Volume 26, Number 1, 2001, pp. 95-113

FONCTION DE LITTLEWOOD-PALEY ET ESPACES DE LIPSCHITZ

ALAIN SALLAZ

Abstract. In this paper we study the action of the Littlewood-Paley operator on the Lipschitz functions. The used method is very elementary and allows us to complete some earlier results.

Résumé. Dans ce papier, nous étudions l'action de l'opérateur de Littlewood-Paley sur les fonctions lipschitziennes. La méthode utilisée est très élémentaire et nous permet de compléter des résultats antérieurs.

1. Introduction et notations

Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, suffisamment intégrable, u son extension de Poisson dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} p_y(\zeta) f(x-\zeta)\, d\zeta \quad ((x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1})$$

où $p_y(x)$ désigne le noyau de Poisson défini sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$p_y(x) = \frac{1}{y^n} p\Big(\frac{x}{y}\Big) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}) \text{ avec } p(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

c_n étant une constante de normalisation.

On appelle fonction de Littlewood-Paley associée à f l'application $g(f)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(f)(x) = \Big(\int_0^{+\infty} |\nabla u(x,y)|^2 y\, dy \Big)^{1/2} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$\text{avec } |\nabla u(x,y)|^2 = \sum_{i=1}^n \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \Big|^2$$

et opérateur de Littlewood-Paley l'application (non linéaire)

$$f \mapsto g(f).$$

Received January 28, 2000.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 26A16, 42b25.
Key words and phrases. fonction de Littlewood-Paley lipschitzienne.

L'action de cet opérateur a été étudiée sur un certain nombre d'espaces fonctionnels; citons:

– Les espaces L^p $(1 < p < +\infty)$ ([2], pp. 82–86);

– L'espace H^1 ([3], p. 159);

– L'espace BMO ([1], [5]).

Il existe une caractérisation des espaces lipschitziens en terme de valeur moyenne, analogue à la définition de l'espace BMO ([4], pp. 213–214). (Rappelons que pour $\alpha \in]0,1[$, $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty,$$

cette quantité étant par définition $\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$.)

Il est donc assez naturel de s'intéresser à l'action de l'opérateur de Littlewood-Paley sur les espaces lipschitziens.

S. Wang [6] a obtenu:

Thèorèm 1. *Si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $(0 < \alpha < 1)$ et si $g(f) \not\equiv \infty$ alors $g(f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\|g(f)\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

L'utilisation des méthodes développées dans [1] va nous permettre de renforcer et compléter le théorème précédent ainsi que de donner une démonstration directe de celui-ci (n'utilisant pas en particulier la caractérisation donnée dans [4] pp. 213–214 des fonctions lipschitziennes).

Précisément nous démontrons:

Thèorèm 2. *Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $(0 < \alpha < 1)$; on suppose que $g(f) \not\equiv \infty$; alors*

(i) *Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $g^2(f) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\|g^2(f)\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) *Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $g^2(f)$ appartient à la classe Λ_* de Zygmund et il existe une constante c ne dépendant que de n telle que*

$$\|g^2(f)\|_{\Lambda_*} \le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_{1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) *Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $g^2(f)$ est dérivable et pour $i \in [1,\dots,n]$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f)) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$. De plus il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f))\Big\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \quad (i \in [1,\dots,n]).$$

Une remarque classique dans ce contexte: l'expression explicite du noyau de Poisson n'est pas utile. Pour toute fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^n$ et tout $y > 0$ notons ψ_y la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\psi_y(x) = \frac{1}{y^n}\psi\Big(\frac{x}{y}\Big) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Un calcul, facile compte tenu du fait que le noyau de Poisson est homogène de degré $-n$ sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, montre que

$$y \cdot \nabla u(x,y) = \bigg(f * \Big(\frac{\partial p}{\partial x_1}\Big)_y(x), \ldots, f * \Big(\frac{\partial p}{\partial x_n}\Big)_y(x), f * \Big(-\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - np\Big)_y(x)\bigg)$$

et donc que $y|\nabla u(x,y)|^2$ est somme de $n+1$-termes de la forme $\dfrac{1}{y}|f * \psi_y(x)|^2$, la fonction ψ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx = 0$;

(ii) il existe $c \geq 0$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on a

$$|\psi(x)| \leq c(1+|x|)^{-(n+1)};$$

(iii) il existe $c \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|y| \leq \dfrac{|x|}{2}$ on a

$$|\psi(x+y) - \psi(x)| \leq c\frac{|y|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{n+1+\varepsilon}}$$

(dans le contexte précédent $\varepsilon = +1$).

Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications mesurables f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+1}}\, dx < +\infty$ et soit ψ une application satisfaisant à *(i), (ii), (iii).*

On peut, pour tout f de $\mathcal{M}$ considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$ par

$$(x,y) \longmapsto f * \psi_y(x)$$

et la fonction de Littlewood-Paley associée à f (et à ψ) définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$g(f)(x) = \Big(\int_0^{+\infty} |f * \psi_y(x)|^2\, \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}.$$

C'est dans ce contexte que nous nous placerons désormais (le résultat de [6] cité précédemment est énoncé dans ce contexte) et le résultat que nous avons en vue est le suivant:

Thèorèm 3. *Soit* $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $(0 < \alpha < 1)$*; on suppose que* $g(f) \not\equiv \infty$*; alors*

(i) *Si* $0 < \alpha < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $g^2(f) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *et il existe une constante c ne dépendant que de* α *et de* n *telle que*

$$\|g^2(f)\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) *Supposons de plus* $\varepsilon = 1$*:*

– *Si* $\alpha = \frac{1}{2}$, $g^2(f)$ *appartient à la classe* Λ_* *de Zygmund et il existe une constante* c *ne dépendant que de* n *telle que*

$$\|g^2(f)\|_{\Lambda_*} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_{1/2}(\mathbb{R}^n)}.$$

– *Si* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $g^2(f)$ *est dérivable et pour* $i \in [1, \dots, n]$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f)) \in \mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)$*. De plus il existe une constante* c *ne dépendant que de* α *et de* n *telle que*

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}(g^2(f))\Big\|_{\mathrm{Lip}_{2\alpha-1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \quad (i \in [1, \dots, n]).$$

Dans le paragraphe 2 nous énonçons et démontrons deux lemmes nous permettant de contrôler la fonction $f * \psi_y$ et nous en déduisons une démonstration directe du théorème énoncé dans [4].

Dans le paragraphe 3 nous démontrons le théorème précédemment énoncé, après avoir rappelé la définition de la classe Λ_* de Zygmund.

Dans le paragraphe 4 nous donnons un exemple montrant que dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ il est nécessaire d'avoir recours à un espace de fonctions autre que les fonctions lipschitziennes.

Dans les démonstrations qui vont suivre c désignera toujours une constante ne dépendant que de α et de n, celle-ci pouvant changer ligne à ligne.

2. Estimations sur $f * \psi_y$

Lemme 1. *Soit* $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1)$*; il existe une constante* c *ne dépendant que de* α *et de* n *telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+ : |f * \psi_y(x)| \leq c\ y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. On a

$$f * \psi_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s)\psi_y(x-s)\,ds = \int_{\mathbb{R}^n} (f(s) - f(x))\psi_y(x-s)\,ds$$

et donc

$$|f * \psi_y(x)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |s-x|^\alpha |\psi_y(x-s)|\ ds = \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\psi_y(x)|\ dx.$$

Compte tenu de la définition de ψ_y et des conditions imposées à ψ on obtient:

$$|f * \psi_y(x)| \leq c\ y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^\alpha}{(1+|x|)^{n+1}} dx = c\ y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

Lemme 2. *Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)(0<\alpha<1)$; il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que $\forall (x,x',y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*,\ y \geq |x-x'|$:*

$$|f*\psi_y(x) - f*\psi_y(x')| \leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\Big(\frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}}\Big).$$

Preuve. On a

$$f*\psi_y(x) - f*\psi_y(x') = \int_{\mathbb{R}^n} [f(s)-f(x')][\psi_y(x-s)-\psi_y(x'-s)]\,ds$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}|\psi_y(x-s)-\psi_y(x'-s)| &= \frac{1}{y^n}\Big|\psi\big(\frac{x-s}{y}\big)-\psi\big(\frac{x'-s}{y}\big)\Big| \\ &\leq \frac{c}{y^n}\frac{|\frac{x-x'}{y}|^\varepsilon}{\big(1+|\frac{x'-s}{y}|\big)^{n+1+\varepsilon}} \quad \text{si } |x-x'| \leq \frac{1}{2}|x'-s|\end{aligned}$$

Pour obtenir la majoration annoncée, écrivons en posant $r=|x-x'|$

$$\begin{aligned}|f*\psi_y(x)-f*\psi_y(x')| &\leq \int_{|x'-s|\geq 2r} |f(s)-f(x')|\ |\psi_y(x-s)-\psi_y(x'-s)|\,ds \\ &\quad + \int_{|x'-s|\leq 2r} |f(s)-f(x')|\ |\psi_y(x-s)-\psi_y(x'-s)|\,ds \\ &= \mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

