ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 26, Number 2, 2001, pp. 147-168

EQUATIONS STOCHASTIQUES D'UN GAZ VISQUEUX ISOTHERME DANS UN DOMAINE MONODIMENSIONNEL INFINI

HISAO FUJITA YASHIMA

Abstract. Nous étudions l'équation stochastique pour un gaz visqueux isotherme dans le domaine $]-\infty,+\infty[$ sous une force potentielle telle que la masse totale du gaz en équilibre soit finie. Nous y considérons deux types de perturbation stochastique: celle donnée par rapport aux points matériels représentés par les coordonnées lagrangiennes et celle donnée par rapport aux positions représentées par les coordonnées eulériennes. L'existence et l'unicité de la solution globale sont démontrées pour tous les deux cas, en s'appuyant sur des estimations *a priori* dans les coordonnées lagrangiennes ainsi que celles dans les coordonnées eulériennes.

1. Introduction

Dans ce qui suit nous allons envisager l'équation stochastique d'un gaz visqueux isotherme dans le domaine $]-\infty,+\infty[$, considérant le mouvement du gaz soumis à une force dérivant d'un potentiel ainsi qu'à une perturbation stochastique; dans cette étude nous supposons que le potentiel $\Phi(x)$ satisfait à la condition $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi(x)}dx < \infty$, de sorte que le gaz aura une masse finie dans le domaine $]-\infty,+\infty[$. Le but du présent mémoire est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation stochastique dans le cas d'une perturbation stochastique donnée par rapport aux coordonnées lagrangiennes et dans le cas d'une perturbation stochastique donnée par rapport aux coordonnées eulériennes.

Quant aux équations stochastiques pour le gaz visqueux en général, nous rappelons d'abord que, pour l'équation dans un domaine monodimensionnel borné $D=]a,b[$ avec une perturbation stochastique donnée par un processus de Wiener défini par rapport aux coordonnées lagrangiennes, le théorème d'existence et d'unicité a été démontré dans [9]. D'autre part un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation stochastique d'un gaz visqueux dans un domaine bi–dimensionnel, avec la viscosité donnée comme fonction particulière de la densité, a été obtenu dans [8]. Nous renvoyons les considérations générales sur les équations d'un gaz visqueux à [1], [2].

Dans le présent travail nous envisageons l'équation stochastique

$$(1.1)_A \qquad \varrho dv = [-\varrho v\partial_x v + \mu\partial_x\partial_x v - \partial_x\varrho - \varrho\partial_x\Phi]dt + \varrho d(G\circ\xi)$$

Received January 27, 2000.
Key words and phrases. équation stochastique, gaz visqueux.

et l'équation stochastique

$$\varrho dv = [-\varrho v\partial_x v + \mu\partial_x\partial_x v - \partial_x\varrho - \varrho\partial_x\Phi]dt + \varrho dH, \tag{1.1$_B$}$$

où μ est une constante positive et

$$(G\circ\xi)(x,t) = G(\xi(x,t),t), \qquad \xi(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(x',t)dx';$$

$(1.1)_A$ comme $(1.1)_B$ doit être accouplée avec

$$\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho v) = 0. \tag{1.2}$$

Dans $(1.1)_A$–(1.2) ainsi que dans $(1.1)_B$–(1.2), v et ϱ désignent respectivement la vitesse et la densité du gaz; $(1.1)_A$ comme $(1.1)_B$ est l'équation du mouvement, où, le gaz étant supposé isotherme, la pression est considérée proportionnelle au gradient de la densité; (1.2) est l'équation de continuité. Le système d'équations $(1.1)_A$–(1.2) comme $(1.1)_B$–(1.2) est à considérer avec les conditions initiales

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad \varrho(x,0) = \varrho_0(x). \tag{1.3}$$

Dans $(1.1)_A$ la perturbation stochastique est donnée par le processus stochastique G à valeurs dans un espace fonctionnel défini sur l'intervalle $0 < \xi < 1$ des coordonnées lagrangiennes ξ. Ça signifie que la perturbation est donnée directement par rapport aux points matériels du gaz représentés par les coordonnées lagrangiennes ξ et non par rapport aux points x de l'espace $]-\infty,+\infty[$. D'autre part, dans $(1.1)_B$ la perturbation stochastique est donnée par le processus stochastique H à valeurs dans un espace fonctionnel défini sur le domaine $]-\infty,+\infty[$ des variables x qui représentent la position dans l'espace physique dans lequel nous considérons le mouvement du gaz. (Les espaces fonctionnels qu'on vient de mentionner seront précisés dans l'énoncé du théorème 2.1 et celui du théorème 2.2.) La perturbation dans $(1.1)_A$ pourrait être interprétée comme perturbation d'origine interne dans le gaz, tandis que celle dans $(1.1)_B$ pourra être des bruits provenant de l'extérieur du gaz. Il mériterait également de remarquer que, du point de vue mathématique, le traitement de la perturbation due à H dans $(1.1)_B$ requiert la combinaison d'estimations dans les coordonnées eulériennes et de celles dans les coordonnées lagrangiennes, ce qui, à notre avis, constitue un des points d'intérêt considerable du présent travail.

Maintenant nous précisons les coordonnées lagrangiennes massiques que nous allons utiliser dans la suite. Comme, grâce à l'hypothèse

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi(x)}dx < \infty, \tag{1.4}$$

la densité aura l'intégrale finie dans $]-\infty,+\infty[$, nous convenons de normaliser l'unité de masse de telle sorte que la masse totale du gaz sur $]-\infty,+\infty[$ soit égale à 1, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_0(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x,t)dx = 1 \quad \forall t > 0; \tag{1.5}$$

la première égalité dans (1.5) est due à la conservation de masse et donc à (1.2). Les coordonnées lagrangiennes massiques $(\xi, t) \in \,]0,1[\times\mathbb{R}_+$ sont par définition liées aux coordonnées eulériennes $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ par les relations

$$\begin{aligned} x(\xi,t) &= x_0(\xi) + \int_0^t v(x(\xi,t'),t')dt', \\ x_0(\xi) &= \xi_0^{-1}(\xi), \quad \xi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho_0(x')dx'; \end{aligned} \tag{1.6}$$

en vertu de (1.2), il en résultera

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \varrho(x',t)dx'. \tag{1.6)bis}$$

Au moyen de ces coordonnées lagrangiennes massiques $(\xi,t) \in \,]0,1[\times\mathbb{R}_+$, on peut transformer les équations $(1.1)_A$, $(1.1)_B$ et (1.2) en

$$dv = [\mu\partial_\xi(\varrho\partial_\xi v) - \partial_\xi\varrho - (\partial_x\Phi)\circ x]dt + dG, \tag{1.7$_A$}$$

$$dv = [\mu\partial_\xi(\varrho\partial_\xi v) - \partial_\xi\varrho - (\partial_x\Phi)\circ x]dt + d(H\circ x), \tag{1.7$_B$}$$

$$\partial_t\varrho + \varrho^2\partial_\xi v = 0, \tag{1.8}$$

$(\partial_x\Phi)\circ x$ et $H\circ x$ désignant des fonctions composées. Nous renvoyons à [1] les détails sur les coordonnées lagrangiennes massiques et la transformation relative des équations. Il est évident que les équations $(1.1)_A$, $(1.1)_B$ et (1.2) équivaudront à $(1.7)_A$, $(1.7)_B$ et (1.8) respectivement. Les conditions (1.3) peuvent être transformées d'une manière triviale en des expressions relatives aux coordonnées lagrangiennes, qu'on notera $(1.3)_L$.

