ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 27, Number 3, 2002, pp. 365-373

L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DE L'ESPACE DES SYSTÈMES LINÉAIRES SYMÉTRIQUES ACCESSIBLES

NGUYEN HUYNH PHAN* ET HOANG HOA TRAI**

À la mémoire de Le Van Thiem

Résumé. Nous avons démontré dans cet article que l'anneau de cohomologie de la variété $S_{n,m}(F)$ de tout système linéaire symétrique accessible de dimension n et d'entrée m avec les coefficients dans le corps réel ou complex F est isomorphe au sous-anneau σ_n-invariant $(H^*(P^{m-1}(F)\times P^{m-1}(F)\times\cdots\times P^{m-1}(F);G))^{\sigma_n}$ où l'action du groupe symétrique σ_n est induite par les permutations des n facteurs du produit de descartes $P^{m-1}(F)\times P^{m-1}(F)\times\cdots\times P^{m-1}(F)$ des n espaces projectifs de dimention $m-1$.

Introduction

Soit F le corps réel $\mathbb{R}$ ou complex $\mathbb{C}$. Un système linéaire de dimension n et d'entrée m donné par l'équation d'états

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

où A, B sont des matrices dans $F^{n\times n}$ et $F^{n\times m}$ respectivement.

La solution de (1) avec la condition initiale $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t a^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

exprime que le contrôle $u(s)$ transfère le système de l'état initial 0 à l'instant 0 en l'état final $x(t)$ à l'instant t.

Le système (1) est dit *accessible* si quel que soit $x \in F^n$ il existe un instant $t \geq 0$ et un contrôle $u(s)$ tel que

$$x = x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 93B55, 55 N10.

Key words and phrases. Système linéaire symétrique accessible, anneau de cohomologie, fibré principal, fibré induit, immersion.

Kalman [10] a donné un critère algébrique de l'accessibilité comme suivant: *Le système* (1) *est accessible si et seulment si le rang de la* $n \times nm$- *matrice* $[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$ *est égal à* n. Dans ce cas la paire (A, B) est dite accessible.

Supposons maintenant que l'espace d'état F^n est munit une forme hermitienne

$$\langle x.y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i; \quad x, y \in F^n.$$

Le système (1) est dit *symétrique* si $A = A^*$, où A^* est l'adjointe de A.

On désigne par $S_{n,m}(F)$ *l'espace des systèmes linéaires symétriques accessibles.*

Soit $U(n, F)$ le groupe unitaire. Un changement de base hermitienne dans l'espace unitaire F^n donné par $Tx(t) \to y(t)$; $T \in U(n, F)$ transforme (1) en l'équation équivalente

$$Tx'(t) = y'(t) = TAT^{-1}Tx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}y(t) + TBu(t). \tag{2}$$

Il est claire que (1) est symétrique (resp. accessible) si et seulement si (2) est symétrique (resp. accessible) aussi.

Ces transformations unitaires induisent une action analytique, qui s'appelle l'action semblable, du groupe unitaire $U(n, F)$ sur l'ensemble $\widetilde{S}_{n,m}(F)$ de toute paire (A, B) symétrique accessible:

$$\widetilde{S}_{n,m}(F) = \big\{(A, B) \in F^{n\times n} \times F^{n\times m}; \mathrm{rang}[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] = n \text{ et } \\ A = A^*\big\},$$

$U(n, F)$ agit $T.(A, B) \to (TAT^{-1}, TB)$.

On constate que toute paire (A, B) semblable détermine le même système donné par (1). En raison de cela, $S_{n,m}(F)$ est identifié à l'espace des orbites $\widetilde{S}_{n,m}(F)/U(n, F)$.

