'\eta^{-3}e^{-C''\eta^2} \qquad \forall\eta>0,$$

ou encore

$$\mathbf{P}(\{W(t-\cdot)\notin D_{\delta,k}\})\le C'\delta^{-3}e^{-3k/4}e^{-C''\delta^2e^{k/2}},$$

où nous sommes convenus que $W(t-\tau)=0$ pour $\tau\ge t$. Donc, compte tenu de la relation

$$\mathbf{P}(\{W(t-\cdot)\in\tilde{A}_\delta^{[t]}\})\ge 1-\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(\{W(t-\cdot)\notin D_{\delta,k}\}),$$

on obtient (3.14). □

Lemme 3.4. *Pour tout $\delta>0$ il existe un $\gamma>0$ tel que*

$$(\{\xi(t+\cdot)\in A_\gamma\}\cap\{W(t-\cdot)\in\tilde{A}_\delta^{[t]}\}\cap\{\xi_t\in B_\delta\cap C_\delta\})\subset\{\xi_t\in A_\gamma\}. \tag{3.15}$$

Démonstration. En écrivant l'équation (2.1) dans la forme intégrale, on a

$$\begin{aligned}X(t)=&X(0)+\int_{-\infty}^0\Big[\int_{-s}^{t-s}\varphi(\tau)d\tau\Big]X(s)ds\\&+\int_0^t\Big[\int_0^{t-s}\varphi(\tau)d\tau-A\Big]X(s)ds+\sigma W(t),\end{aligned}$$

et pour $0\le s_1<s_2$ la différence $X(s_2)-X(s_1)$ a la forme

$$X(s_2)-X(s_1)=\int_{-\infty}^{s_1}\Big[\int_{s_1-r}^{s_2-r}\varphi(\tau)d\tau\Big]X(r)dr+$$

$$+\int_{s_1}^{s_2}\Big[\int_0^{s_2-r}\varphi(\tau)d\tau - A\Big]X(r)dr + \sigma(W(s_2)-W(s_1)).$$

Donc, si on désigne par $\|C\|$ la norme de l'opérateur linéaire (matrice) $C \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, pour $0 \le \tau_2 < \tau_1 \le t$ on a

$$|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4} - \xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|$$
$$\le (e^{-\tau_2/4} - e^{-\tau_1/4})|\xi_t(\tau_1)| + e^{-\tau_2/4}\Big[\Big|\int_{-\infty}^{t-\tau_1} F_1(t,\tau_1,\tau_2,r)\xi_t(t-r)dr\Big|$$
$$+\Big|\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} F_2(t,\tau_2,r)\xi_t(t-r)dr\Big| + \|\sigma\|\,|W(t-\tau_2)-W(t-\tau_1)|\Big],$$

où

$$F_1(t,\tau_1,\tau_2,r) = \int_{t-\tau_1-r}^{t-\tau_2-r}\varphi(\tau')d\tau', \qquad F_2(t,\tau_2,r) = \int_0^{t-\tau_2-r}\varphi(\tau')d\tau' - A.$$

Il est évident que

$$e^{-\tau_2/4} - e^{-\tau_1/4} \le \frac{1}{4}e^{-\tau_2/4}(\tau_1-\tau_2),$$
$$|F_1(t,\tau_1,\tau_2,r)| \le (\sup_{\tau\ge 0}|\varphi(\tau)|)(\tau_1-\tau_2),$$
$$F_1(t,\tau_1,\tau_2,r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < t-\tau_1-L_0,$$
$$|F_2(t,\tau_2,r)| \le \int_0^\infty \|\varphi(\tau)\|d\tau + \|A\| \equiv C_2.$$

Donc, en posant $k_1 = \inf\{k\in\mathbf{N} \mid k \ge \tau_1\}$, on a

$$\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4} - \xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}} \le \frac{1}{4}e^{-\tau_2/4}\Big[|\xi_t(k_1)| + |\xi_t(k_1)-\xi_t(\tau_1)| +$$
$$+(\sup_{\tau\ge 0}|\varphi(\tau)|)\sqrt{L_0}\Big(\int_{\tau_1}^{\tau_1+L}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} + C_2\Big(\int_{\tau_2}^{\tau_1}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} +$$
$$+\|\sigma\|\frac{|W(t-\tau_2)-W(t-\tau_1)|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\Big],$$
$$|\xi_t(k_1)-\xi_t(\tau_1)| \le (\sup_{\tau\ge 0}|\varphi(\tau)|)\sqrt{L_0}\Big(\int_{k_1}^{k_1+L_0}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} +$$
$$+C_2\Big(\int_{\tau_1}^{k_1}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} + \|\sigma\|\,|W(t-\tau_1) - W(t-(k_1\wedge t))|.$$