Nos problèmes peuvent être résumés comme suit:

(A): étant données v_0, ϱ_0 et G, trouver un couple (v,ϱ) de variables aléatoires satisfaisant à $(1.1)_A$, (1.2) et (1.3), ou, ce qui revient au même, à $(1.7)_A$, (1.8) et $(1.3)_L$,

(B): étant données v_0, ϱ_0 et H, trouver un couple (v,ϱ) de variables aléatoires satisfaisant à $(1.1)_B$, (1.2) et (1.3), ou, ce qui revient au même, à $(1.7)_B$, (1.8) et $(1.3)_L$;

v et ϱ devront être cherchées dans un cadre fonctionnel convenable à préciser.

Il est important de rappeler la densité en état d'équilibre représentée par la fonction

$$\tilde{\varrho}_{eq}(x) = \frac{e^{-\Phi(x)}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi(x')}dx'}; \tag{1.9}$$

on voit aisément que $\tilde{\varrho}_{eq}$ vérifie l'équation d'équilibre $\partial_x\tilde{\varrho}_{eq} + \tilde{\varrho}_{eq}\partial_x\Phi = 0$ et qu'on a $\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varrho}_{eq}(x)dx = 1$. Pour les coordonnées lagrangiennes, on définit d'une manière naturelle la fonction ϱ_{eq} par la relation

$$\varrho_{eq}(\xi) = \tilde{\varrho}_{eq}(x_{eq}(\xi)), \tag{1.10}$$

où $x_{eq}(\xi) \in \mathbb{R}$ est déterminé par la relation

$$\int_{-\infty}^{x_{eq}(\xi)} \varrho_{eq}(x')dx' = \xi. \tag{1.11}$$

Comme on verra dans la suite, la fonction $\varrho_{eq}(\xi)$ introduite ci–dessus jouera le rôle de référence pour les fonctions $\varrho(\xi,t)$ représentant la densité à l'instant t. En d'autres termes, on considérera l'évolution de la distribution de densité du gaz dans la classe de fonctions de densité “comparables” avec celle d'équilibre donnée dans (1.9).

2. Résultats

Pour énoncer les résultats, nous avons besoin de préciser le cadre fonctionnel, dans lequel nous cherchons la solution. En utilisant les coordonnées lagrangiennes massiques $(\xi,t) \in]0,1[\times\mathbb{R}_+$, on introduit les normes

$$\|u\|^2_{V^0} = \|u\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{2.1}$$

$$\|u\|^2_{V^1} = \|\sqrt{\varrho_{eq}}\,\partial_\xi u\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{2.2}$$

$$\|u\|^2_{V^2} = \|\partial_\xi(\varrho_{eq}\partial_\xi u)\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{2.3}$$

et on définit les espaces V^m $(m = 0,1,2)$ comme l'adhérence de $C_0^\infty(]0,1[)$ par rapport à la topologie déterminée par la norme $\|\cdot\|_{V^m}$

$$V^m = \overline{C_0^\infty(]0,1[)}^{\|\cdot\|_{V^m}}. \tag{2.4}$$

Nous supposons que la fonction $\varrho_{eq}(\xi)$ est telle que l'immersion de V^1 dans V^0 comme celle de V^2 dans V^1 soit compacte. C'est le cas, par exemple, si

$$\varrho_{eq}(\xi) \geq c\,\min(\xi^\alpha,\,(1-\xi)^\alpha) \qquad (\alpha < 2)$$

(voir par exemple [6]). En réalité, c'est une conséquence de l'hypothèse (2.5) imposée ci-dessous et on constatera par des calculs élémentaires (utilisant (1.9)–(1.11)) qu'elle est compatible avec la condition (2.6), qu'on va imposer sur $\varrho_{eq}(\xi)$.

Pour les fonctions Φ et ϱ_{eq} on supose en effet, outre (1.4), que

$$\Phi \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x \Phi(x)| < \infty, \tag{2.5}$$

$$\partial_\xi \varrho_{eq} \in L^2(0,1). \tag{2.6}$$

Pour le problème (A) on a le

Théorèm 2.1. *On suppose que les fonctions Φ et ϱ_{eq} satisfont aux conditions citées ci-dessus et que G est une martingale continue définie sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ à valeurs dans V^2 telle que $G_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$. Si T est un nombre positif et si (v_0, ϱ_0) est une variable aléatoire à valeurs dans $V^1 \times L^\infty(0,1)$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$ et vérifiant les conditions*

$$0 < \inf_{0<\xi<1} \frac{\varrho_0(\xi)}{\varrho_{eq}(\xi)} \le \sup_{0<\xi<1} \frac{\varrho_0(\xi)}{\varrho_{eq}(\xi)} < \infty \quad \mathbb{P}-p.s., \tag{2.7}$$

$$\partial_\xi \frac{\varrho_0(\xi)}{\varrho_{eq}(\xi)} \in L^2(0,1) \qquad \mathbb{P}-p.s., \tag{2.8}$$

alors il existe une variable aléatoire (v, ϱ) à valeurs dans

$$(L^\infty(0,T;V^1) \cap L^2(0,T;V^2)) \times L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$$

et une seule (à une modification près) qui est solution du problème (A) $\mathbb{P}-p.s.$ *et telle que ϱ satisfasse aux conditions*

$$0 < \inf_{0<\xi<1, 0<t\le T} \frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_{eq}(\xi)} \le \sup_{0<\xi<1, 0<t\le T} \frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_{eq}(\xi)} < \infty \qquad \mathbb{P}-p.s., \tag{2.9}$$

$$\partial_\xi \frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_{eq}(\xi)} \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \qquad \mathbb{P}-p.s.. \tag{2.10}$$

Comme les estimations *a priori* qu'on va démontrer ne dépendent pas de la norme de $G(\cdot,t)$ dans V^2, on peut bien espérer prouver l'existence d'une solution sous l'hypothèse que G soit une martingale continue à valeurs dans V^1. Mais pour construire d'une manière élémentaire la solution locale en considérant l'inconnue $u = v - G$ au lieu de v, il est commode de supposer que G soit à valeurs dans V^2. Pour cela, dans ce travail nous nous contentons de prouver l'existence et l'unicité de la solution sous l'hypothèse que G soit à valeurs dans V^2, en renvoyant à des prochains travaux l'étude du cas où G est à valeurs dans V^1.

On remarque d'autre part que, dans le cas où $G = (G_t)_t$ est un processus de Wiener vérifiant les conditions

$$\mathbb{E}((G_t - G_s, e_k)(G_t - G_s, e_m)) = |t-s|\delta_{km}\alpha_k,$$

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = 1,$$

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \alpha_k < \infty,$$

où $\{e_k\}$ est une base orthonormale de V^0 telle que

$$-\partial_\xi \varrho_{eq} \partial_\xi e_k = \lambda_k e_k,$$

quelques expressions dans l'estimation des intégrales stochastiques seront simplifiées.

