ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 27, Number 3, 2002, pp. 395-405

FORME NORMALE DES SYSTÈMES LINÉAIRES SYMÉTRIQUES ACCESSIBLES ET OBSERVABLES

HOANG HOA TRAI* ET NGUYEN HUYNH PHAN**

À la mémoire de Le Van Thiem

Résumé. Nous présentons une forme normale pour l'action semblable du groupe unitaire sur l'ensemble des systèmes linéaires symétriques accessibles et observables. La construction de cette forme normale est basée sur des matrices d'indices invariantes relatives à une décomposition de strates et sur la forme normale obtenue récemment par N. H. Phan.

Introduction

Soit un groupe topologique G qui agit sur un espace topologique X, c'est-à-dire qu'il y a une application $f : G \times X \to X$, $f(a,x) := g.x$, satisfaissant les deux conditions suivantes: $e.x = x$ et $g_1.(g_2.x) = (g_1g_2).x$, où e est l'unité de G. Par l'action de G on a une relation équivalente sur X définie par: $x \sim y$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$. On en obtient l'espace des orbites X/G.

La terminologie suivante introduite par Birkhoff et Maclane [1] est standard dans la théorie du contrôle

Définition 1 (voir Birkhoff-Maclane [1]). Soit le groupe G agissant sur X. On dit qu'une application $N : X \to X$ est une *forme normale* si:

(i) $x \sim N(x)$,

(ii) $x \sim y$ si et seulement si $N(x) = N(y)$.

$N(x)$ est appellée la *forme normale* de x.

Si N est une application continue, on dit que N est une *forme normale continue.*

Par exemple, pour l'action semblable du groupe linéaire général $GL(n)$ sur l'ensemble de toute matrice carrée d'ordre $n \times n$, la forme normale de Jordan dans l'algèbre linéaire est une forme normale au sens de cette définition, mais elle n'est pas continue.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 93B55.
Key words and phrases. Système linéaire symétrique, forme normale, indice invariante.

Remarquons que si N est une forme normale, elle induit alors une application $\widetilde{N} : X/G \to X$ telle que le schéma suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "N"] \arrow[dr, "P"'] & & X \\ & X/G \arrow[ur, "\widetilde{N}"'] & \end{tikzcd}$$

où P est la projection naturelle et $\widetilde{N}$ transforme la G-orbite de x en x. Naturellement, N est continue si et seulement si $\widetilde{N}$ l'est. Par conséquence, l'existence des formes normales continues sur X pour l'action continue de G a un rapport avec la structure topologique de l'espace des orbites X/G.

L'un des problèmes importants de la théorie des systèmes linéaires est la construction des formes normales que nous examinons dans cet article.

Soit F le corps réel $\mathbb{R}$ ou complex $\mathbb{C}$. On note par

$$\widetilde{L}_{n,m,p}(F) := F^{n\times n} \times F^{n\times m} \times F^{p\times n}$$

l'espace de triplets (A, B, C) des matrices d'ordre $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$ respectivement.

Chaque $(A, B, C) \in \widetilde{L}_{n,m,p}(F)$ définit un système linéaire de dimension n, d'entré m et de sortie p, donné par des équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

Un changement de base T dans l'espace vectoriel d'état F^n définit par $x \to Tx := z$, transforme (1) en le système équivalent

$$(2) \qquad \begin{cases} Tx'(t) &= z'(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) \end{cases}$$

Ces changements induisent une action du groupe linéaire général $GL(n, F)$ qui s'appelle l'action semblable sur $\widetilde{L}_{n,m,p}(F)$ définie par

$$T.(A, B, C) \to (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}).$$

Dans ce cas on dit que (A, B, C) et (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) sont *semblables* par $GL(n, F)$.

Rapellons que le système (1) est dit accessible si le rang de la $n \times nm$-matrice $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ est égal à n et qu'il est observable si

$$\text{rang}\, [C^t, A^tC^t, ..., (A^t)^{n-1}C^t] = n.$$

Dans ce cas le triplet (A, B, C) est appellé respectivement accessible et observable.