Si $|\tau_1-\tau_2| \le 1$, $\xi_t \in B_\delta \cap C_\delta$, $W(t-\cdot) \in \tilde{A}_\delta^{[t]}$, alors on a

$$e^{-\tau_2/4}|\xi_t(k_1)| \le e^{1/2}\delta,\ e^{-\tau_2/4}\Big(\int_{\tau_1}^{\tau_1+L_0}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} \le \sqrt{L_0+2}\,e^{(L_0+1)/4}\delta,$$
$$e^{-\tau_2/4}\Big(\int_{k_1}^{k_1+L_0}|\xi_t(\tau)|^2 d\tau\Big)^{1/2} \le \sqrt{L_0+1}\,e^{(L_0+2)/4}\delta,$$

$$e^{-\tau_2/4}\Big(\int_{\tau_2}^{\tau_1}|\xi_t(\tau)|^2d\tau\Big)^{1/2}\le\sqrt{2}e^{1/4}\delta,\qquad e^{-\tau_2/4}\Big(\int_{\tau_1}^{k_1}|\xi_t(\tau)|^2d\tau\Big)^{1/2}\le e^{1/4}\delta,$$
$$e^{-\tau_2/4}\frac{|W(t-\tau_2)-W(t-\tau_1)|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le\delta,\qquad e^{-\tau_2/4}\,|W(t-\tau_2)-W(t-\tau_1)|\le\delta.$$

Par conséquent il existe une constante $\gamma=\gamma(\delta)$ telle que, si $|\tau_1-\tau_2|\le 1$, $\xi_t\in B_\delta\cap C_\delta$, $W(t-\cdot)\in\tilde{A}_\delta^{[t]}$, alors

$$\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4}-\xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le\gamma.$$

Dans le cas où $0\le t\le\tau_2<\tau_1$ et $\tau_1-\tau_2\le 1$, on déduit immédiatement de la condition $\xi_t(t+\cdot)\in A_\gamma$ que

$$\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4}-\xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le\gamma.$$

Dans le cas où $0\le\tau_2<t<\tau_1$ et $\tau_1-\tau_2\le 1$, on considère l'inégalité évidente

$$\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4}-\xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|\tau_1-\tau_2|^{1/6}}\le$$
$$\le\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4}-\xi_t(t)e^{-t/4}|}{|\tau_1-t|^{1/6}}+\frac{|\xi_t(t)e^{-t/4}-\xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|t-\tau_2|^{1/6}}.$$

Il est clair que le premier membre $\frac{|\xi_t(\tau_1)e^{-\tau_1/4}-\xi_t(t)e^{-t/4}|}{|\tau_1-t|^{1/6}}$ peut être estimé comme dans le cas $t\le\tau_2<\tau_1$, tandis que le second membre $\frac{|\xi_t(t)e^{-t/4}-\xi_t(\tau_2)e^{-\tau_2/4}|}{|t-\tau_2|^{1/6}}$ peut être estimé comme dans le cas $0\le\tau_2<\tau_1\le t$.

De cette manière, pour tout $\delta>0$ il existe un $\gamma>0$ tel que, si $\xi(t+\cdot)\in A_\gamma$, $W(t-\cdot)\in\tilde{A}_\delta^{[t]}$ et $\xi_t\in B_\delta\cap C_\delta$, alors $\xi_t\in A_\gamma$. Le lemme est démontré. □

Lemme 3.5. *Pour tout $\varepsilon>0$ il existe un γ_ε tel que*

$$\mathbf{P}(\{\xi_t\in A_{\gamma_\varepsilon}\cap B_{\gamma_\varepsilon}\})\ge 1-\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall t\ge 0.\tag{3.16}$$

Démonstration. Le lemme résulte de la condition (3.6) et des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4. □

Lemme 3.6. *Pour tout $\gamma>0$, l'ensemble $A_\gamma\cap B_\gamma$ est relativement compact dans H_0.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$.