Pour le problème (B), on a le

Théorèm 2.2. *On suppose que les fonctions Φ et ϱ_{eq} satisfont aux conditions citées ci-dessus et que H est une martingale continue définie sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}) \cap \big\{h | \frac{1}{\sqrt{\tilde{\varrho}_{eq}}} \partial_x \partial_x h \in L^2(\mathbb{R})\big\}$ telle que $H_0 = 0$ $\mathbb{P}-$p.s.. Si T est un nombre positif et si (v_0, ϱ_0) est une variable aléatoire à valeurs dans $V^1 \times L^\infty(0,1)$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_0$ et vérifiant les conditions* (2.7)–(2.8)*, alors il existe une variable aléatoire (v, ϱ) à valeurs dans $(L^\infty(0,T; V^1) \cap L^2(0,T; V^2)) \times L^\infty(]0,1[\times]0,T[)$ et une seule (à une modification près) qui est solution du problème* (B) *$\mathbb{P}-$p.s. et telle que ϱ satisfasse aux conditions* (2.9)–(2.10).

Comme pour le Théorème 2.1, les estimations *a priori* qu'on va établir dans la démonstration du Théorème 2.2 ne dépendent que de la norme de $H(\cdot, t)$ dans $H^1(\mathbb{R})$ et donc il est légitime de conjecturer l'existence de la solution sous l'hypothèse que H soit à valeurs dans H^1. Mais dans ce travail nous supposons que H est à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}) \cap \big\{h | \frac{1}{\sqrt{\tilde{\varrho}_{eq}}} \partial_x \partial_x h \in L^2(\mathbb{R})\big\}$ pour garantir une construction élémentaire de la solution locale $(u = v - H, \varrho)$.

Pour démontrer les Théorèmes 2.1 et 2.2, nous introduisons des restrictions graduelles aux conditions posées dans l'énoncé des théorèmes sur la variable aléatoire (v_0, ϱ_0) et les martingales G et H, de telle sorte que les solutions obtenues sous ces restrictions reconstruisent, lorsque les restrictions seront graduellement levées, la solution désirée sans ces restrictions.

Plus précisément, on va démontrer les Théorèmes 2.1 et 2.2 sous les conditions supplémentaires

$$0 < m_0 \leq \frac{\varrho_0(\xi)}{\varrho_{eq}(\xi)} \leq M_0 < \infty \quad \forall \xi \in]0,1[\quad \mathbb{P} - \text{p.s.}, \tag{2.11}$$

$$\|v_0\|_{V^1}^2 + \Theta(0) + \Big\| \partial_\xi \frac{\varrho_0(\xi)}{\varrho_{eq}(\xi)} \Big\|_{L^2}^2 \leq Q < \infty \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}, \tag{2.12}$$

$$\Gamma_a(t) = \| << G >>_t \|_{L^\infty(\Omega; \mathcal{L}^1((V^1)'; V^1))} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.13}$$

$$\Gamma_b(t) = \| << H >>_t \|_{L^\infty(\Omega; \mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))'; H^1(\mathbb{R})))} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.14}$$

où

$$\Theta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varrho}_{eq}(x) \Big[\frac{\varrho_0(x)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} \log \Big(\frac{\varrho_0(x)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} \Big) - \frac{\varrho_0(x)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} + 1 \Big] dx, \tag{2.15}$$

tandis que $<< G >>$ et $<< H >>$ désignent les processus croissants associés de G et de H à valeurs dans $\mathcal{L}^1((V^1)'; V^1)$ et $\mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))'; H^1(\mathbb{R}))$ respectivement.

Pour reconstruire la solution que les théorèmes exigent sans poser les conditions supplémentaires (2.11)–(2.14), il suffit de considérer des suites $\{m_0^{(k)}\}$, $\{M_0^{(k)}\}$, $\{Q^{(k)}\}$ de nombres réels telles que $m_0^{(k)} > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ et que

$$m_0^{(k)} \to 0, \quad M_0^{(k)} \to \infty, \quad Q^{(k)} \to \infty \qquad \text{pour} \ \ k \to \infty$$

et les sous-ensembles $\Omega^{(k)}$ de Ω constitués par les éléments ω tels que $(v_0(\omega), \varrho_0(\omega))$ vérifie (2.11)–(2.12) avec $m_0 = m_0^{(k)}$, $M_0 = M_0^{(k)}$, $Q = Q^{(k)}$, de poser

$$(v_0^{(k)}, \varrho_0^{(k)})(\omega) = \begin{cases} (v_0, \varrho_0)(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega^{(k)} \\ (0, \varrho_{eq}) & \text{si } \omega \notin \Omega^{(k)} \end{cases}$$

et de considérer en outre des suites $\{T_a^{(k)}\}$ et $\{T_b^{(k)}\}$ de temps d'arrêt telles que

$$T_a^{(k)} \to \infty, \quad T_b^{(k)} \to \infty \quad \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \text{pour} \ \ k \to \infty$$

et que, en posant

$$G_t^{(k)} = \begin{cases} G_{t \wedge T_a^{(k)}} & \text{si } \omega \in \Omega^{(k)} \\ \ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega^{(k)}, \end{cases}$$

$$H_t^{(k)} = \begin{cases} H_{t \wedge T_b^{(k)}} & \text{si } \omega \in \Omega^{(k)} \\ \ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega^{(k)}, \end{cases}$$

on ait

$$\Gamma_a^{(k)}(t) = \big\| << G^{(k)} >>_t \big\|_{L^\infty(\Omega; \mathcal{L}^1((V^1)'; V^1))} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$
$$\Gamma_b^{(k)}(t) = \big\| << H^{(k)} >>_t \big\|_{L^\infty(\Omega; \mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))'; H^1(\mathbb{R})))} < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Il est évident que, quand k tend vers l'infini, les solutions des problèmes (A) et (B) avec les données $(v_0^{(k)}, \varrho_0^{(k)})$, $G^{(k)}$, $H^{(k)}$ décrites ci-dessus reconstruiront $\mathbb{P}$–p.s. la solution des problèmes (A) et (B) avec les données (v_0, ϱ_0), G, H indiquées dans l'énoncé des Théorèmes 2.1 et 2.2.

Pour la raison qu'on vient d'illustrer, dans la suite nous démontrerons les Théorèmes 2.1 et 2.2 sous les conditions supplémentaires (2.11)–(2.14).

On va démontrer d'abord le Théorème 2.1; la démonstration, articulée en plusieurs étapes, sera exposée dans les sections 3–6. Le Théorème 2.2 sera démontré dans la section 7. Certaines étapes de la démonstration du Théorème 2.2 sont analogues à celles de la démonstration du Théorème 2.1, mais l'estimation des intégrales stochastiques présente des aspects différents et mérite surement d'être examinée attentivement.

Pour les traitements des martingales à valeurs dans un espace de Hilbert, de leurs processus croissants associés et des intégrales stochastiques par rapport à elles, on se réfère à [3], [4], [5], [7] (en particulier à [7], qui offre des expositions plus détaillées).