On note par $\widetilde{L}^{A}_{n,m,p}(F)$ (resp. $\widetilde{L}^{A,O}_{n,m,p}(F)$) l'espace des systèmes (A, B, C) accessibles (resp. accessibles et observables).

Il est clair qu'ils sont les sous-espaces $GL(n,F)$-invariants de $\widetilde{L}_{n,m,p}(F)$.

Soit l'espace d'état F^n un espace vectoriel hermitien avec un produit scalair donné par $x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$. Un système défini par (1) est dit *symétrique* si A est une matrice symétrique, c'est-à-dire $A^* = A$, où A^* est l'adjointe de A.

On note par:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{n,m,p}(F) &:= \big\{(A,B,C) \in \widetilde{L}_{n,m,p}(F); A^* = A\big\},\\
\widetilde{S}^{A}_{n,m,p}(F) &:= \big\{(A,B,C) \in \widetilde{S}_{n,m,p}(F); \mathrm{rang}[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n\big\}\\
&= \widetilde{S}_{n,m,p}(F) \cap \widetilde{L}^{A}_{n,m,p}(F),\\
\widetilde{S}^{A,O}_{n.m,p} &:= \big\{(A,B,C) \in \widetilde{S}^{A}_{n,m,p}(F); \mathrm{rang}[C^t, AC^t, ..., A^{n-1}C^t] = n\big\}\\
&= \widetilde{S}_{n,m,p}(F) \cap \widetilde{L}^{AO}_{n,m,p}(F).
\end{aligned}$$

Ces espaces sont appellés respectivement l'espace des *systèmes symétriques*, des systèmes *symétriques accessibles* et des systèmes *symétriques accessibles et observables*.

Des changements unitaires dans l'espace vectoriel hermitien F^n induisent une action semblable du groupe unitaire $U(n,F)$ sur $\widetilde{L}_{n,m,p}(F)$, tout en restant l'action de $GL(n,F)$. Alors les trois espaces $\widetilde{S}_{n,m,p}(F)$, $\widetilde{S}^{A}_{n,m,p}(F)$ et $\widetilde{S}^{A,O}_{n,m,p}(F)$ sont les espaces $U(n,F)$-invariants, c'est-à-dire pour tout $S \in U(n,F)$, (A,B,C) appartient à l'un des trois espaces si et seulement si (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}) appartient aussi.

Les formes normales des systèmes linéaires accessibles pour l'action semblable de $GL(n,F)$ sur $\widetilde{L}^{A}_{n,m,p}(F)$ sont étudiées par beaucoup d'auteurs, par example Kalman [10], 1965; Rosenbrock [17], 1974; Popov [16], 1972, Hinrichsen [7] 1987, Helmke [5], 1982, 1986, Hinrichsen et Prozel-Wolters [6, 7, 8], 1986, 1987, 1989.

Les formes normales des systèmes linéaires symétriques accessibles pour l'action semblable de $U(n,F)$ sur $\widetilde{S}^{A}_{n,m,p}$ sont éxaminées par N. H. Phan [12, 13], 1991, [14, 15], 1994.

Ces auteurs ont donné les formes normales des systèmes accessibles en décomposant les espaces ci-dessus en des sous-espaces invariants, sur lesquels ils ont trouvé les formes normales explicites. Cependant, la construction complète des formes normales des systèmes accessibles et observables est encore une question difficile.

Dans cet article nous présentons des formes normales des systèmes linéaires symétriques accessibles et observables pour l'action de $U(n,F)$. Notre méthode est basé sur l'utilisation des matrices d'indices invariantes pour décomposer $\widetilde{S}^{A,O}_{n,m,p}(F)$ en des strates, sur lesquelles nous construisons des formes normales.

Nous procédons comme suit: en utilisant les formes normales des systèmes linéaires symétriques accessibles présentées par N. H. Phan [12] nous introduisons des matrices des indices invariantes et ensuite, nous donnons explicitemant des formes normales.