En vertu de (3.5) et (3.8), si $u\in A_\gamma\cap B_\gamma$, alors u vérifie la relation

$$|u(\tau)e^{-\tau/4}|\le\big(1+\frac{1}{2^{1/6}}\big)\gamma\qquad\forall\tau\ge 0.\tag{3.17}$$

Donc pour $L>0$ on a

$$\int_L^\infty|u(\tau)|^2e^{-\tau}d\tau\le\big(1+\frac{1}{2^{1/6}}\big)^2\gamma^2\int_L^\infty e^{-\tau}d\tau=\big(1+\frac{1}{2^{1/6}}\big)^2\gamma^2e^{-L}.$$

Par conséquent, en posant $L_\varepsilon = 2\log\big(\frac{(2^{1/2}+2^{1/3})\gamma}{\varepsilon}\big)$, on a

$$\|u\chi_{[L_\varepsilon,\infty[}\|^2_{H_0} \le \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \forall u \in A_\gamma, \tag{3.18}$$

où

$$\chi_{[L_\varepsilon,\infty[}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < L_\varepsilon \\ 1 & \text{si } \tau \ge L_\varepsilon \end{cases}.$$

D'autre part, les fonctions $\varphi(\tau) = u(\tau)e^{-\tau/4}$ définies sur $[0, L_\varepsilon]$ avec $u \in A_\gamma \cap B_\gamma$, sont, grâce à (3.17), uniformément bornées et, grâce à la définition, uniformément continues. Donc, en vertu du théorème d'Arzelà, l'ensemble de ces fonctions est relativement compact dans $C^0([0, L_\varepsilon])$. En outre, si u_1 et u_2 appartiennent à $A_\gamma \cap B_\gamma$ et si on pose $\varphi_i(\tau) = u_i(\tau)e^{-\tau/4}$, alors on a

$$\|(u_1-u_2)\chi_{[0,L_\varepsilon]}\|^2_{H_0} \le 2\sup_{0\le\tau\le L_\varepsilon}|(u_1(\tau)-u_2(\tau))e^{-\tau/4}|^2 = 2\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{C^0([0,L_\varepsilon])}.$$

Cela étant, compte tenu aussi de (3.18) et de l'égalité

$$\|u_1-u_2\|^2_{H_0} = \|(u_1-u_2)\chi_{[0,L_\varepsilon]}\|^2_{H_0} + \|(u_1-u_2)\chi_{[L_\varepsilon,\infty[}\|^2_{H_0},$$

on voit qu'il existe un ε-réseau pour $A_\gamma \cap B_\gamma$ dans l'espace métrique H_0. Donc, $A_\gamma \cap B_\gamma$ est relativement compact dans H_0. □

Lemme 3.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $N_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\mathbf{P}(\{\,|X(t)| \le N_\varepsilon\,\}) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall t \ge 0.$$

Démonstration. Comme $\mathbf{E}(|X(t)|^2) \le M$ $\forall t \ge 0$ (voir le théorème 2.1), on a

$$\mathbf{P}(\{\,|X(t)| > N_\varepsilon\,\}) \le \frac{M}{N_\varepsilon^2} \qquad \forall t \ge 0,$$

d'où on déduit le lemme. □

Démonstration du Théorème 3.1. Soit $X(t)$ la solution du problème (2.1), (1.2) avec les conditions (1.5), (3.3) et (3.6). Soit $Y(t)$ le processus stochastique défini dans (3.4). Alors, en virtu des lemmes 3.5, 3.6 et 3.7, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de H tel que, qeul que soit $t \ge 0$, on ait

$$\mathbf{P}(\{\,Y(t) \in K_\varepsilon\,\}) \ge 1 - \varepsilon.$$

Donc grâce au théorème de Krylov-Bogoliubov (voir par exemple [2]) on en déduit l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (2.1) dont la solution est exprimée dans la forme $Y(t) = \begin{pmatrix} \xi_t \\ X(t) \end{pmatrix}$ donnée dans (3.4).