Pour majorer I nous utilisons la majoration rappelée sur ψ et obtenons

$$\begin{aligned}I &\leq \frac{c}{y^{n+\varepsilon}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}|x-x'|^\varepsilon \int_{|x'-s|\geq 2r} \frac{|s-x'|^\alpha}{(1+\frac{|s-x'|}{y})^{n+1+\varepsilon}}\,ds \\ &= \frac{c}{y^{\varepsilon-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}|x-x'|^\varepsilon \int_{|\eta|\geq\frac{2r}{y}} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1+\varepsilon}}d\eta \\ &\leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}}\,.\end{aligned}$$

Pour majorer II remarquons que

$$\begin{aligned}|\psi_y(x-s)| &\leq \frac{c}{y^n}\frac{1}{\big(1+|\frac{x-s}{y}|\big)^{n+1}} \\ &= \frac{c}{y^n}\times\Big(\frac{1+|x'-s|/y}{1+|x-s|/y}\Big)^{n+1}\times\frac{1}{(1+\frac{|x'-s|}{y})^{n+1}}\end{aligned}$$

et que

$$\frac{1+|x'-s|/y}{1+|x-s|/y} \le \frac{1+|x-s|/y+|x-x'|/y}{1+|x-s|/y} \le 2$$

puisque $|x-x'|/y \le 1$. D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\le \frac{c}{y^n}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{|x'-s|\le 2r} |s-x'|^\alpha \frac{1}{(1+\dfrac{|s-x'|}{y})^{n+1}}\, ds \\ &= c\, y^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{|\eta|\le 2r/y} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1}} d\eta, \end{aligned}$$

mais

$$\int\limits_{|\eta|\le 2r/y} \frac{|\eta|^\alpha}{(1+|\eta|)^{n+1}} d\eta = c \int_0^{2r/y} \frac{\rho^{n+\alpha-1}}{(1+\rho)^{n+1}}\, d\rho = c\frac{r}{y}$$

et donc

$$\mathrm{II} \le \frac{c}{y^{1-\alpha}}|x-x'|\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \le c\frac{|x-x'|^\varepsilon}{y^{\varepsilon-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Corollaire 1. ([4]) *Soit $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ telle que $g(f) \not\equiv \infty$ avec $0 < \alpha < \varepsilon$. Alors $g(f) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que*

$$\|g(f)\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Pour $r > 0$ posons

$$g_1(x) = \Big(\int_0^r |f*\psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}, \quad g_2(x) = \Big(\int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2}.$$

On a grâce au Lemme 1

$$g_1(x) \le c\Big(\int_0^r y^{2\alpha}\frac{dy}{y}\Big)^{1/2}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = c\, r^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
|g_2(x)-g_2(x')| &= \left| \Big(\int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} - \Big(\int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x')|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \right| \\
&\le \Big(\int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x) - f*\psi_y(x')|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \\
&\le c\Big(\int_r^{+\infty} \frac{|x-x'|^{2\varepsilon}}{y^{2(\varepsilon-\alpha)}} \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \times \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

La première inégalité résultant de l'inégalité triangulaire, la deuxième du Lemme 2. La dernière intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < \varepsilon$. On obtient ainsi pour $|x-x'| < r$

$$
|g_2(x)-g_2(x')| \le c\ r^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|g(f)(x)-g(f)(x')| &= \left| \big[g_1^2(x)+g_2^2(x)\big]^{1/2} - \big[g_1^2(x')+g_2^2(x')\big]^{1/2} \right| \\
&\le \Big(|g_1(x)-g_1(x')|^2 + |g_2(x)-g_2(x')|^2\Big)^{1/2} \\
&\le c\ r^{\alpha}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

□

3. Démonstration du théorème

Pour la première partie du théorème, en utilisant les notations du corollaire, nous avons en supposant $|x-x'| \le r$

$$
\begin{aligned}
|g_2^2(x)-g_2^2(x')| &\le \int_r^{+\infty} |f*\psi_y(x) - f*\psi_y(x')|\ |f*\psi_y(x) + f*\psi_y(x')| \frac{dy}{y} \\
&\le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_r^{+\infty} \frac{r^{\varepsilon}}{y^{\varepsilon-\alpha}} \cdot y^{\alpha} \frac{dy}{y}\,,
\end{aligned}
$$

la dernière inégalité s'obtenant à l'aide des deux lemmes précédents. Cette intégrale converge si, et seulement si, $\alpha < \varepsilon/2$ et l'on obtient

$$
|g_2^2(x)-g_2^2(x')| \le c\ r^{2\alpha}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}
$$

d'où

$$
|g^2(f)(x)-g^2(f)(x')| \le |g_1^2(x)-g_1^2(x')| + |g_2^2(x)-g_2^2(x')| \le c\ r^{2\alpha}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.
$$