1. Matrice d'indices invariantes et forme normale

Soit $(A, B, C) \in \widetilde{S}^A_{n,m,p}(F)$ et soit $B = [b_1, b_2, ..., b_m]$, où b_j, $1 \le j \le m$, sont les colonnes de la matrice B. Nous allons de gauche à droite dans le système de nm vecteurs $\{b_1, Ab_1, A^2b_1, ..., A^{n-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, ..., A^{n-1}b_2, ..., b_m, Ab_m, A_2b_m, ..., A^{n-1}b_m\}$. Nous effacons tous les vecteurs qui dépendent linéairement des vecteurs precedents. Par l'accessibilité du triplet (A, B, C), i.e. le rang du système de nm vecteurs ci-dessus est égal à n, les vecteurs restant forment une base de F^n. Ils sont ordonnés ainsi

$$H(A, B) := \{b_1, Ab_1, A^2b_1, ..., A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, ..., A^{k_2-1}b_2, ... \\ ..., b_m, Ab_m, A^2b_m, ..., A^{k_m-1}b_m\}$$

où les k_j sont des nombres entiers non-négatifs et $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j = n$. Si $k_j = 0$, le block correspondant $\{b_j, Ab_j, A^2b_j, ..., A^{k_j-1}b_j\}$ n'apparait pas. On note $k(A, B) = (k_1, k_2, ..., k_m)$. Ces nombres $k_1, k_2, ..., k_m$ sont appelés les indices structuraux de (A, B). Ils sont les $U(n, F)$-invariants, c'est-à-dire $k(A, B) = k(SAS^{-1}, SB)$ pour tout $S \in U(n, F)$.

Soit $K_{n,m} = \{k = (k_1, k_2, ..., k_m) \in Z^m;\ k_j$ entier ≥ 0 et $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j = n\}$.

Alors $k(A, B) \in K_{n,m}$. Maintenant chaque $k \in K_{n,m}$ on pose

$$\widetilde{H}^A(k) = \{(A, B, C) \in \widetilde{S}^A_{n,m,p}(F); k(A, B) = k\}.$$

Dans [12] nous avons monté que la collection $\{\widetilde{H}^A(k); k \in K_{n,m}\}$ est une partition de strates de $\widetilde{S}^A_{n,m,p}(F)$.

Soit $(A, B, C) \in \widetilde{H}^A(k)$ et soit $S(A, B)$ la matrice unitaire obtenue par le procédé d'ortogonalisation de Gram-Schmidt de la matrice $H(A, B)$ désignée comme ci-dessus. On pose

$$(A_k, B_k, C_k) := \big(S(A, B)^{-1}A(S(A, B), S(A, B)^{-1}B, CS(A, B)\big).$$

Le résultat suivant est demontré dans N. H. Phan [12]

2. Théorème (N. H. Phan [12], Th.1.4). *L'application $(A, B, C) \to (A_k, B_k, C_k)$ est une forme normale continue (pour l'action semblable de $U(n, F)$) sur chaque sous-ensemble $\widetilde{H}^A(k)$. En autre, A_k et B_k ont les formes spéciales suivantes:*

$$
(3)\qquad A_k = \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_m \end{bmatrix}, \; B_k = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k_1 \\ \}k_2 \\ \vdots \\ \}k_m \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \dots & * \\ & a_{21} & & \\ \vdots & 0 & \dots & a_{m1} \\ & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}
$$

(4)

$$
N_j = \begin{bmatrix} x_{j1} & a_{2j} & & & \\ a_{j2} & x_{j2} & a_{j3} & & \\ & a_{j3} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{jk_k} \\ & & & a_{jk_j} & x_{jk_j} \end{bmatrix}_{k_j \times k_j}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{j1} & * & \dots & * \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \underset{j-1}{\longleftrightarrow} & 0 & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}_{k_j \times m}
$$

$j = 1, 2, ..., m$. *Les nombres* $a_{j2}, a_{j3}, ..., a_{jk_j}$ *sont des nombres réels positifs;* a_{j1} *est un nombre réel positif si* $k_j > 0$ *et il est zéro si* $k_j = 0$. *Les nombres* $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk_j}$ *sont des nombres réels. Les éléments notés par* $*$ *dans* B_j *sont des nombres de* F. *La matrice* C_k *n'est pas de la forme spéciale.*

Soit $N(k) := k_1 + (k_1 + k_2) + (k_1 + k_2 + k_3) + ... + (k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_{m-1})$. On trouve ainsi que le nombre des paramètres réels indépendants de A_k, de B_k et C_k est égal à $2n + dN(k) + dpn$ où $d = \dim_R F = 1, 2$.