3. Estimation d'énergie

Dans la démonstration du Théorème 2.1 on utilise principalement les coordonnées lagrangiennes $(\xi, t) \in]0,1[\times\mathbb{R}_+$. Pour cela, d'ici jusqu'à la fin de la section 6, sauf mention explicite du contraire, les produits scalaires et les espaces fonctionnels (et leurs normes) sont à considérer par rapport aux coordonnées lagrangiennes.

On a le

Lemme 3.1. *Si* (v, ϱ) *est solution du problème* (A), *alors on a*

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}\Big(\max_{0\leq t\leq T}\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2}\Big) + \frac{\mu}{2}\mathbb{E}\int_0^T \|\sqrt{\varrho}\,\partial_\xi v\|^2_{L^2}dt \leq N_a(T), \tag{3.1}$$

où

$$N_a(T) = 9\Gamma_a(T) + 2\mathbb{E}\Theta(0) + \mathbb{E}(\|v_0\|^2_{L^2}). \tag{3.2}$$

Démonstration. On multiplie les deux membres de $(1.7)_A$ par v et l'intègre par rapport à ξ, de sorte que l'on obtient

$$(v, dv) + \Big[\mu\int_0^1 \varrho(\partial_\xi v)^2 d\xi + \int_0^1 v(\partial_\xi\varrho + (\partial_x\Phi)\circ x)d\xi\Big]dt = (v, dG). \tag{3.3}$$

On examine en premier lieu l'intégrale

$$\int_0^1 v(\partial_\xi\varrho + (\partial_x\Phi)\circ x)d\xi \equiv I_1.$$

En l'exprimant dans les coordonnées eulériennes (x, t) et en posant

$$C_\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi(x)}dx,$$

on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varrho v(\partial_x \log\varrho + \partial_x(\Phi + \log C_\Phi))dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x(\varrho v))(\log\varrho + \Phi + \log C_\Phi)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t \varrho) \log \frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varrho}_{eq} \Big[\partial_t \Big(\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} \Big) \Big] \log \frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \Big[\tilde{\varrho}_{eq} \Big(\frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} \log \frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} - \frac{\varrho}{\tilde{\varrho}_{eq}} + 1 \Big) \Big] dx = \frac{d}{dt} \Theta(t),
\end{aligned}
$$

où

$$
\Theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varrho}_{eq}(x) \Big[\frac{\varrho(x,t)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} \log \Big(\frac{\varrho(x,t)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} \Big) - \frac{\varrho(x,t)}{\tilde{\varrho}_{eq}(x)} + 1 \Big] dx. \tag{3.4}
$$

On a donc

$$
\int_0^t \int_0^1 v(\partial_\xi \varrho + (\partial_x \Phi) \circ x) d\xi dt' = \Theta(t) - \Theta(0). \tag{3.5}
$$

D'autre part, en vertu de la formule d'Ito on a

$$
\frac{1}{2} \big[\|v(t)\|_{L^2}^2 - \|v_0\|_{L^2}^2 \big] = \int_0^t (v, dv) + \frac{1}{2} \int_0^t \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^0} d << G >>, \tag{3.6}
$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^0}$ est la fonctionnelle sur $\mathcal{L}^1((V^1)'; V^1)$ déterminée par la relation

$$
\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^0} (g \otimes h) = (g, h)_{V^0} = \int_0^1 g(\xi) h(\xi) d\xi
$$

($g \otimes h$ comme élément de $\mathcal{L}^1((V^1)'; V^1)$ est défini par $\langle g \otimes h, u' \rangle = \langle h, u' \rangle g$ pour $u' \in (V^1)'$); pour la dernière intégrale du second membre de (3.6) on a évidemment

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_0^t \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^0} d << G >> &= \mathbb{E} \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^0} << G >>_t \\
&\leq \Gamma_a(t) \leq \Gamma_a(T) \quad (0 < t \leq T).
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Finalement, en vertu de l'inégalité de Doob on a

$$\begin{aligned}
(3.8)\qquad \mathbb{E}\Big(\max_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t (v,dG)\Big|\Big) &\le \Big[\mathbb{E}\Big(\max_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t (v,dG)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2} \\
&\le 2\Big[\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^T (v,dG)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2} \\
&= 2\Big[\mathbb{E}\Big(\int_0^T \|v\|_{L^2}^2 \langle\cdot,\cdot\rangle_{V^0} d << G >>\Big)\Big]^{1/2} \\
&\le 2\big[\mathbb{E}\big(\max_{0\le t\le T}\|v\|_{L^2}^2\big)\big]^{1/2}(\Gamma_a(T))^{1/2} \\
&\le \frac{1}{4}\mathbb{E}\big(\max_{0\le t\le T}\|v\|_{L^2}^2\big) + 4\Gamma_a(T).
\end{aligned}$$

En adjoignant les relations (3.3), (3.5)–(3.8) et en tenant compte que $\Theta(t) \ge 0$ (voir (3.4)), on obtient (3.1). □

4. Estimations *a priori* de la densité

Dans cette section nous allons établir des estimations *a priori* concernant la densité ϱ. Pour ces estimations et leurs conséquences, on introduit un temps d'arrêt τ_R donné par

$$(4.1)\qquad \tau_R(\omega) = \inf\{t > 0 \,|\, \|v(\omega;\cdot,t)\|_{L^2} + \|G(\omega;\cdot,t)\|_{L^2} > R\},$$

R étant un nombre positif.

On a alors le

Lemme 4.1. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (A)*, alors il existe deux constantes positives* $\tilde{m} = \tilde{m}(R)$ *et* $\tilde{M} = \tilde{M}(R)$ *telles que*

$$(4.2)\qquad 0 < \tilde{m} \le \frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_{eq}(\xi)} \le \tilde{M} < \infty \quad \forall(\xi,t) \in]0,1[\times[0,T\wedge\tau_R] \quad \mathbb{P}-p.s..$$

Démonstration. On pose

$$(4.3)\qquad J(\xi,t) = \frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_0(\xi)}\cdot$$

Alors en vertu de (1.8) on a

$$\partial_t \log J + \varrho\partial_\xi v = 0$$

ou encore

$$(4.4)\qquad \log J = -\int_0^t \varrho\partial_\xi v dt'.$$

Or, de l'équation $(1.7)_A$ on déduit que

$$\varrho(\xi,t)\partial_\xi v(\xi,t)dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\xi (dv - dG)d\xi' + \frac{1}{\mu}\Big[\varrho(\xi,t) + \int_0^\xi ((\partial_x\Phi)\circ x)(\xi',t)d\xi'\Big]dt;$$

en le substituant dans (4.4) on obtient

$$\log J(\xi,t) + \frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt' \tag{4.5}$$

$$= -\frac{1}{\mu}\int_0^\xi (v(\xi',t) - v_0(\xi') - G(\xi',t))d\xi' - \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^\xi ((\partial_x\Phi)\circ x)(\xi',t')d\xi'dt'.$$

On déduit de (4.5) que

$$\partial_t \exp\Big[\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt'\Big] \tag{4.6}$$

$$= \frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\exp\Big[-\frac{1}{\mu}\int_0^\xi (v(\xi',t) - v_0(\xi') - G(\xi',t))d\xi' - \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^\xi ((\partial_x\Phi)\circ x)d\xi'dt'\Big].$$