Remarque. De façon élémentaire si $g^2(f)$ appartient à $\mathrm{Lip}_{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $g(f)$ appartient à $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Supposons maintenant $\varepsilon = +1$; la fonction ψ est dérivable presque partout ([2], p.250) et l'on a, compte tenu des conditions imposées à ψ, pour presque tout x

$$\Big|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)\Big| \leq \frac{c}{(1+|x|)^{n+2}} \qquad (j \in [1,\dots,n]).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3. *Il existe une constante c ne dépendant que de α et de n telle que pour tout $(x,x',y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$:*

$$\Big|f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| \leq \frac{c}{y^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \qquad (j \in [1,\dots,n])$$

$$\Big|f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x) - f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\Big| \leq \frac{c|x-x'|^\alpha}{y}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \qquad (j \in [1,\dots,n]).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\Big|f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(s)\frac{1}{y^{n+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\big(\frac{x-s}{y}\big)\ ds\Big| \\ &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \big[f(s)-f(x)\big]\frac{1}{y^{n+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\big(\frac{x-s}{y}\big)\ ds\Big|\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\Big| &\leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}|s-x|^\alpha\frac{1}{y^{n+1}}\cdot\frac{1}{\big(1+\frac{|x-s|}{y}\big)^{n+2}}\ ds \\ &\leq c\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\frac{y^\alpha}{y}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^\alpha}{(1+|u|)^{n+2}}\ du \\ &= \frac{c}{y^{1-\alpha}}\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité:

$$\begin{aligned}\Big|f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x) - f * \frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(x-s)-f(x'-s)|\ \Big|\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(s)\Big|\ ds \\ &\leq c|x-x'|^\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{y^{n+1}}\frac{1}{\big(1+\frac{|s|}{y}\big)^{n+2}}\ ds \\ &= \frac{c}{y}|x-x'|^\alpha\|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\alpha \in \big]\frac{1}{2},1\big[$, $g^2(f)$ est dérivable et que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g^2(f))(x) = \int_0^{+\infty} 2(f*\psi_y(x))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)\big)\ \frac{dy}{y} \quad (j \in [1,\dots,n]).$$

Pour cela écrivons

$$g^2(f)(x) = \int_0^1 |f * \psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y} + \int_1^\infty |f * \psi_y(x)|^2 \frac{dy}{y} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

On peut appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue pour I puisque, grâce aux lemmes 1 et 3,

$$|f * \psi_y(x)|\ |f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\big) \leq c\ \frac{y^\alpha}{y^{1-\alpha}} \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = \frac{c}{y^{1-2\alpha}} \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

cette dernière quantité étant intégrable par rapport à $\dfrac{dy}{y}$ sur $[0,1]$ puisque $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Pour II, fixons un point x_0 dans $\mathbb{R}^n$; nous avons

$$|f * \psi_y(x)| \leq c\big(|f * \psi_y(x_0)| + |x - x_0|^\alpha \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\big)$$

et donc, grâce au lemme 3,

$$|f * \psi_y(x)|\ \big|f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\big| \leq c \frac{|x - x_0|}{y^{1-\alpha}} \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} + c\ \frac{1}{y^{1-\alpha}} |f * \psi_y(x_0)|$$

$\dfrac{1}{y^{1-\alpha}}$ est intégrable par rapport à $\dfrac{dy}{y}$ sur $[1, +\infty[$; $\dfrac{1}{y^{1-\alpha}}|f * \psi_y(x_0)|$ aussi puisque grâce à l'inégalité de Schwarz nous avons

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{y^{1-\alpha}} |f * \psi_y(x_0)| \frac{dy}{y} &\leq \Big(\int_1^\infty \frac{1}{y^{2-2\alpha}} \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \Big(\int_1^\infty |f * \psi_y(x_0)|^2 \frac{dy}{y}\Big)^{1/2} \\ &\leq c \cdot g(f)(x_0).\end{aligned}$$

On peut donc dériver II sous le signe somme et l'on obtient la relation:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g^2(f)(x) = \int_0^{+\infty} 2(f * \psi_y(x)) \cdot \Big(f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\Big) \frac{dy}{y} \quad (j \in [1, \dots, n]).$$

Pour obtenir la dernière partie du théorème réitérons, sur cette formule, le procédé du corollaire, supposons à nouveau $r > |x - x'|$:

— d'une part,

$$\Big|\int_0^r (f * \psi_y(x)) \cdot \big(f * \frac{\partial \psi_y}{\partial x_j}(x)\big) \frac{dy}{y}\Big| \leq c \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \int_0^r \frac{y^\alpha}{y^{1-\alpha}} \frac{dy}{y} = c \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)} r^{2\alpha - 1}$$

grâce aux Lemmes 1 et 3;