Soit $k \in K_{n,m}$, $k = (k_1, k_2, ..., k_m)$. On note par

$$
\widetilde{H}^{AO}(k) := \{(A, B, C) \in \widetilde{S}^{AO}_{n,m,p}(F); k(A, B) = k\}.
$$

Alors $\widetilde{H}^{AO}(k) = \widetilde{H}^{A}(k) \cap \widetilde{S}^{AO}_{n,m,p}(F)$. Donc la collection $\{\widetilde{H}^{AO}(k); k \in K_{n,m}\}$ est une partition de strates de $\widetilde{S}^{AO}_{n,m,p}(F)$. Soit $(A, B, C) \in \widetilde{H}^{AO}(k)$ et soit (A, B, C) semblable par $U(n, F)$ au triplet (A_k, B_k, C_k) comme dans le Théorème 2. Soit C_k^t la matrice transposée de C_k. Décomposons C_k^t en blocks correspondant à les blocks de

$$
A_k : C_k^t = \begin{bmatrix} C_{k_1} \\ C_{k_2} \\ \vdots \\ C_{k_m} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k_1 \\ \}k_2 \\ \vdots \\ \}k_m \end{matrix}
$$

où C_{k_j} est une $k_j \times p$-matrice.

Comme le rang$[C_k^t, A_k C_k^t, ..., A_k^{n-1} C_k^t] = n$ et comme A_k est une matrice diagonale des blocks: $A_k = \mathrm{diag}[N_1, N_2, ..., N_m]$, on déduit que le rang$[C_k^t, A_k C_k^t, ...,$

$A_k^{n-1}C_k^t] = n$ si et seulement si le rang$[C_{k_j}, N_jC_{k_j}, ..., N_j^{n-1}C_{k_j}] = k_j$, pour tous $j = 1, 2, ..., m$.

Par ailleurs, N_j est une matrice d'ordre $k_j \times k_j$, par le Théorème de Cayley-Hamilton, on a

rang$[C_{k_j}, N_jC_{k_j}, ..., N_j^{n-1}C_{k_j}] =$ rang$[C_{k_j}, N_jC_{k_j}, ..., N_j^{k_j-1}C_{k_j}] = kj$.

En ramassant des resonnements ci-dessus nous obtenons le résultat suivant qui nous aidera de construire des formes normales de $(A, B, C) \in \widetilde{S}^A_{n,m,p}$.

3. Lemme. *Le triplet* $(A, B, C) \in \widetilde{H}^{AO}(k)$ *si et seulement si* (A_k, B_k) *ont des formes* (3), (4) *et le* rang$[C_{k_j}, N_jC_{k_j}, ..., N_j^{k_j-1}C_{k_j}] = k_j$, *c'est-à-dire* $(N_j, C_{k_j}) \in \widetilde{S}^A_{k_j,p}$, *pour tous* $j = 1, 2, ..., m$.

Soit $(A, B, C) \in \widetilde{H}^{AO}(k)$, $k = (k_1, k_2, ..., k_m) \in K_{n,m}$. Comme $(N_j, C_{k_j}) \in \widetilde{S}^A_{k_j,p}$, on peut supposer que les indices structuraux de (N_j, C_{k_j}) sont des formes

$l_j(N_j, C_{k_j}) = (l_{j1}, l_{j2}, ..., l_{jp})$, c'est-à-dire $l_j(N_j, C_{k_j}) \in K_{k_j,p}$.