Or, en vertu de la définition de τ_R on a pour $0 \le t \le T\wedge\tau_R$

$$\Big|\int_0^\xi (v(\xi',t) - v_0(\xi') - G(\xi'))d\xi'\Big| \le R + \|v_0\|_{L^2};$$

d'autre part l'hypothèse (2.5) sur $|\partial_x\Phi|$ entraîne banalement l'inégalité

$$\int_0^t\int_0^\xi |(\partial_x\Phi)\circ x|d\xi'dt' \le ct$$

avec une constante c. Par conséquent, il résulte de (4.6) que

$$\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\exp\big(-\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + ct)\big) \le \partial_t \exp\Big[\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt'\Big]$$

$$\le \frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\exp\big(\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + ct)\big), \tag{4.7}$$

d'où on obtient aussi

$$1 \le \exp\Big[\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt'\Big] \le 1 + \frac{t}{\mu}\varrho_0(\xi)\exp\big(\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + ct)\big). \tag{4.8}$$

Comme

$$\frac{\mu\partial_t \exp\Big[\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt'\Big]}{\varrho_0(\xi)\exp\Big[\frac{1}{\mu}\varrho_0(\xi)\int_0^t J(\xi,t')dt'\Big]} = J(\xi,t),$$

on déduit de (4.7)–(4.8) que

$$J(\xi, t\wedge\tau_R) \le \exp\big(\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + c(t\wedge\tau_R))\big), \tag{4.9}$$

$$J(\xi, t\wedge\tau_R) \ge \frac{\exp\big(-\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + c(t\wedge\tau_R))\big)}{1 + \frac{t\wedge\tau_R}{\mu}\varrho_0(\xi)\exp\big(\frac{1}{\mu}(R + \|v_0\|_{L^2} + c(t\wedge\tau_R))\big)}. \tag{4.10}$$

Les inégalités (4.9)–(4.10), jointes à (2.11) et (4.3), entraînent (4.2) avec deux constantes positives $\tilde{m} = \tilde{m}(R)$ et $\tilde{M} = \tilde{M}(R)$. □

Une conséquence immédiate du Lemme 3.1 et du Lemme 4.1 est le

Lemme 4.2. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (A)*, alors on a*

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R} \big\|\sqrt{\varrho_{eq}}\,\partial_\xi v\big\|_{L^2}^2 dt \le N_2 = \frac{2}{\mu}N_a(T)\tilde{M}. \tag{4.11}$$

On va maintenant démontrer le

Lemme 4.3. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (A)*, alors il existe une constante* $N_3 = N_3(R)$ *telle que*

$$\max_{0\le t\le T\wedge\tau_R}\Big\|\partial_\xi\frac{\varrho(\cdot,t)}{\varrho_{eq}(\cdot)}\Big\|_{L^2} \le N_3 \qquad \mathbb{P}-p.s.. \tag{4.12}$$

Démonstration. En dérivant (4.5) par rapport à ξ, on a

$$\partial_\xi J(\xi,t) = -\frac{1}{\mu}J(\xi,t)\varrho_0(\xi)\int_0^t \partial_\xi J(\xi,t')dt' + g(\xi,t) \tag{4.13}$$

avec

$$g(\xi,t) = -\frac{1}{\mu}J(\xi,t)(\partial_\xi\varrho_0(\xi))\int_0^t J(\xi,t')dt'$$
$$-\frac{1}{\mu}J(\xi,t)(v(\xi,t)-v_0(\xi)-G(\xi,t))$$
$$-\frac{1}{\mu}J(\xi,t)\int_0^t((\partial_x\Phi)\circ x)(\xi,t')dt'.$$

On remarque qu'en vertu du Lemme 4.1 et de la condition (2.5) on a

$$|g(\xi,t)| \le c_1(|\partial_\xi\varrho_0(\xi)| + |v(\xi,t')| + |G(\xi,t')| + |v_0(\xi)| + 1)$$

avec une constante c_1 et que $\frac{1}{\mu}J(\xi,t)\varrho_0(\xi) > 0$. Cela étant, en considérant (4.13) comme une équation différentielle ordinaire pour la fonction

$$y(t) = \int_0^t \partial_\xi J(\xi,t')dt',$$

on obtient pour $0 < t \le T\wedge\tau_R$

$$\Big|\int_0^t \partial_\xi J(\xi,t')dt'\Big| \le c_1\int_0^t(|\partial_\xi\varrho_0(\xi)| + |v(\xi,t')| + |G(\xi,t')| + |v_0(\xi)| + 1)dt'.$$

De (4.13) et des majorations de $|g(\xi,t)|$ et de $\left|\int_0^t \partial_\xi J(\xi,t')dt'\right|$ s'obtient aisément (voir aussi (2.12), (4.1), (4.2)) l'inégalité

$$\|\partial_\xi J(\cdot,t)\|_{L^2} \le c_2(\|\partial_\xi\varrho_0\|_{L^2} + 1) \qquad (0 < t \le T\wedge\tau_R)$$

avec une constante convenable c_2. Comme

$$\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}} = \big(\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_0}\big)\frac{\varrho_0}{\varrho_{eq}} + \frac{\varrho}{\varrho_0}\big(\partial_\xi\frac{\varrho_0}{\varrho_{eq}}\big), \quad \partial_\xi\varrho_0 = \varrho_{eq}\partial_\xi\frac{\varrho_0}{\varrho_{eq}} + \frac{\varrho_0}{\varrho_{eq}}\partial_\xi\varrho_{eq},$$

compte tenu également de (2.11)–(2.12), on obtient (4.12). □

5. Estimations a priori pour les dérivées de v

Même dans cette section on va utiliser le temps d'arrêt τ_R défini dans (4.1).

Pour les dérivées de v on a le

Lemme 5.1. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (A), *alors il existe une constante* $N_4 = N_4(R)$ *telle que*

$$\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\tau_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|_{L^2}^2\Big) + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R}\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\|_{L^2}^2 dt \le N_4. \tag{5.1}$$

Démonstration. En multipliant l'équation $(1.7)_A$ par $\partial_\xi \varrho_{eq}\partial_\xi v$ et en l'intégrant par rapport à ξ et à t, on obtient

$$(5.2)\qquad \int_0^{t\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v)+\mu\int_0^{t\wedge\tau_R}\int_0^1\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)^2 d\xi dt'$$
$$=-\mu\int_0^{t\wedge\tau_R}\int_0^1(\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}})(\varrho_{eq}\partial_\xi v)(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)d\xi dt'+\int_0^{t\wedge\tau_R}\int_0^1(\partial_\xi\varrho)(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)d\xi$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau_R}\int_0^1((\partial_x\Phi)\circ x)(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)d\xi dt'+\int_0^{t\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G).$$

On voit aisément que

$$(5.3)\qquad \Big|\int_0^1(\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}})(\varrho_{eq}\partial_\xi v)(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)d\xi\Big|$$
$$\le\Big\|\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\Big\|_{L^2}\|\varrho_{eq}\|_{L^\infty}^{1/4}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v\|_{L^2}^{1/2}\big\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\big\|_{L^2}^{1+\frac12},$$

$$(5.4)\qquad \Big|\int_0^1(\partial_\xi\varrho)(\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v)d\xi\Big|$$
$$\le\Big(\|\partial_\xi\varrho_{eq}\|_{L^2}\Big\|\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\Big\|_{L^\infty}+\big\|\varrho_{eq}\big\|_{L^\infty}\Big\|\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\Big\|_{L^2}\Big)\big\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\big\|_{L^2}.$$