— d'autre part,

$$\Big|\int_r^{+\infty}\big[(f*\psi_y(x))(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x))\big]-\big[(f*\psi_y(x'))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\big)\big]\frac{dy}{y}\Big|$$

$$\le\int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x)-f*\psi_y(x')|\,|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)|\frac{dy}{y}$$

$$+\int_r^{+\infty}|f*\psi_y(x')|\,\Big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x)-f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(x')\Big|\frac{dy}{y}$$

$$\le c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\Big[\int_r^{+\infty}\frac{r}{y^{1-\alpha}}\cdot\frac{1}{y^{1-\alpha}}\frac{dy}{y}+\int_r^{+\infty}y^\alpha\cdot\frac{r^\alpha}{y}\cdot\frac{dy}{y}\Big]$$

$$=c\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}r^{2\alpha-1}.$$

On obtient donc

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}g^2(f)(x)-\frac{\partial}{\partial x_j}g^2(f)(x')\Big|\le c\ r^{2\alpha-1}\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour finir examinons le cas $\alpha=1/2$, nous rappelons:

Définition. $\Lambda_*(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\\ y\neq 0}}\frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|}<+\infty$$

cette quantité étant, par définition $\|f\|_{\Lambda_*}$.

Soit (x,x') un point de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$; il existe θ et θ' dans $]0,1[$ tels que

$$|f*\psi_y|^2(x+x')-|f*\psi_y|^2(x)=2\sum_{j=1}^n x'_j((f*\psi_y)(x+\theta x'))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}\big)(x+\theta x')$$

$$|f*\psi_y|^2(x-x')-|f*\psi_y|^2(x)=-2\sum_{j=1}^n x'_j(f*\psi_y)(x-\theta' x'))\cdot\big(f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}\big)(x-\theta' x')$$

(avec $x'=(x'_j)_{j\in[1,\dots,n]}$). Posons pour simplifier $\zeta=x+\theta x'$, $\zeta'=x-\theta' x'$, on obtient:

$$\big||f*\psi_y|^2(x+x')+|f*\psi_y|^2(x-x')-2|f*\psi_y|^2(x)\big|$$

$$\le 2\sum_{j=1}^n|x'_j|\,|f*\psi_y(\zeta)-f*\psi_y(\zeta')|\,\big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta)\big|$$

$$+2\sum_{j=1}^n|x'_j|\,|f*\psi_y(\zeta')|\,\big|f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta)-f*\frac{\partial\psi_y}{\partial x_j}(\zeta')\big|$$

qui est majoré, en utilisant les Lemmes 1, 2 et 3 par

$$c|x'|\ \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\Big[\frac{|x'|}{y^{1/2}}\cdot\frac{1}{y^{1/2}}+\frac{1}{y^{1/2}}\cdot\frac{|x'|^{1/2}}{y}\Big]\quad (y>|x'|)$$

et donc pour tout $r>|x'|$

$$\begin{aligned}&\int_r^{+\infty}\big||f*\psi_y|^2(x+x')+|f*\psi_y|^2(x-x')-2|f*\psi_y|^2(x)\big|\frac{dy}{y}\\ &\qquad\le c|x'|\ \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\cdot\Big(r\cdot\int_r^{+\infty}\frac{dy}{y^2}+r^{1/2}\int_r^{+\infty}\frac{dy}{y^{1/2}}\Big)\\ &\qquad= c|x'|\ \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Puisque pour tout u de $\mathbb{R}^n$, $\int_0^r|f*\psi_y|^2(u)\frac{dy}{y}\le c\ r\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}$ (Lemme 1) on a

$$\big|g^2(f)(x+x')+g^2(f)(x-x')-2g^2(f)(x)\big|\le c(r+|x'|)\|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}\quad (r>|x'|).$$

D'où

$$\big|g^2(f)(x+x')+g^2(f)(x-x')-2g^2(f)(x)\big|\le c|x'|\ \|f\|^2_{\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

4. Étude d'un exemple

Le but de ce paragraphe est de donner un exemple d'une fonction f appartenant à $\mathrm{Lip}_{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, dont la fonction de Littlewood-Paley associée g^2, à partir de la fonction $\psi(x)=\frac{d}{dx}\big(\frac{1/\pi}{1+x^2}\big)$ ne soit ni lipschitzienne, ni dérivable (au sens ordinaire).