Désignons par $l_j(A, B, C) = l_j(N_j, C_{k_j})$. Alors pour chaque

$$(A, B, C) \in \widetilde{H}^{AO}(k), \quad k = (k_1, k_2, ..., k_m) \in K_{n,m}$$

on obtient une collection d'indices suivantes

$$l(A, B, C) := \big(l_1(A, B, C), l_2(A, B, C), \ldots, l_m(A, B, C)\big) \in K_{k_1,p} \times K_{k_2,p} \times \cdots \times K_{k_m,p}$$

c'est-à-dire $l_j(A, B, C) = (l_{j1}, l_{j2}, ..., l_{jp})$ et $l_{j1} + l_{j2} + ... + l_{jp} = k_j$ pour tous $j = 1, 2, .., m$.

Désignons par

$$(5) \qquad [k, l] := [k.l](A, B, C) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1p} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \ldots & l_{mp} \end{bmatrix}.$$

Alors $[k, l]$ est une matrice des éléments entiers d'ordre $m \times p$ dans $Z^{m\times p}$ et $(l_{l1}, l_{j2}, ..., l_{jp}) \in K_{k_j,p}$, $j = 1, 2, ..., m$. Clairement

$$[k, l](A, B, C) = [k, l](SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$$

pour tout $S \in U(n, F)$. Une telle matrice $[k, l]$ est dite une *matrice d'indices invariantes.*

On pose

$$[K,L]_{n,m,p} = \Big\{ [k,l] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1p} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mp} \end{bmatrix} \in Z^{m\times p};$$

$$k \in K_{n,m} \quad \text{et} \quad (l_{j1}, l_{j2}, \dots, l_{jp}) \in K_{k_j,p} \Big\}$$

pour tout $j = 1, 2, ..., m$.

Alors $[k,l](A,B,C) \in [K,L]_{n,m,p}$. Maintenant chaque $[k,l] \in [K,L]_{n,m,p}$, on pose

$$\widetilde{H}^{AO}([k,l]) := \big\{ (A,B,C) \in \widetilde{S}^{AO}_{n,m,p}(F); [k,l](A,B,C) = [k,l] \big\}.$$

On a pour chaque $k \in K_{n,m}$ fixé que la collection

$$\big\{ \widetilde{H}^{AO}([k,l]); l = (l_1, l_2, ..., l_m) \in K_{k_1,p} \times K_{k_2,p} \times \cdots \times K_{k_m,p} \big\}$$

est une partition de strates de $\widetilde{H}^{AO}(k)$. Donc la collection $\big\{ \widetilde{H}^{AO}([k,l]); [k,l] \in [K,L]_{n,m,p} \big\}$ est une partition de strates de $\widetilde{S}^{AO}_{n,m,p}(F)$.

Le résultat pricipal de cet article est suivant

4. Théorème. *Soit $[k,l] \in [K,L]_{n,m,p}$ une matrice d'indices. Alors chaque triplet $(A,B,C) \in \widetilde{H}^{AO}([k,l])$ est semblable par $U(n,F)$ à un triplet unique $(\overline{A}_k, \overline{B}_k, \overline{C}_{kl})$ de la forme*

$$\overline{A}_k = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_m \end{bmatrix}, \quad \overline{B}_k = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \\ \vdots \\ \overline{B}_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k_1 \\ \}k_2 \\ \vdots \\ \}k_m \end{matrix}$$

et $\overline{C}_{kl} = [C_{kl_1}, C_{kl_2}, \dots, C_{kl_m}]$ *où*

$$D_j = \begin{bmatrix} d_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{jk_j} \end{bmatrix}_{k_j \times k_j}, \quad C_{kj} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k_j} \\ c_{21} & \dots & C_{2k_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk_j} \end{bmatrix}_{p \times k_j}$$

$$\overline{B}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{j1} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underset{j-1}{\longleftrightarrow} & 0 & h_{jk_j} & * & \cdots * & \end{bmatrix}_{k_j \times m}$$