La topologie de $S_{n,m}(F)$ est étudiée pour la première fois dans [14] (1990), [12] (1991), [13] (1991), et dévelopée dans [15] (1994) et [16] (1994). Nous avons démontré que $S_{n,m}(F)$ est une variété analytique réelle de dimension $2n + dn(m - 1)$; $d = \dim_R F = 1, 2$ et que la projection naturele

$$\pi : S_{n,m}(F) \to S_{n,m}(F) \equiv \widetilde{S}_{n,m}(F)/U(n, F)$$

est un fibré principal de groupe structural $U(n, F)$. Nous avons déterminé complètement le goupe d'homologie de $S_{n,m}(F)$; il est isomorphe à celui de la Grassmannienne $G_{n,n+m-1}(F)$ de tout espace vertoriel de dimension n dans F^{n+m-1} ([12], Th.3.10):

$$H_*(S_{n,m}(F), G) \cong H_*(G_{n,n+m-1}(F), G)$$

où l'anneau des coefficients

$$G = \begin{cases} Z & \text{si} \quad F = C \\ Z_2 & \text{si} \quad F = R. \end{cases}$$

Toutefois, la structure de l'anneau de cohomologie de $S_{n,m}(F)$ est encore une question ouverte. Le but de cet article est de résoudre ce problème ouvert. Pour cela, tout d'arbord nous immeregons le produit de Descartes $P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F)$ des n espaces projectifs $P^{m-1}(F)$ de dimension $m-1$ dans $S_{n,m}(F)$, ensuite nous immeregons $S_{n,m}(F)$ dans la Grassmannienne $G_{n,n(m+1)}(F)$, enfin, nous calculons l'anneau de cohomologie de $S_{n,m}(F)$ en utilisant ceux de $P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F)$ et de $G_{n,n(m+1)}(F)$.

Cet article comporte deux paragraphes. Dans la première paragraphe nous contruisons les immersions indiquées au-dessus. A la deuxième paragraphe nous présentons les fibres induites par ces immersions et en les utilisant nous déterminons l'anneau de cohomologie de $S_{n,m}(F)$.

1. Les immersions

$$\text{Soit} \quad B = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \in F^{n\times m}; \;\; b^j \in F^{1\times m}; \;\; j = 1, 2, \ldots, n \text{ une matrice.}$$

Fixons la matrice diagonale $\mathbf{A} = \mathrm{diag}[1, 2, \ldots\ldots, n] \in F^{n\times n}$. On trouve que le rang $[B, \mathbf{A}B, \mathbf{A}^2B, ..., \mathbf{A}^{n-1}B] = n$, cela dit que la paire $(\mathbf{A}, B)$ est accessible, si et seulement si tous les n vecteurs lignes b^j de la matrice B sont différents de vecteurs zéros.

Soit $\mathbf{S}^{m-1}$ la sphère de dimension $m-1$ dans F^m et soit $p : \mathbf{S}^{m-1} \to P^{m-1}(F)$ l'application quotion sur l'espace projectif $P^{m-1}(F)$ donnée par $p(b) = [b] := \{b, -b\}$. On sait que p est un fibré pricipal de groupe structural $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Nous considérons l'immersion

$$\widetilde{J} : (\mathbf{S}^{m-1})^n = \mathbf{S}^{m-1} \times \mathbf{S}^{m-1} \times \cdots \times \mathbf{S}^{m-1} \to \widetilde{S}_{n,m}(F)$$

donnée par

$$(b^1, b^2, \ldots., b^n) \to \left(\mathbf{A}, \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}\right).$$

Alors $\widetilde{J}$ induit une application de fibré qui forme le schéma commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \ldots.. \times \mathbf{Z}_2 & \xrightarrow{i} & U(n, F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{S}^{m-1} \times \mathbf{S}^{m-1} \times \ldots \times \mathbf{S}^{m-1} & \xrightarrow{\widetilde{J}} & \widetilde{S}_{n,m}(F) \\
p \times p \times \ldots \times p \;\downarrow & & \downarrow \; \pi \\
P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \ldots \times P^{m-1}(F) & \xrightarrow{J} & S_{n,m}(F),
\end{array}$$

où l'inclusion naturelle i donnée par

$$(\pm 1, \dots, \pm 1) \to \operatorname{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1] \in U(n, F),$$

$$J : ([b^1], [b^2], ..., [b^n]) \to \Big[\Big(\mathbf{A}, \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}\Big)\Big];$$

où $[(A, B)]$ est la notation de la $U(n, F)$-orbite de (A, B) dans $S_{n,m}(F)$. J est dite l'immersion de Helmke-Brynes qui l'étudient dans [8] (une immersion analogue a été bordée dans [14], Lemme 3.3; 1990).