Pour démontrer l'unicité de la mesure invariante, considérons deux mesures invariantes $\mu^{(1)}$ et $\mu^{(2)}$ dans H pour l'équation (2.1). Soient $\bar{Y}^{(1)} = (\bar{\xi}^{(1)}, \bar{X}^{(1)})$ et $\bar{Y}^{(2)} = (\bar{\xi}^{(2)}, \bar{X}^{(2)})$ des variables aléatoires à valeurs dans $H = H_0 \times \mathbf{R}^n$ ayant la loi $\mu^{(1)}$ et $\mu^{(2)}$ respectivement. Il est évident que $\bar{\xi}^{(1)}$ et $\bar{\xi}^{(2)}$ satisfont à (1.5) et à (3.3). Considérons l'équation (2.1) avec la condition initiale

$$X(-\tau) = \bar{\xi}^{(i)} \qquad \text{pour } \tau \ge 0, \qquad i = 1, 2,$$

et désignons par $X^{(1)}(t)$ et $X^{(2)}(t)$ la solution de cette équation respectivement avec $X(-\tau) = \bar{\xi}^{(1)}$ et $X(-\tau) = \bar{\xi}^{(2)}$ pour $\tau \geq 0$.

Posons

$$Z(t) = X^{(1)}(t) - X^{(2)}(t). \tag{3.19}$$

On voit aisément que $Z(t)$ vérifie l'équation

$$dZ(t) = -AZ(t)dt + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)Z(s)dsdt \tag{3.20}$$

avec la condition initiale

$$Z(-\tau) = \bar{\xi}^{(1)}(\tau) - \bar{\xi}^{(2)}(\tau). \tag{3.21}$$

Comme dans l'équation (3.20) il n'y a plus de perturbation stochastique, on obtient

$$\frac{d}{dt}|\tilde{Z}(t)|^2 = 2\tilde{Z}(t) \cdot \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varphi}(t-s)\tilde{Z}(s)ds - 2\tilde{A}\tilde{Z}(t) \cdot \tilde{Z}(t), \tag{3.22}$$

où $\tilde{Z}(t) = BZ(t)$, tandis que B, $\tilde{A}$, $\tilde{\varphi}(\cdot)$ sont définis comme dans (2.4)–(2.5).

En posant $y_1(t) = \mathbf{E}(|\tilde{Z}(t)|^2)$ et en utilisant les notations a_0 et c_0 introduites dans (2.8), on déduit facilement de (3.22) que

$$y_1{}'(t) \leq \frac{c_0}{a_0} \int_{-\infty}^{t} \|\tilde{\varphi}(t-s)\| y_1(s)ds - a_0 y_1(t).$$

Nous avons déjà démontré que la solution $H(t)$ de l'équation (2.10)

$$H'(t) = \frac{c_0}{a_0} \int_{-\infty}^{t} \|\tilde{\varphi}(t-s)\| H(s)ds - a_0 H(t)$$

converge vers 0 (voir (2.13)). Donc, $y_1(t)$ lui aussi converge vers 0, c'est-à-dire, en rappelant (3.19), on a

$$\mathbf{E}(\,|\tilde{X}^{(1)}(t) - \tilde{X}^{(2)}(t)|^2\,) \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \to \infty,$$

où $\tilde{X}^{(i)}(t) = BX^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2)$ avec une matrice inversible B. Donc on a

$$\mathbf{E}(\,|X^{(1)}(t) - X^{(2)}(t)|^2\,) \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \to \infty. \tag{3.23}$$

Comme

$$\|\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(2)}\|_{H_0}^2 = \int_0^\infty |\xi_t^{(1)}(\tau) - \xi_t^{(2)}(\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau = \int_0^\infty |X^{(1)}(t-\tau) - X^{(2)}(t-\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau,$$

de (3.23) on déduit également

$$\mathbf{E}(\,\|\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(2)}\|_{H_0}^2\,) \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \to \infty. \tag{3.24}$$

D'autre part, comme la variable aléatoire $\bar{Y}^{(i)} = (\bar{\xi}^{(i)}, \bar{X}^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ a la loi qui est une mesure invariante $\mu^{(i)}$, les variables aléatoires $Y^{(i)}(t) = (\xi_t^{(i)}, X^{(i)}(t))$ et $\bar{Y}^{(i)} = (\bar{\xi}^{(i)}, \bar{X}^{(i)})$ ont la même loi $\mu^{(i)}$.

De la sorte, les relations (3.23)–(3.24) impliquent que $\bar{Y}^{(1)}$ et $\bar{Y}^{(2)}$ ont la même loi, c'est-à-dire

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

4. Équation non-linéaire

Considérons maintenant une équation non-linéaire (1.1) pour laquelle les conditions (1.7)–(1.10) sont vérifiées. Pour le comportement asymptotique de cette solution on a le théorème suivant.