Les $d_{j1}, d_{j2}, ..., d_{jk_j}$ *sont des nombres réels satisfaisant* $d_{j1} < d_{j2} < ... < d_{jk_j}$. *Les* $h_1, h_2, ..., h_{k_j}$ *sont des nombres différents de zéros dans* F *et ils appartiennent au demi-plan de droite; Les éléments notés par* $*$ *dans* $\overline{B}_j$ *sont des nombres dans* F;

La matrice C_{kj} *satisfait les conditions suivantes:*

- Sa première ligne a exactement l_{j1} *éléments différents de zéros,*

- Sa deuxième ligne a exactement l_{j2} *éléments différents de zéros à des positions différentes de ceux de la première ligne,....,*

- Sa p-ième ligne a exactement l_{jp} *éléments différents de zéros à des positions différentes de ceux des lignes précédentes.*

Par example $n = 6$, $m = 3$, $p = 4$; $k = (2, 1, 3)$;

$l = \big((1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,0,1)\big)$. On a ainsi $[k,l] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors

$$(\overline{A}_k, \overline{B}_k, \overline{C}_{kl}) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} x_{11} & a_{12} & & & & 0 \\ a_{12} & x_{12} & & & & \\ & & x_{21} & & & \\ & & & x_{31} & a_{32} & \\ & & & a_{32} & x_{32} & a_{33} \\ 0 & & & & a_{33} & x_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & * & \vdots \\ \vdots & a_{21} & * \\ \vdots & 0 & a_{31} \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \div & 0 & 0 & 0 & \div & 0 \\ 0 & \div & 0 & \div & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \div & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \div \end{bmatrix} \right)$$

où les éléments notés par $\div$ dans $\overline{C}_{kl}$ sont des nombres différents de zéros dans F.

Le Théorème sera démontré par les résultats suivants

5. Lemme. *Les valeurs propres des matrices* N_j (4), $j = 1, 2, ..., m$, *sont deux à deux différentes.*

Preuve. En effet, soit $b = [1, 0, .., 0]^t \in F^{k_j \times 1}$ une k_j-matrice de colonne, alors la paire (N_j, b) est k_j-accessible, c'est-à-dire rang$[b, N_j b, N_j^2 b, ..., N_j^{k_j - 1} b] = k_j$. Comme N_j est une matrice symétrique, il existe $S_j \in U(k_j, F)$ telle que $S_j N_j S_j^{-1}$ est une matrice diagonale:

$S_j N_j S_j^{-1} = \mathrm{diag}[d_1, d_2, ..., d_{k_j}] := N_0$. Soit $S_j b = [h_1, h_2, ..., h_{k_j}]^t := b_0$. Il est clair que la pair (N_0, b_0) est k_j-accessible aussi, c'est-à-dire le

rang$[b_0, N_j b_0, N_0^2 b_0, ..., N_0^{k_j - 1} b_0] = k_j$. Donc

$$0 \neq \det[b_0, N_j b_0, N_0^2 b_0, ..., N_0^{k_j-1} b_0] = \det \begin{bmatrix} h_1 & d_1 h_1 & \dots & d_1^{k_j-1} h_1 \\ h_2 & d_2 h_2 & \dots & d_2^{k_j-1} h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k_j} & d_{k_j} h_{k_j} & \dots & d_{k_j}^{k_j-1} h_{k_j} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_{k_j} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 1 & d_1 & \dots & d_1^{k_j-1} \\ 1 & d_2 & \dots & d_2^{k_j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{k_j} & \dots & d_{k_j}^{k_j-1} \end{bmatrix}.$$

La deuxième partie est un déterminant de Van der Monde. Donc tous les d_t, $t = 1, 2, ..., k_j$ sont deux à deux différents. En plus, tous les h_t, $t = 1, 2, ..., k_j$, sont différents des zéros. Le Lemme est prouvé.