Soit $K : S_{n,m}(F) \to G_{n,n(m+1)}(F)$ l'immersion de Kalman qui transfère l'orbite $[(A, B)]$ dans $S_{n,m}(F)$ en le sous-espace vectoriel de dimesion n dans $F^{n(m+1)}$ engendré par n lignes de la $(n \times nm)$-matrice $[B, AB, ..., A^{n-1}B, A^nB]$.

On en obtient le schéma commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F) & \xrightarrow{J} & S_{n,m}(F) \\ \varphi = K_0 J \quad \searrow & & \swarrow \quad K \\ & G_{n,n(m+1)}(F). & \end{array}$$

D'où on a le schèma commutatif des anneaux de cohomologie

$$\begin{array}{ccc} H^*(S_{n,m}(F); G) & \xrightarrow{J^*} & H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F); G) \\ K^* \quad \nwarrow & & \nearrow \quad \varphi^* = J^*{}_0 K^* \\ & H^*(G_{n,n(m+1)}(F); G); & \end{array} \tag{1.1}$$

$$G = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{si} \quad F = C \\ \mathbf{Z}_2 & \text{si} \quad F = R. \end{cases}$$

Soit σ_n le groupe symétrique de tous les permutations des n éléments. Désignons par $(H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F); G))^{\sigma_n}$ le sous-anneau σ_n- invariant de $H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F); G)$ où l'action de σ_n induite par les permutations des n facteurs du produit de Descartes $P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F)$.

Le résultat pricipal de cet article est suivant

1.1. Thèorème.

$$J^* : H^*(S_{n,m}(F); G) \to \big(H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F); G)\big)^{\sigma_n}$$

est un isormorphisme d'anneau.

La démonstration de ce Théorème sera présentée dans la suite.

2. Les fibres induites et la démonstration du Théorème 1.1

Soit $\mathcal{J}_{n,m}(F)$ l'espace fibré vectoriel sur $S_{n,m}(F)$ induit par le $U(n,F)$-fibré pricipal $\pi : \widetilde{S}_{n,m}(F) \to S_{n,m}(F)$ dont la fibré à l'orbite $[(A,B)] \in S_{n,m}(F)$ est l'espace vectoriel de dimension n engendré par les colonnes de $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$.

Soit $\gamma_{n,n(m+1)}(F)$ la fibre vertorielle universelle de dimension n sur la Grassmannienne $G_{n,n(m+1)}(F)$. On a

2.1. Lemme

a) $\mathcal{J}_{n,m}(F) \cong K^+\big(\gamma_{n,n(m+1)}(F)\big)$, *où* $K^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$ *est la fibré image réciproque de* $\gamma_{n,n(m+1)}(F)$ *induite par l'immersion de Kalman* K.

b) $J^+(\mathcal{J}_{n,m}(F)) = \varphi^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F)) \cong$

$$\cong pr_1{}^+(\gamma_{1,m}(F)) \oplus pr_2{}^+(\gamma_{1,m}(F)) \oplus ..... \oplus pr_n{}^+(\gamma_{1,m}(F)),$$

où $J^+(\mathcal{J}_{n,m}(F))$ *et* $\varphi^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$ *sont les fibrés images réciproques induites par les immersions* J *et* φ*; La somme derière est la somme de Whitney des fibres images réciproques* $pr_i{}^+(\gamma_{1,m}(F))$ *de* $\gamma_{1,m}(F)$ *induites par les* r_i *- ième projections naturelles,* $i = 1, 2, ..., n$*;* $pr_i : P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F) \to P^{m-1}(F)$*;* $([b^1], .., [b^i], .., [b^n]) \to [b^i]$.

Preuve. a) En effet, K est une application fibré pricipale, cela dit qu'il y a le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(n,F) & \xrightarrow{i} & GL(n,F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{S}_{n,m}(F) & \xrightarrow{\widetilde{K}} & V_{n,n(m+1)}(F) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ S_{n,m}(F) & \xrightarrow{K} & G_{n,n(m+1)}(F), \end{array}$$

où $V_{n,n(m+1)}(F)$ est la variété de Stiefel de tout n-repère dans $F^{n(m+1)}$ et transfère (A,B) en le n - repère engendré par n lignes de $[B, AB, ..., A^{n-1}B, AB^n]$.