Lemme 4. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\sqrt{x(1-x)}\ \textit{si}\ x\in[0,1],\ \ f(x)=0\ \textit{sinon.}$$

Alors

$$g^2(x)-g^2(0)\underset{x\to0^-}{\sim}\frac{1}{8}|x|\,\mathrm{Ln}\,|x|.$$

La démonstration du lemme nécessite d'écrire $g^2(x)$ de façon explicite; pour cela notons que si $u(x,y)$, $((x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+)$ désigne l'extension de Poisson de f au demi-espace nous avons

$$g^2(x)=\int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big|^2 y\ dy.$$

Il est facile de se convaincre que $u(x,y) = \mathrm{Re}(-i\sqrt{z(z-1)} + iz)$, $(z = (x,y))$, $\sqrt{z(z-1)}$ étant la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{iy,\ y \in]-\infty,0]\} \cup \{1+iy,\ y \in]-\infty,0]\}$, de carré égal à $z(z-1)$, valant $\sqrt{2}$ pour $z=2$. D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \mathrm{Re}(-i\frac{d}{dz}\sqrt{z(z-1)} + i) = \mathrm{Re}\Big(-i\frac{2z-1}{2\sqrt{z(z-1)}}\Big).$$

En posant $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ et $\theta_1 = \mathrm{Arg}(z-1)$ (θ et $\theta_1 \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big[$), nous obtenons

$$\frac{2z-1}{\sqrt{z(z-1)}} = \frac{2|z|e^{i\theta} - 1}{\sqrt{|z(z-1)|}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta_1}{2}}} = \frac{2|z|e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta_1}{2})} - e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta_1}{2})}}{\sqrt{|z(z-1)|}}$$

et si $\tilde\theta$ est défini par $\theta + \tilde\theta = \theta_1$ (autrement dit $\tilde\theta = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA})$ si M, O et A ont pour affixes respectives z, 0 et 1) il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{|z(z-1)|}}\Big(-2|z|\sin\frac{\tilde\theta}{2} - \sin(\theta + \frac{\tilde\theta}{2})\Big).$$

En développant le terme $\sin\big(\theta + \frac{\tilde\theta}{2}\big)$ et en remplaçant $\cos\theta$ par $\frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta$ par $\frac{y}{|z|}$ nous obtenons:

$$\begin{aligned}4\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 = \frac{1}{|z||z-1|}\Big(&4|z|^2\sin^2\frac{\tilde\theta}{2} + \frac{y^2}{|z|^2}\cos^2\frac{\theta^2}{2} + 2y\sin\tilde\theta \\ &+ \frac{x^2}{|z|^2}\sin^2\frac{\tilde\theta}{2} + \frac{xy}{|z|^2}\sin\tilde\theta + 4x\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}\Big)\end{aligned}$$

que nous écrirons sous la forme

$$4\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 = \phi(x,y) + \psi(x,y) \text{ avec } \psi(x,y) = \frac{xy}{|z|^3|z-1|}\sin\tilde\theta + \frac{y^2}{y^3(1+y^2)^{1/2}}\cos^2\frac{\tilde\theta}{2}.$$

On a

$$g^2(x) = \int_0^{|x|}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 y\,dy + \int_{|x|}^{+\infty}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 y\,dy;$$

la première intégrale est majorée par $c|x|$ (Lemme 1 du paragraphe 2). Le lemme sera donc démontré si on montre que

(i) $\Big|\int_{|x|}^{+\infty}\big(\phi(x,y) - \phi(0,y)\big)y\,dy\Big| \le c|x|$;

(ii) $\int_{|x|}^{+\infty}\big(\psi(x,y) - \psi(0,y)\big)y\,dy \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{1}{2}|x|\,\mathrm{Ln}\,|x|$.

À nouveau précisons que dans les inégalités qui vons suivre la lettre c désigne une constante positive, ne dépendant pas de x ($|x|$ assez petit), pouvant changer ligne à0 ligne; implicitement x appartient à $]-1,0[$.

Signalons que les calculs qui suivent sont élémentaires, nous les donnons dans le détail afin de faciliter la lisibilité des majorations obtenues.

Nous utiliserons l'expression suivante de $\cos^2 \dfrac{\tilde{\theta}}{2}(x,y)$:

$$\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2 + x(x-1)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + 1\Big)$$

obtenue en écrivant, puisque $\tilde{\theta}$ appartient à $\big[0, \dfrac{\pi}{2}\big]$:

$$\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1-\sin^2\tilde{\theta}} + 1\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{1 - \frac{y^2}{|z(z-1)|^2}} + 1\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{(|z(z-1)|^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{|z(z-1)|} + 1\Big)$$

et en vérifiant que $|z(z-1)|^2 - y^2 = (y^2 + x(x-1))^2$. On en déduit

$$\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}(x,y) - \cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}(0,y) = \frac{1}{2}\Big(\frac{y^2+x(x-1)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Big) =$$
$$\frac{(y^2+x(x-1))^2(1+y^2) - y^2(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)}{2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\big[(y^2+x(x-1))(1+y^2)^{\frac{1}{2}} + y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\big]}.$$