Théorème 4.1. *On suppose que la condition* (3.3) *est vérifiée et qu'il existe une suite* $\{D_k, F_k, g_k, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *satisfaisant aux conditions* (1.7)–(1.10)*. On suppose en outre qu'il existe deux constantes* R_0 *et* $L_1 > 0$ *telles que*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(x)^2 \le R_0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n, \tag{4.1}$$

(4.2)
$$\inf_{B\in GL(n)}\Big[\sup_{|x|\ge L_1}\frac{1}{|x|^2}\langle BF(B^{-1}x), x\rangle + \int_0^{\infty}\|B\varphi(\tau)\|\sup_{|x|\ge L_1}\frac{|g(B^{-1}x)|}{|x|}d\tau\Big] < 0,$$

où

$$\|B\varphi(\tau)\| = \|B\varphi(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^l,\mathbf{R}^n)} = \sup_{y\in\mathbf{R}^l,|y|=1}|B\varphi(\tau)y|.$$

Alors pour la solution $X(t)$ *du problème* (1.1)–(1.2) *avec la condition* (1.5) *on a*

$$\mathbf{E}(|X(t)|^2) \le M \qquad \forall t \ge 0 \tag{4.3}$$

avec une constante M*. En outre, il existe une mesure invariante dans l'espace* $H = H_0 \times \mathbf{R}$ *pour l'équation* (1.1) *si sa solution peut être exprimée dans la forme* $Y(t) = \begin{pmatrix}\xi_t\\ X(t)\end{pmatrix}$ *définie de la même manière que dans* (3.4)*.*

Démonstration. En vertu de (4.2) il existe une matrice B et un nombre $\alpha > 0$ tels que

$$\sup_{|x|\ge L_1}\frac{1}{|x|^2}\langle BF(B^{-1}x), x\rangle + \int_0^{\infty}\|B\varphi(\tau)\|d\tau\sup_{|x|\ge L_1}\frac{|g(B^{-1}x)|}{|x|} \le -\alpha. \tag{4.4}$$

Il est évident qu'il existe des fonctions F_0, F_1, g_0, $g_1 \in C^{0,1}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ telles que
(4.5)
$$F = F_0 + F_1, \quad g = g_0 + g_1; \quad F_1(B^{-1}x) = 0, \quad g_1(B^{-1}x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \ge L_1,$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|x|^2}\langle BF_0(B^{-1}x), x\rangle + \int_0^{\infty}\|B\varphi(\tau)\|d\tau\sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|g_0(B^{-1}x)|}{|x|} \le -\alpha \tag{4.6}$$

Soit $X(t)$ la solution du problème (1.1)–(1.2) avec la condition (1.5). On pose

$$\tilde{X}(t) = BX(t). \tag{4.7}$$

En appliquant la formule d'Ito à $|\tilde{X}(t)|^2$, on obtient

$$d(|\tilde{X}(t)|^2) = 2\tilde{X}(t)\cdot BF_0(B^{-1}\tilde{X}(t))dt + 2\tilde{X}(t)\cdot\int_{-\infty}^{t}B\varphi(t-s)g_0(B^{-1}\tilde{X}(s))dsdt +$$

$$+\beta_1(t)dt+\beta_2(t)dt+2\tilde{X}(t)\cdot B\sigma(B^{-1}\tilde{X}(t))dW(t),$$

où

$$\beta_1(t)=2\tilde{X}(t)\cdot BF_1(B^{-1}\tilde{X}(t))+2\tilde{X}(t)\cdot\int_{-\infty}^{t}B\varphi(t-s)g_1(B^{-1}\tilde{X}(s))ds,$$

$$\beta_2(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}B_{ik}\sigma_{kj}(B^{-1}\tilde{X}(t))\Big)^2.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2)=2\mathbf{E}\Big[\tilde{X}(t)\cdot BF_0(B^{-1}\tilde{X}(t))\Big]+ \tag{4.8}$$

$$+2\mathbf{E}\Big[\tilde{X}(t)\cdot\int_{-\infty}^{t}B\varphi(t-s)g_0(B^{-1}\tilde{X}(s))ds\Big]+\mathbf{E}\beta_1(t)+\mathbf{E}\beta_2(t).$$