Comme l'espace fibré de $K^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$ est l'ensemble de toute paire $(s,v) \in \widetilde{S}_{n,m}(F) \times V_{n,n(m+1)}(F)$ tel que $\widetilde{K}(s) = \pi(v)$, on obtient $\mathcal{J}_{n,m}(F) \cong K^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$. La partie a) est prouvé

b) En verdu de la partie a) on a

$$J^+(\mathcal{J}_{n,m}(F)) = J^+K^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F)) = \varphi^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F)).$$

Par ailleur, $\varphi^+(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$ est une fibre vectorielle sur $P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times .... \times P^{m-1}(F)$, on en déduit que $J^+(\mathcal{J}_{n,m}(F))$ est isormorphe à la somme de

Whitney

$$pr_1{}^+(\gamma_{1,m}(F)) \oplus pr_2{}^+(\gamma_{1,m}(F)) \oplus ... \oplus pr_n{}^+(\gamma_{1,m}(F)).$$

Le Lemme est prouvé.

2.2. La démonstration du Théorème 1.1

Nous rappellons tout d'abord quelques résultats concernant à l'anneau de cohomologie de la Grassmannienne $G_{n,n+m-1}(F)$ qu'on trouvera en détail dans le livre de Milnor et Stalsheff [11] et dans la Thèse de R. Thom [17] et dans les articles de S. Chern [3] et de C. Ehresmann [5].

Soit $w_{kd} := w_{2k}(\gamma_{n,n(m+1)}(C)) \in H^{kd}(G_{n,n(m+1)}(F); G)$; $d = \dim_R F = 1, 2$; $k = 1, 2, ..., n$, la classe de cohomologie de Stiefel-Whitney-Chern universelle kd - ième de la fibre vectorielle universelle $\gamma_{n,n+m-1}(F)$ sur la Grassmannienne $G_{n,n+m-1}(F)$ (voir Milnor-Stalsheff [12]). Soit $G[w_d, w_{2d}, ..., w_{nd}]$ l'agèbre polynôme engendré par $w_d, w_{2d}, ..., w_{nd}$. Soit $w = 1+w_d+w_{2d}+....+w_{nd}$ la classe de Stiefel-Whitney-Chern totale de $\gamma_{n,n+m-1}(F)$ et soit $\overline{w} = 1 + \overline{w}_2 + \cdots + \overline{w}_{2n}$ la classe duale définie par la relation $w\overline{w} = 1$. Désignons par $I(n, n+m-1)$ l'idéal dans $G[w_d, w_{2d}, ..., w_{nd}]$ engendré par $\overline{w}_{2(1+m-1)}, \overline{w}_{2(2+m-1)}, \ldots, \overline{w}_{2(n+m-1)}$. Alors (voir [12]) on a l'isomorphisme:

$$H^*(G_{n,n+m-1}(F); G) \cong G[w_d, w_{2d}, .., w_{nd}]/I(n, n + m - 1).$$

En particulier, si = 1 $G_{1,m}(F)$ est l'espace projectif de dimension $m - 1$; $G_{1,m}(F) = P^{m-1}(F)$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} H^*(P^{m-1}(R); Z_2) &\cong Z_2[w_1]/(w_1{}^m = 0); \quad w_1 \in H^1(P^{m-1}(R); Z_2) \text{ et} \\ H^*(P^{m-1}(C); Z) &\cong Z[w_2]/(w_2^m = 0); \quad w_2 \in H^2(P^{m-1}(C); Z). \end{aligned}$$

Soit $x_{id} = 1 \otimes .... \otimes 1 \otimes w_d \otimes 1 \otimes ... \otimes 1$, $i = 1, 2, ..., n$; w_d apparaite à la i-ième place. En appliquant la forme de Kunneth on obtient