Le numérateur vaut précisément $2y^2x(x-1) + x^2(x-1)^2$ et donc

$$(*) \qquad \Big|\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}(x,y) - \cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}(0,y)\Big| \leq$$
$$c\frac{y^2|x| + x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}(y^2 + |x| + y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}})}$$

Enfin notons que pour (α,β) dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $2\beta > \alpha + 1$ on a

$$(**) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2x^2)^\beta}\, dt = 0\Big(\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\Big) \text{ si } \alpha > -1 \text{ et } 0(\mathrm{Ln}\,|x|) \text{ si } \alpha = -1.$$

Preuve de i). L'intégrale figurant dans (i) s'écrit $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$ avec

$$I_1 = \int\limits_{|x|}^{+\infty} \Big(\frac{4|z|}{|z-1|}\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) - \frac{4y}{(1+y^2)^{\frac12}}\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(0,y)\Big) y\ dy$$

$$I_2 = \int\limits_{|x|}^{+\infty} \Big(\frac{y^2}{|z|^3|z-1|} - \frac{y^2}{y^3(1+y^2)^{\frac12}}\Big)\cos^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) y\ dy$$

$$I_3 = 2\int\limits_{|x|}^{+\infty} \Big(\frac{y}{|z(z-1)|}\sin\tilde\theta(x,y) - \frac{y}{y(1+y^2)^{\frac12}}\sin\tilde\theta(0,y)\Big) y\ dy$$

$$I_4 = \int\limits_{|x|}^{+\infty} \frac{x^2}{|z|^3|z-1|}\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) y\ dy$$

$$I_5 = 4\int\limits_{|x|}^{+\infty} \frac{x}{|z(z-1)|}\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) y\ dy.$$

Majoration de $|I_1|$: on a

$$|I_1| \le 4\int\limits_{|x|}^{+\infty} \Big|\frac{|z|}{|z-4|} - \frac{y}{(1+y^2)^{\frac12}}\Big|\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) y\ dy + 4\int\limits_{|x|}^{+\infty} \frac{y}{(1+y^2)^{\frac12}}\Big|\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y) - \sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(0,y)\Big| y\ dy.$$

Dans la première intégrale, on majore $\sin^2\frac{\tilde\theta}{2}(x,y)$ par $c\sin^2\tilde\theta(x,y)$ ($\sin\tilde\theta$ diffère de $\sin\frac{\tilde\theta}{2}$ par le facteur $\cos\frac{\tilde\theta}{2}$ qui reste minoré par $\frac{\sqrt2}{2}$ puisque $\tilde\theta \in \big[0,\frac{\pi}{2}\big]$); dans la deuxième, on majore l'intégrant en utilisant $(*)$ et on obtient, en posant $y = t|x|$:

$$|I_1| \le c|x|^3\int\limits_{1}^{+\infty} \Big|\frac{(1+t^2)^{\frac12}}{((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}} - \frac{t}{(1+t^2x^2)^{\frac12}}\Big| \cdot \frac{t^2}{(1+t^2)((x-1)^2+t^2x^2)} t\ dt + c|x|^3\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t^2(t^2|x|+1)}{(1+t^2x^2)^2(1+t^2)^{\frac12}\big[t^2|x|+1+t|x|(1+t^2)^{\frac12}\big]}\ dt.$$

Pour majorer la première intégrale nous écrivons:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+t^2)^{\frac12}}{((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}}-\frac{t}{(1+t^2x^2)^{\frac12}}\\
&\quad=\frac{(1+t^2)(1+t^2x^2)-t^2((x-1)^2+t^2x^2)}{((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}(1+t^2x^2)^{\frac12}\left[(1+t^2)^{\frac12}+t((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}\right]}\\
&\quad=\frac{2xt^2+1}{((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}(1+t^2x^2)^{\frac12}\left[(1+t^2)^{\frac12}(1+t^2x^2)^{\frac12}+t((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}\right]}
\end{aligned}$$

et remplaçons le dénominateur de cette expression par $t(1+t^2x^2)^{\frac32}$.

Pour majorer la deuxième intégrale nous remplaçons le dénominateur de l'intégrant par $t(1+t^2x^2)^2(t^2|x|+1)$.