Comme $F_1(x)$ et $g_1(x)$ sont continues et ont le support compact, il existe une constante R_1 telle que

$$2x\cdot BF_1(B^{-1}x)+2|x|\int_0^\infty\sup_{x'\in\mathbf{R}^n}|B\varphi(\tau)g_1(B^{-1}x')|d\tau\le R_1\qquad\forall x\in\mathbf{R}^n.$$

Donc on a $\beta_1(t)\le R_1$. D'autre part (4.1) implique qu'il existe une constante C_0 telle que $\beta_2(t)\le C_0R_0$. En outre, en posant

$$a_1=-\sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\frac{1}{|x|^2}\langle BF_0(B^{-1}x),x\rangle,$$

$$b_1=\sup_{x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|g_0(B^{-1}x)|}{|x|},\qquad c_1=\int_0^\infty\|B\varphi(\tau)\|d\tau,$$

on a

$$2\mathbf{E}\Big[\tilde{X}(t)\cdot\int_{-\infty}^{t}B\varphi(t-s)g_0(B^{-1}\tilde{X}(s))ds\Big]\le$$

$$\le a_1\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2)+\frac{b_1^2c_1}{a_1}\int_{-\infty}^{t}\|B\varphi(t-s)\|\mathbf{E}(|\tilde{X}(s)|^2)ds.$$

Ainsi, si on pose

$$y(t)=\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2),$$

de (4.8) on obtient

$$y'(t)\le -a_1y(t)+\frac{b_1^2c_1}{a_1}\int_{-\infty}^{t}\|B\varphi(t-s)\|y(s)ds+R_1+C_0R_0. \tag{4.9}$$

Comme en vertu de (4.6) on a

$$a_1-b_1c_1\ge\alpha>0$$

et donc

$$\frac{b_1^2c_1^2}{a_1^2}<1,$$

de manière analogue à la déduction de (2.16) à partir de (2.9) on peut obtenir de (4.9) l'existence d'une constante $\tilde{M}$ telle que

$$\mathbf{E}(|\tilde{X}(t)|^2) = y(t) \leq \tilde{M} \qquad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu de (4.7), on en déduit qu'il existe une constante M telle que l'inégalité (4.3) soit vérifiée.

Quant à l'existence d'une mesure invariante, grâce à la mojoration exponentielle

$$\mathbf{P}\big(\big\{\,\big|\int_t^{t+\varepsilon} \sigma(X(t'))dW(t')\big| \geq \delta\,\big\}\big) \leq 2e^{-\frac{\delta^2}{2\varepsilon R_0}}$$

(voir par exemple [1], p. 162), on peut obtenir l'inégalité

$$\mathbf{P}\big(\big\{\sup_{T\leq t_1<t_2\leq T+1} \frac{\big|\int_{t_1}^{t_2}\sigma(X(t'))dW(t')\big|}{|t_1-t_2|^{1/6}} > \eta\,\big\}\big) \leq C\eta^{-2}$$

avec une constante C. C'est-à-dire, en posant

$$I(\tau) = \int_0^{t-\tau} \sigma(X(t'))dW(t'), \qquad 0 \leq \tau \leq t,$$

on a

$$\mathbf{P}(\{I(\cdot) \in \tilde{A}_\delta^{[t]}\}) \geq 1 - C'\delta^{-2} \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.10}$$

avec une constante C'.

Les lemmes 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.7 peuvent être démontrés même pour l'équation (1.1) avec les conditions du théorème 4.1. D'autre part, pour obtenir une relation analogue au lemme 3.4, il suffit modifier de manière élémentaire l'expression intégrale de $X(t)$. De cette manière, en utilisant (4.10) au lieu du lemme 3.3, on peut démontrer l'existence d'une mesure invariante. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Pitagora Ed., Bologna, 1984.

[2] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Math. Soc. Lecture Note **229**, Cambridge Univ. Press, 1996.

[3] I. Ito, *On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of Volterra type*, Kodai Math. J. **2** (1979), 158–170.

[4] X. Mao, *Stability of stochastic integro-differential equations*, Stoch. Anal. Appl. **18** (2000), 1005–1017.

[5] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. 1934.

Dipartimento di Matematica,
Università di Torino,
via Carlo Alberto, 10, 10123 Torino,
ITALIE
E-mail address: hisao@dm.unito.it