6. Corollaire. *Soit $(A, B, C) \in \widetilde{H}^A(k)$, $k = (k_1, k_2, ..., k_m)$. Alors (A, B, C) est semblable par $U(n, F)$ à un triplet unique (A_0, B_0, C_0) de la forme*

$$A_0 = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_m \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k_1 \\ \}k_2 \\ \vdots \\ \}k_m \end{matrix}$$

$$D_j = \begin{bmatrix} d_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{jk_j} \end{bmatrix}_{k_j \times k_j}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{j1} & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underset{j-1}{\longleftrightarrow} & 0 & h_j k_j & * & \dots & * \end{bmatrix}_{k_j \times m}$$

où $d_{j1}, d_{j2}, ..., d_{jk_j}$ sont des nombres réels satisfaisant $d_{j1} < d_{j2} < .... < d_{jk_j}$ et $h_1, h_2, ..., h_{k_j}$ sont des nombres différents de zéros dans F et ils appartienent au demi-plan de droite.

Preuve. Par le Théorème 2 et par le Lemme 5, (A, B, C) est semblable par $U(n, F)$ à un triplet de la forme (A_0, B_0, C_0). Par ailleurs, comme les nombres réels $d_{j1}, d_{j2}, ..., d_{jk_j}$ sont deux à deux différents, on peut ordonner $d_{j1} < d_{j2} < .... < d_{jk_j}$. Ensuite comme les nombres $h_1, h_2, ..., h_{k_j}$ sont différents de zéros, on peut définir le signe de h_t, $t = 1, 2, ..., k_j$, en posant

$$\mathrm{sig} h_t = \begin{cases} \mathrm{sigRe} h_t & \text{si } \mathrm{Re} h_t \neq 0 \text{ (la partie reele de } h_t \text{ est differente de zero)} \\ \mathrm{sigIm} h_t & \text{si } \mathrm{Re} h_t = 0 \text{ et } \mathrm{Im} h_t \neq 0 \\ & \quad \text{(la partie imaginaire de } h_t \text{ est differente de zero)} \end{cases}$$

Alors le nombre $h_t' := (\mathrm{sig} h_t) h_t$ appartient au demi-plan de droite.

On pose $S_j := \mathrm{diag}[\mathrm{sig}h_1, \mathrm{sig}h_2, ..., \mathrm{sig}h_{k_j}]$, alors S_j est une $k_j \times k_j$-matrice unitaire, en plus $S_j D_j S_j^{-1} = D_j$ et $S_j B_j$ satisfait les conditions du Corollaire 5.

Maitenant on prouve que A_0 et B_0 sont uniques. En effet, si (A_0, B_0) et (A_0', B_0') sont les même formes et si (A_0', B_0') et (A_0, B_0) sont semblables, c'est-à-dire $(A_0', B_0') = (SA_0S^{-1}, SB_0)$ pour une $S \in U(n, F)$, on va démonter que $S = I_n$ (la matrice d'unité). Mais cela peut faire directement. Le Corrollaire est prouvé.

La démonstration du Lemme suivant nous permetera de finir la preuve du Théorème 4.

7. Lemme. *Soit* $A = \mathrm{diag}[a_1, a_2, ..., a_n]$ *une matrice diagonale avec les* a_i, $i = 1, 2, ..., n$, *sont deux à deux différents et soit* $C \in F^{p\times n}$ *une matrice d'ordre* $p \times n$. *Alors les indices structuraux* $l(A, C) = (l_1, l_2, ..., l_p)$ *si et seulement si* C *satisfait les conditions suivantes:*

- La première ligne de C *a exactement* l_1 *éléments différents de zéros,*

- La deuxième ligne de C *a exactement* l_2 *éléments différents de zéros à des positions différentes de ceux de la première ligne,..... ,*

- La p-ième ligne de C *a exactement* l_p *éléments différents de zéros à des positions différenctes de ceux des lignes précédentes.*

Preuve. Soit c_v, $v = 1, 2, ..., p$, la v-isème ligne de C. Comme c_v a exactement l_v éléments différents de zéros,

$$\mathrm{rang}\{c_v^t, Ac_v^t, A^2c_v^t, ..., A^{n-1}c_v^t\} = \mathrm{rang}\ \{c_v^t, Ac_v^t, A^2c_v^t, ..., A^{l_v-1}c_v^t\}.$$