En outre en appliquant l'inégalité de Doob à $\int_0^{t\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G)$, on a

$$\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\tau_R}\Big|\int_0^t(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G)\Big|\Big)$$
$$\le\Big[\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\tau_R}\Big|\int_0^t(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2}$$
$$\le\Big[4\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^{T\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2}$$
$$=2\Big(\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v\|_{L^2}^2\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}d<<G>>\Big)^{1/2},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}$ désigne la fonctionnelle sur $\mathcal{L}^1((V^1)';V^1)$ déterminée par la relation

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}(g\otimes h)=(g,h)_{V^1}=(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi g,\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi h)\int_0^1 \varrho_{eq}(\xi)(\partial_\xi g(\xi))\partial_\xi h(\xi)d\xi.$$

Donc, compte tenu de (2.13), on obtient

$$\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\leq T\wedge\tau_R}\Big|\int_0^t(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi G)\Big|\Big) \tag{5.5}$$
$$\leq 2\Big(\mathbb{E}\big(\max_{0<t\leq T\wedge\tau_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2}\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}<<G>>_{T\wedge\tau_R}\big)\Big)^{1/2}$$
$$\leq 2\big(\mathbb{E}\big(\max_{0<t\leq T\wedge\tau_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2}\big)\big)^{1/2}(\Gamma_a(T))^{1/2}.$$

À l'aide de l'hypothèse (2.5) et des Lemmes 4.1, 4.2, 4.3, on déduit des relations (5.3)–(5.5) que, quelque soit $\varepsilon>0$, il existe une constante positive $C(\varepsilon;\tilde{M},N_2,N_3)$ telle que l'espérance mathématique du deuxième membre de (5.2) soit majorée par

$$\varepsilon\Big(\mathbb{E}\big(\max_{0<t\leq T\wedge\tau_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2}\big)+\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R}\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\|^2_{L^2}dt\Big)+C(\varepsilon;\tilde{M},N_2,N_3). \tag{5.6}$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Ito à la fonction $\varphi(t)=\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2}$, on obtient

$$\frac12\big\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t\wedge\tau_R)\big\|^2_{L^2}-\frac12\big\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v_0\big\|^2_{L^2}$$
$$=\int_0^{t\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v)+\frac12\int_0^{t\wedge\tau_R}\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}d<<G>>,$$

ou encore

$$\int_0^{t\wedge\tau_R}(\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v,\, d\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v) \tag{5.7}$$
$$=\frac12\big\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t\wedge\tau_R)\big\|^2_{L^2}-\frac12\big\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v_0\big\|^2_{L^2}-\frac12\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^1}<<G>>_{t\wedge\tau_R}.$$

Donc, en tenant compte de (4.2) et en choisissant un ε convenablement petit dans (5.6), on déduit des relations (5.2), (5.6) et (5.7) l'inégalité (5.1). □

6. Démonstration du théorème 2.1

On démontre d'abord le

Lemme 6.1. *Quelque soit* $\varepsilon > 0$*, il existe* $R \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \tau_R(\omega) < T\}) < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Démonstration. Comme d'après la définition de τ_R on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \tau_R(\omega) < T\} \subset \{\omega \in \Omega \,|\, \max_{0<t<T}(\|v(\omega;\cdot,t)\|_{L^2} + \|G(\omega;\cdot,t)\|_{L^2}) \geq R\},$$

à l'aide de l'inégalité bien connue $\mathbb{P}(\{X^2 \geq R^2\}) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{R^2}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \tau_R(\omega) < T\}) \\ &\leq \frac{4}{R^2}\Big(\mathbb{E}(\max_{0\leq t\leq T}\|v(\cdot,t)\|_{L^2}^2) + \mathbb{E}(\max_{0\leq t\leq T}\|G(\cdot,t)\|_{L^2}^2)\Big). \end{aligned} \tag{6.2}$$

D'ailleurs, en vertu de (3.1) et des hypothèses sur G, le second membre de (6.2) est borné et ne dépend pas de R. Donc il suffit de choisir un R suffisamment grand pour parvenir à (6.1). □

Démonstration du Théorème 2.1. On rappelle d'abord qu'on peut construire, selon la procédure usuelle (voir par exemple [9], th.4.1), une solution locale (v,ϱ) du problème (A). Plus précisément, il y a un temps d'arrêt τ tel que $\tau > 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et que le couple (v,ϱ) de variables aléatoires satisfasse aux équations $(1.7)_A$ et (1.8) dans l'intervalle stochastique $0 < t < \tau$ ainsi qu'aux conditions initiales pour $t = 0$; en outre on démontre par une méthode usuelle l'unicité de la solution locale (v,ϱ).

Cela étant, le Lemme 6.1 nous permet de prolonger la solution (v,ϱ) jusqu'à T, ce qui démontre l'existence d'une solution. L'unicité de la solution résulte de celle de la solution locale. □

7. Démonstration du théorème 2.2

Le Théorème 2.2 se démontre suivant l'idée de la démonstration du Théorème 2.1. Mais, puisque le processus H est donné dans un espace fonctionnel dont la variable n'est pas $\xi \in]0,1[$ mais $x \in \mathbb{R}$, il nous faut estimer les intégrales contenant H d'une manière différente de la démonstration du Théorème 2.1.

Comme on utilise dans cette section l'espace $L^2(0,1)$ relatif à la variable ξ ainsi que l'espace $L^2(\mathbb{R})$ relatif à la variable x, pour les distinguer, s'il est nécessaire, on notera respectivement L^2_ξ et L^2_x; de manière analogue $(\cdot,\cdot)_\xi$ et $(\cdot,\cdot)_x$ seront les produits scalaires dans $L^2_\xi = L^2(0,1)$ et $L^2_x = L^2(\mathbb{R})$ respectivement.

Avant tout on remarque que les relations qui relient les coordonnées eulériennes (x,t) et les coordonnées lagrangiennes (ξ,t) entraînent que, pour $g,h \in H^1(\mathbb{R})$, on a

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x,t)g(x)h(x)dx\Big| = \Big|\int_0^1 g(x(\xi,t))h(x(\xi,t))d\xi\Big|$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|$$

et donc

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x,t)g(x)h(x)dx\Big| \leq c\|g\|_{H^1(\mathbb{R})}\|h\|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{7.1}$$

Cela étant, pour le problème (B) on a le

Lemme 7.1. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (B)*, alors on a*

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}(\max_{0<t\leq T}\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2_\xi}) + \frac{\mu}{2}\mathbb{E}\int_0^T \|\sqrt{\varrho}\partial_\xi v\|^2_{L^2_\xi}dt \leq N_b(T), \tag{7.2}$$

où

$$N_b(T) = C\,\Gamma_b(T) + 2\mathbb{E}\Theta(0) + \mathbb{E}(\|v_0\|^2_{L^2_\xi}), \tag{7.3}$$

C étant une constante.