$$\begin{aligned} &H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times ... \times P^{m-1}(F); G)) \\ &\cong (H^*(P^{m-1}(F); G) \otimes .... \otimes H^*(P^{m-1}(F); G)) \\ &\cong \begin{cases} Z_2[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^m = x_2^m = \cdots = x_n^m = 0) & \text{si } F = R \\ Z[x_2, \ldots, x_{2n}]/(x_2^m = x_4^m = \cdots = x_{2n}^m = 0 & \text{si } F = C. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le q-ième groupe de cohomologie $(H^q(P^{m-1}(F)\times P^{m-1}(F)\times\cdots\times P^{m-1}(F); G))^{\sigma_n}$ est engendré par les monômes symétriques standardes de degrée q. Autrement dit, si on pose

$$Y_{n,m} := \left\{t = (t_1, ..., t_n) \in Z^n; 0 \le t_n \le .... \le t_1 \le m - 1\right\}$$

et pose $|t| := t_1 + ... + t_n$ on obtient

$$(H^q(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F); G)^{\sigma_n} \cong G^{b_q}$$

où $b_q = \text{card}\left\{t \in Y_{n,m}; |t| = q\right\}$. Donc par [13], Th. 3.10, on a les isomorphismes des groupes de cohomologie suivants

$$\begin{aligned} H^q(S_{n,m}(F);G) &\cong H^q(G_{n,n+m-1}(F);G) \\ &\cong (H^q(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F));G)^{\sigma_n} \end{aligned}$$

pour tous $0 \leq q \leq dn(m-1)$; $d = \dim_R F = 1, 2$.

Regardons maintenant le schéma (1.1). Comme

$$\dim_G H^*(S_{n,m};G) = \dim_G (H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F);G))^{\sigma_n}$$

alors si on démontre que

$$\text{Im}\varphi^* = (H^{**}(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F));G)^{\sigma_n},$$

on déduit que

$$\text{Im}J^* = (H^{**}(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F));G)^{\sigma_n},$$

c'est-à-dire que J^* est surjective, donc c'est un isomorphisme. Pour cela, d'après Grothendieck, on calcule φ^* sur les classes de Stiefel-Whitney-Chern universelles de cohomologie $w_{kd}(\gamma_{n,n(m+1)}(F))$, $k = 1, 2, ..., n$, de la fibre universelle $\gamma_{n,n(m+1)}(F)$ sur la Grassmannienne $G_{n,n(m+1)}(F)$.

On regarde le cas complex; $F = C$. Pour le cas réel la démonstration est analogue. Soit

$$w_{2k} := w_{2k}(\gamma_{n,n(m+1)}(C)) \in H^{2k}(G_{n,n(m+1)}(C);G)$$

la $2k$-ième classe universelle de Chern de la fibre $\gamma_{n,n(m+1)}(C)$. On aura par le Lemme 1.1.b que

$$\varphi^* : H^*(G_{n,n(m+1)}(C);Z) \to H^*(P^{m-1}(C) \times P^{m-1}(C) \times .... \times P^{m-1}(C);Z)$$

définite par

$$\begin{aligned} \varphi^*(w_{2k}) &= w_{2k}(J^+(\mathcal{J}_{n,m}(C)) \\ &= w_{2k}(\varphi^+(\gamma_{n,n(m+1)}(C))) \\ &= \sum_{1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_q \leq n} w_2(pr^+_{i_{i_1}}(\gamma_{1,m}(C))w_2(pr^+_{i_{i_2}}(\gamma_{1,m}(C)) \cdots w_2(pr^+_{i_q}(\gamma_{1,m}(C)) \\ &= \sum_{1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_q \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_q} \end{aligned}$$

Donc $\varphi^*(w_{2k})$ est un polynôme symétrique élémentaire de degrée $2k$, alors

$$\varphi^*(w_{2k}) \in (H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F);G)^{\sigma_n}$$

pour tous $k = 1, 2, ..., n$, c'est-à-dire

$$\text{Im}\varphi^* \subseteq (H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F));G)^{\sigma_n}.$$

Inversement, comme $(H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F));G)^{\sigma_n}$ engendré par les polynômes symétriques invariants pour l'action de permutation de σ_n

et chaque de ces polynômes est un polynôme en les polynômiens symétriques élémentaires, donc

$$\mathrm{Im}\varphi^* = (H^*(P^{m-1}(F) \times P^{m-1}(F) \times \cdots \times P^{m-1}(F)), G)^{\sigma_n}.$$

Le théorème est prouvé.