Donc $l_v(A, C) \le l_v$ pour tous $v = 1, 2, ..., p$. Par ailleurs, les éléments différents de zéros de c_v placent à des positions différentes de ceux des lignes $c_1, c_2, ..., c_{v-1}$, dons les vecteurs $c_v^t, Ac_v^t, A^2c_v^t, ..., A^{n-1}c_v^t$ n'appartiennent pas au sous-space vectoriel engendré par

$$\{c_1^t, Ac_1^t, A^2c_1^t, .., A^{l_1-1}c_1^t, c_2^t, Ac_2^t, A^2c_2^t, .., A^{l_2-1}c_2^t, ...$$
$$..., c_{v-1}^t, Ac_{v-1}^t, A^2c_{v-1}^t, .., A^{l_{v-1}-1}c_{v-1}^t\}.$$

Par conséquence $l_v(A, C) = l_v$, $v = 1, 2, ..., p$. Le Lemme est prouvé.

La preuve du Théorème 4 est complète .

Bibliographie

[1] G. Bikhoff and Maclane, *A survey of modern algebra*, Macmillan, New-York, 1979.

[2] H. Glusing-Luerben and D. Hinrichsen, *A Jordan control canonical form for singular systems*, Int. J. Control **48** (5) (1988), 1769-1785.

[3] M. Hazewinkel, *Moduli and canonical forms for linear dynamical systems II, The topological case*, Math. Systems Theory **10** (1976-1977), 363-385.

[4] M. Hazewinkel, *Moduli and canonical forms for linear dynamical systems III: The algebraic geometry case, in Lie Groups*: History frontiers and Applications, Vol 7 (eds. C. Martin and R. Hermann) 291-336, Math. Sci. Press, 1977.

[5] U. Helmke, *Zur topologie des Raumes linearer Kontrollsysteme*, Ph. D. Thesis, University Bremen, 1982.

[6] D. Hinrichsen and D. Pratzel-Wolters, *Jordan echelon forms for linear state and input transformation*, Proc. 25th Conference on decision an Control, Athens, 1986.

[7] D. Hinrichsen, *Metrical and topological aspects of linear control theory.* Syst. Anal. Madel. Simul. **4** (1) (1987), 3-36.

[8] D. Hinrichsen and D. Pratzel-Wolters, *A Jordan canonical form for reachable linear systems. Linear algebra and its applications*, 122/123/124/, 489-524, 1989.

[9] D. Hinrichen, D. Salomon, A. J. Pritchard et al...., *Introduction to mathematical system theory*, Lecture for a joint course at the Universities of Warwick and Bremen, 1983.

[10] R. E. Kalman, *Irreducible realizations and the degree of the rational matrix*, SIAM J. Control **13** (1965), 520-544.

[11] R. E. Kalman and P. l. Arbib and Falb, *Topics in Mathematical system Theory*, McGraw-Hill, 1976.

[12] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable symmetric linear systems*, Lecture Notes in Mathematics, **1474** (1991), 135-253.

[13] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable skew-symmetric hamiltonnian linear systems*, Rendiconti di Mathematica, serie 7, Vol 11, Roma, 541-558, 1991.

[14] Nguyen Huynh Phan, *La relation d'homotopie entre l'espace des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles et l'espace des systèmes linéaires accessibles*, Bulletin des Sciences Mathématiques **118** (1994), 325-341.

[15] Nguyen Huynh Phan, *Sur la topologie de l'espace des systèmes linéaires Hamiltoniens antsymétriques accessibles*, Annales de l'Institut Fourier **44** (1994), 967-985.

[16] V. M. Popov, *Invariant description of linear, time-invariant controllable*, SIAM J. Control **10** (1972), 252-264.

[17] H. H. Rosenbrock, *State Space and Multivariable Theory (London: Nelson)*, Int. J. Control **20** (1974), 191.

* Le Lycée special de Lê Khiet,
Quang Ngai, Vietnam

** École Normale de Quang Binh,
Dong Hoi, Quang Binh, Vietnam.

E-mail address: nghphancdspqb@ hn.vnn.vn