Démonstration. On multiplie les deux membres de $(1.1)_B$ par v et l'intègre par rapport à x, de sorte qu'on obtient

$$\begin{aligned}(\varrho v, dv)_x = {} & [-(\varrho v\partial_x v, v)_x - \mu(\partial_x v, \partial_x v)_x - (\partial_x\varrho, v)_x - (\varrho\partial_x\Phi, v)_x]dt \\ & + (\varrho v, dH)_x.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Or, comme on a

$$(\varrho v\partial_x v, v)_x = -\frac{1}{2}((\partial_x(\varrho v))v, v)_x = \frac{1}{2}((\partial_t\varrho)v, v)_x,$$

la formule d'Ito appliquée à la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{2}\|\sqrt{\varrho(\cdot,t)}\,v(\cdot,t)\|^2_{L^2_x}$ donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big\|\sqrt{\varrho(\cdot,t)}\,v(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_x} - \frac{1}{2}\big\|\sqrt{\varrho_0}\,v_0\big\|^2_{L^2_x} \\ &= \int_0^t (\varrho v, dv)_x + \int_0^t (\varrho v\partial_x v, v)_x dt' + \frac{1}{2}\int_0^t \langle\varrho\cdot,\cdot\rangle d << H >>,\end{aligned} \tag{7.5}$$

où $\langle\varrho\cdot,\cdot\rangle$ est la fonctionnelle sur $\mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))'; H^1(\mathbb{R}))$ déterminée par la relation

$$\langle\varrho\cdot,\cdot\rangle(g\otimes h) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x,t)g(x)h(x)dx \qquad (g,h\in H^1(\mathbb{R})\,);$$

cette dernière relation entraîne, en vertu de (7.1), la relation

$$\|\langle\varrho\cdot,\cdot\rangle\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))';H^1(\mathbb{R}));\mathbb{R})}\leq c.$$

Donc, compte tenu des propriétés supposées pour H (et donc pour $<< H >>$), on a

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t\langle\varrho\cdot,\cdot\rangle d << H >>\Big|\leq c\mathbb{E}\| << H >>_t \|_{\mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))';H^1(\mathbb{R}))}\leq c\,\Gamma_b(t). \tag{7.6}$$

Pour ce qui concerne l'intégrale $\int_0^t(v,\varrho dH)_x$, par des considérations analogues à l'obtention de (3.8) et de (7.6), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\leq T}\Big|\int_0^t(\varrho v,dH)_x\Big|\Big)&\leq 2\Big(\mathbb{E}\int_0^T\|\sqrt{\varrho}v\|^2_{L^2_x}\langle\varrho\cdot,\cdot\rangle d << H >>\Big)^{1/2}\\&\leq 2\big(\mathbb{E}\max_{0<t\leq T}\|\sqrt{\varrho}v\|^2_{L^2_x}\big)^{1/2}(c\,\Gamma_b(T))^{1/2}\\&\leq\frac{1}{4}\mathbb{E}\big(\max_{0<t\leq T}\|\sqrt{\varrho}v\|^2_{L^2_x}\big)+c'\Gamma_b(T),\end{aligned}\tag{7.7}$$

c' étant une constante.

Par ailleurs, les calculs pour (3.5) restent valables même pour le cas présent. Donc, si on tient compte des relations

$$\|\sqrt{\varrho}v\|_{L^2_x}=\|v\|_{L^2_\xi},$$
$$\|\partial_x v\|_{L^2_x}=\|\sqrt{\varrho}\partial_\xi v\|_{L^2_\xi},$$

l'inégalité (7.2) résulte des relations (7.4)–(7.7) et de l'analogue de (3.5) ($\Theta(t)$ est toujours ≥ 0 (voir (3.4)). □

Pour obtenir les estimations pour la densité ϱ, on pose

$$\sigma_R(\omega)=\inf\{t>0\,|\,\|v(\omega;\cdot,t)\|_{L^2_\xi}+\|H(\omega;\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R})}>R\}. \tag{7.8}$$

Alors tous les raisonnements de la démonstration du Lemme 4.1 et de celle du Lemme 4.3 restent valables pourvu qu'on substitue H et σ_R à la place de G et τ_R et tienne compte de la relation $\sup_{x\in\mathbb{R}}|H(x)|\leq\|H\|_{H^1(\mathbb{R})}$. En outre, comme $\|\partial_x v\|_{L^2_x}=\|\sqrt{\varrho}\partial_\xi v\|_{L^2_\xi}$, même l'analogue du Lemme 4.2 sera démontré de la même manière.

En résumant, on a le

Lemme 7.2. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (B)*, alors il existe des constantes positives* $\tilde m=\tilde m(R)$*,* $\tilde M=\tilde M(R)$ *et* $N_3=N_3(R)$ *telles que*

$$0<\tilde m\leq\frac{\varrho(\xi,t)}{\varrho_{eq}(\xi)}\leq\tilde M<\infty\quad\forall(\xi,t)\in]0,1[\times[0,T\wedge\sigma_R]\qquad\mathbb{P}-p.s., \tag{7.9}$$

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\sigma_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v\|^2_{L^2_\xi}dt \le N_2 = \frac{2}{\mu}N_b(T)\tilde{M}, \tag{7.10}$$

$$\max_{0<t\le T\wedge\sigma_R}\Big\|\partial_\xi\frac{\varrho(\cdot,t)}{\varrho_{eq}(\cdot)}\Big\|_{L^2_\xi} \le N_3 \qquad \mathbb{P}-p.s.. \tag{7.11}$$

Pour les dérivées de v on a le

Lemme 7.3. *Si* (v,ϱ) *est solution du problème* (B)*, alors il existe une constante* $N_4 = N_4(R)$ *telle que*

$$\mathbb{E}\big(\max_{0<t\le T\wedge\sigma_R}\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2_\xi}\big) + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\sigma_R}\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\|^2_{L^2_\xi}dt \le N_4. \tag{7.12}$$

Démonstration. On multiplie $(1.1)_B$ par $\dfrac{1}{\varrho}\partial_x\partial_x v$ et l'intègre par rapport à x, de sorte qu'on obtient

$$(\partial_x v, d\partial_x v)_x + \mu\Big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\Big\|^2_{L^2_x} \tag{7.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v(\partial_x v)\partial_x\partial_x v dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\partial_x\varrho)}{\varrho}\partial_x\partial_x v dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x\Phi)\partial_x\partial_x v dx + (\partial_x v,\, d\partial_x H)_x.$$

En appliquant la formule d'Ito à la fonction $\psi(t) = \big\|\partial_x v(\cdot,t)\big\|^2_{L^2_x}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big\|\partial_x v(\cdot,t\wedge\sigma_R)\big\|^2_{L^2_x} - \frac{1}{2}\big\|\partial_x v_0\big\|^2_{L^2_x}\\ = \int_0^{t\wedge\sigma_R}(\partial_x v,\, d\partial_x v)_x + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle d << H >>;\end{aligned} \tag{7.14}$$

où $\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle$ est la fonctionnelle sur $\mathcal{L}^1((H^1(\mathbb{R}))';H^1(\mathbb{R}))$ déterminée par la relation

$$\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle(g\otimes h) = (\partial_x g,\partial_x h)_x \qquad (g,h\in H^1(\mathbb{R}));$$

on a évidemment

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle d << H >> \le \Gamma_b(T) \tag{7.15}$$

(voir (2.14)).