Remarque. Malgré les groupes de cohomologie de $S_{n,m}(F)$ et de $G_{n,n+m-1}(F)$ sont isomorphismes mais par le Théorème 1.1 leurs anneaux de cohomologie ne sont pas égaux. Toutefois, quand m tent vers infinitif; $m \to \infty$, on sait

$$H^*(P^\infty(R); Z_2) \cong Z_2[w_1] \quad \text{et} \quad H^*(P^\infty(C); Z) \cong Z[w_2],$$

donc (voir Milnor-Stalsheff [12],7)

$$\begin{aligned}(H^*(P^\infty(F) \times P^\infty(F) \times \cdots \times P^\infty(F); G)^{\sigma_n} &\cong (H^*(G_{n,\infty}(F); G)) \\ &\cong \begin{cases} Z_2[x_1, x_2, \ldots, x_n] & \text{si } F = R \\ Z[x_2, x_4, \ldots, x_{2n}] & \text{si } F = C \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $H^*(S_{n,m}(F); G))$ est isomorphe à $H^*(G_{n,n+m-1}(F); G))$ quand $m \to \infty$.

Bibliographie

[1] A. Borel, *La cohomologie mod2 de certains espaces homogènes*, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 165-197.

[2] C. I. Byrnes and N. E. Hurt, *The moduli of linear dynamical systems*, Adv. in Math. Suppl. Series **4** (1978), 83-122.

[3] S. Chern, *On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle*, Ann. of Math. **49** (1948), 362-372.

[4] D. F. Delchamps, *The geometry of the space of linear systems with an application to the indentification problem*, PhD. Thesis. Harvard University, 1972.

[5] C. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Ann. of Math. **35** (1934), 396-443.

[6] M. Hazewinkel, *(Fine) Moduli (Space) for linear dynamical systems II: The topology cace*, math. systems theory, 10, 77, 363-385. 1976.

[7] U. Helmke, *Zur Topologie der Raumes linearer kontrollsysteme*, PhD. Thesis, Universitat Bremen. Forschungsschwerpunk dynamiche Systeme, Report 100, 1983.

[8] U. Helmke and C. Byrnes, *The cohomology of the moduli space of controllable linear systems*, Acta appalicandae Mathematicae **28** (1992), 161-188.

[9] D. Hinrichen, D. Salomon, A. J. Pritchard et al..., *Introduction to mathematical system theory*, Lecture for a joint course at the Universities of Warwick and Bremen, 1983.

[10] R. E. Kalman and P. L. Arbib and Falb, *Topics in Mathematical system Theory*, McGraw-Hill, 1976.

[11] J. W. Milnor and J. D. Stalsheff, *Characteristic Classes*, Ann. of Math. Princeton, 1974.

[12] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable symmetric linear systems*, Lecture notes in Mathematics, Vol. 1474, 135-253, S. Jackowski and B. Oliver and K. Pawalowski Eds, 1991.

[13] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable skew-symmetric hamiltonnian linear systems*, Rendiconti di Mathematica, serie 7, Vol 11, Roma, 541-558, 1991.

[14] Nguyen Huynh Phan and Le Chi Dung, *On the topology of the space of reachable observable symmetric linear systems*, Universitat Bremen, Forschungsschwerpunk Dynamiche Systeme, Report 233, 1990.

[15] Nguyen Huynh Phan, *La relation d'homotopie entre l'espace des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles et l'espace des systèmes linéaires accessibles*, Bulletin des sciences Mathématiques, No 118, 325-341, 1994.

[16] Nguyen Huynh Phan, *Sur la topologie de l'espace des systèmes linéaires hamiltoniens antisymétriques accessibles*, Annles de l'Institut Fourier, Tom 44, Fascule 13, 967-985, 1994.

[17] R. Thom, *Espaces fibrés en sphères et carés de Steenrod*, Thèse, présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, Soutenue le 13 octobre 1951. Paris Gauthier-Villars imprimeur-éditeur, Libraire du Bureau de Longitudes de L'Ecole Polytechnique.

∗ École Normale de Quang Binh,
Dong Hoi Quang Binh, Viet Nam.

E-mail address: nghphancdspqb@.hn.vnn.vn

∗∗ Le Lycée special de Lê Khiet,
Quang Ngai, Vietnam