D'autre part, à l'aide de l'inégalité de Doob, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\tau_R}\Big|\int_0^t(\partial_x v,\, d\partial_x H)_x\Big|\Big)\\
&\le\Big[\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\tau_R}\Big|\int_0^t(\partial_x v,\, d\partial_x H)_x\Big|^2\Big)\Big]^{1/2}\\
&\le\Big[4\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^{T\wedge\sigma_R}(\partial_x v,\, d\partial_x H)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2}\\
&=2\Big(\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\sigma_R}\|\partial_x v\|^2_{L^2_x}\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle d << H >>\Big)^{1/2}\\
&\le 2\Big(\mathbb{E}\big(\max_{0<t\le T\wedge\sigma_R}\|\partial_x v(\cdot,t)\|^2_{L^2_x}\langle\partial_x\cdot,\partial_x\cdot\rangle << H >>_{T\wedge\sigma_R}\big)\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\max_{0<t\le T\wedge\sigma_R}\Big|\int_0^t(\partial_x v,\, d\partial_x H)_x\Big|\Big)\\
&\qquad\le 2\Big(\mathbb{E}\big(\max_{0<t\le T\wedge\sigma_R}\|\partial_x v(\cdot,t)\|^2_{L^2_x}\big)\Big)^{1/2}(\Gamma_b(T))^{1/2}.
\end{aligned}\tag{7.16}$$

En outre, compte tenu de la relation $\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\varrho\big\|_{L^2_x}=\|\partial_\xi\varrho\|_{L^2_\xi}$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\partial_x\varrho)}{\varrho}\partial_x\partial_x v dx\Big|&\le\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\varrho\big\|_{L^2_x}\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|_{L^2_x}\\
&\le\Big(\|\partial_\xi\varrho_{eq}\|_{L^2_\xi}\big\|\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\big\|_{L^\infty}+\|\varrho_{eq}\|_{L^\infty}\big\|\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\big\|_{L^2_\xi}\Big)\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|_{L^2_x};
\end{aligned}\tag{7.17}$$

on a aussi

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x\Phi)\partial_x\partial_x v dx\Big|&\le\|\sqrt{\varrho}\partial_x\Phi\|_{L^2_x}\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|_{L^2_x}\\
&\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_x\Phi(x)|\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|_{L^2_x}.
\end{aligned}\tag{7.18}$$

Pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}v(\partial_x v)\partial_x\partial_x v dx$ on remarque que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}|\partial_x v|&\le\big\|\partial_x v\big\|^{1/2}_{L^2_x}\big\|\partial_x\partial_x v\big\|^{1/2}_{L^2_x}\\
&\le\sup_{0<\xi<1}|\varrho_{eq}(\xi)|^{1/4}\tilde{M}^{1/4}\big\|\partial_x v\big\|^{1/2}_{L^2_x}\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|^{1/2}_{L^2_x}
\end{aligned}$$

et que $\|\sqrt{\varrho}v\|_{L^2_x} = \|v\|_{L^2_\xi} \leq R$ dans l'intervalle stochastique $0 \leq t \leq T \wedge \sigma_R$; on a donc

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} v(\partial_x v)\partial_x\partial_x v dx\Big| \leq R \sup_{0<\xi<1} |\varrho_{eq}(\xi)|^{1/4}\tilde{M}^{1/4}\|\partial_x v\|^{1/2}_{L^2_x}\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\|^{3/2}_{L^2_x}. \tag{7.19}$$

Des relations (7.16)–(7.19) on déduit que, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε (dépendante de ε) telle que l'espérance mathématique du deuxième membre de (7.13) soit majorée par

$$\varepsilon\Big(\mathbb{E}(\max_{0<t\leq T\wedge\sigma_R} \|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v(\cdot,t)\|^2_{L^2_\xi}) + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\sigma_R} \|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\|^2_{L^2_x} dt\Big) + C_\varepsilon.$$

Donc, compte tenu des relations (7.14)–(7.15), on déduit de (7.13) l'inégalité

$$\mathbb{E}(\max_{0<t\leq T\wedge\sigma_R} \|\partial_x v(\cdot,t)\|^2_{L^2_x}) + \mathbb{E}\int_0^{T\wedge\sigma_R} \|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\|^2_{L^2_x} dt \leq C', \tag{7.20}$$

avec une constante C' qui dépend de R.

Finalement, grâce aux relations

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\varrho_{eq}}\partial_\xi v\|_{L^2_\xi} &\leq (\frac{1}{\tilde{m}})^{1/2}\|\sqrt{\varrho}\partial_\xi v\|_{L^2_\xi} \\
&= (\frac{1}{\tilde{m}})^{1/2}\|\partial_x v\|_{L^2_x}, \\
\|\partial_\xi\varrho_{eq}\partial_\xi v\|_{L^2_\xi} &\leq \big\|(\partial_\xi\frac{\varrho_{eq}}{\varrho})\varrho\partial_\xi v\big\|_{L^2_\xi} + \big\|\frac{\varrho_{eq}}{\varrho}\partial_\xi\varrho\partial_\xi v\big\|_{L^2_\xi} \\
&\leq \Big(\frac{1}{\tilde{m}^2}\|\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\|_{L^2_\xi} + \frac{1}{\tilde{m}}\Big)\big\|\partial_\xi\varrho\partial_\xi v\big\|_{L^2_\xi} \\
&= \Big(\frac{1}{\tilde{m}^2}\|\partial_\xi\frac{\varrho}{\varrho_{eq}}\|_{L^2_\xi} + \frac{1}{\tilde{m}}\Big)\big\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\partial_x\partial_x v\big\|_{L^2_x},
\end{aligned}$$

(7.20) entraîne (7.12). □

Démonstration du Théorème 2.2. Étant établies les estimations *a priori* (7.2), (7.9), (7.10), (7.11) et (7.12), on peut raisonner de la même manière que dans la section 6, de sorte qu'on achève la démonstration du Théorème 2.2. □

References

[1] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov and V. N. Monakov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids* (en russe). Nauka, Novosibirsk 1983 (traduction anglaise: Elsevier Publ. 1990).

[2] L. D. Landau and E. M. Lifchitz, *Mécanique des fluides.* (en russe) Mir, Moscou, 1971.

[3] M. Métivier, *Reelle und vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der stochastischen Integration*, Springer, 1977.

[4] M. Métivier, *Semimartingales*, De Gruyter, Berlin, 1982.

[5] M. Métivier and J. Pellaumail, *Stochastic integration*, Academic Press, 1980.

[6] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Prague, 1967.
[7] E. Pardoux, *Intégrales stochastiques hilbertiennes*, Publication interne de l'Univ. Paris–Dauphine, 1976.
[8] E. Tornatore, *Global solution of the bi–dimensional stochastic equation for a viscous gas*, À paraître sur *NoDEA*.
[9] E. Tornatore, H. Fujita Yashima, *Equazione stocastica di un gas viscoso barotropico*, Ric. Mat. **46** (1997), 255–283.

Dipartimento di Matematica
Università di Torino
Torino, Italia