On obtient ainsi:

$$|I_1|\le c|x|^3\int_1^{+\infty}\frac{t^2|x|+1}{(1+t^2x^2)^{\frac52}}\frac{t^2}{(1+t^2)}\,dt+c|x|^3\int_1^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)^2}\,dt$$

et en utilisant $(**)$ il vient:

$$|I_1|\le c|x|^3\Big(|x|\cdot O\big(\frac{1}{|x|^3}\big)+O\big(\frac{1}{|x|}\big)\Big)+c|x|^3O\big(\frac{1}{|x|^2}\big)\le c|x|.$$

Majoration de $|I_2|$: on a en majorant le cosinus par 1 et en posant $y=t|x|$

$$|I_2|\le|x|\int_1^{+\infty}\Big|\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac32}((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}}-\frac{1}{(1+t^2x^2)^{\frac12}}\Big|\,dt.$$

L'intégrant est égal à

$$\frac{t^6(1+t^2x^2)-(1+t^2)^3((x-1)^2+t^2x^2)}{(1+t^2)^{\frac32}((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}(1+t^2x^2)^{\frac12}\left[t^3(1+t^2x^2)^{\frac12}+(1+t^2)^{\frac32}((x-1)^2+t^2x^2)^{\frac12}\right]}\ .$$

Le numérateur est majoré par $c(t^6|x|+t^4)$, le dénominateur est minoré par $ct^6(1+t^2x^2)^{\frac32}$ et donc

$$I_2\le c|x|\Big(\int_1^{+\infty}\frac{|x|}{(1+t^2x^2)^{\frac32}}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\Big)\le c|x|.$$

Majoration de $|I_3|$: en remplaçant à nouveau $\sin\tilde{\theta}(x,y)$ par son expression puis en posant $y = t|x|$ on obtient:

$$\begin{aligned}
|I_3| &\le c|x|^2 \int_1^{+\infty} \Big| \frac{t^2}{(1+t^2)((x-1)^2+t^2x^2)} - \frac{1}{1+t^2x^2} \Big| t\ dt \\
&\le c|x|^2 \int_1^{+\infty} \frac{t^2|x|+1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)^2} t\ dt \\
&\le c|x|^2 \Big(\int_1^{+\infty} \frac{t|x|}{(1+t^2x^2)^2}\ dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)^2} \Big) \\
&\le c|x|^2 \Big(O\big(\frac{1}{|x|}\big) + O\big(|\operatorname{Ln}|x||\big) \Big) \le c|x|.
\end{aligned}$$

Majoration de $|I_4|$: on majore le sinus par 1 et on obtient

$$|I_4| \le c \int_1^{+\infty} \frac{x^4}{|x|^3(1+t^2)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x^2)^{\frac{1}{2}}} t\ dt \le c|x| \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \le c|x|.$$

Majoration de $|I_5|$: $\sin\dfrac{\tilde{\theta}}{2}(x,y)$ est à nouveau majoré par $c\sin\tilde{\theta}(x,y)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
|I_5| &\le c \int_{|x|}^{+\infty} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} y\ dy \\
&\le c \int_1^{+\infty} \frac{x^2t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}(1+t^2x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dt \\
&\le cx^2 O\big(\frac{1}{|x|}\big) \le c|x|.
\end{aligned}$$

Preuve de (ii):

$$\begin{aligned}
\int_{|x|}^{+\infty} \big(\psi(x,y) - \psi(0,y)\big) y\ dy = &\int_{|x|}^{+\infty} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2((x-1)^2+y^2)} y\ dy \\
&+ \int_{|x|}^{+\infty} \frac{1}{y(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \big(\cos^2\frac{\tilde{\theta}}{2}(x,y) - \cos^2\frac{\tilde{\theta}}{2}(0,y)\big) y\ dy.
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale on peut remplacer l'intégrant par $\dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2(1+y)^2}$ car

$$\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\Big(\frac{1}{(x-1)^2+y^2}-\frac{1}{1+y^2}\Big)=\frac{xy^3(1-(x-1)^2)}{(x^2+y^2)^2(1+y^2)((x-1)^2+y^2)}$$

et l'intégrale de la valeur absolue de cette dernière expression est majorée par

$$c\int_{|x|}^{+\infty}\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2(1+y^2)^2}\,dy\le c\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{t(1+t^2x^2)^2}\,dt\le c|x|.$$

Dans la deuxième intégrale on peut remplacer

$$\cos^2\frac{\theta}{2}(x,y)=\frac{1}{2}\Big(\frac{y^2+x(x-1)}{(x^2+y^2)^{\frac12}((x-1)^2+y^2)^{\frac12}}+1\Big)$$

par $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{y^2-x}{(x^2+y^2)^{\frac12}(1+y^2)^{\frac12}}+1\Big)$ car si on pose

$$\Delta=\frac{y^2+x(x-1)}{(x^2+y^2)^{\frac12}((x-1)^2+y^2)^{\frac12}}-\frac{y^2-x}{(x^2+y^2)^{\frac12}(1+y^2)^{\frac12}}$$

on obtient après réduction

$$\Delta=\frac{y^4(2x-x^2)+y^2(x^4-2x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac12}((x-1)^2+y^2)^{\frac12}(1+y^2)^{\frac12}\big[(y^2+x(x-1))(1+y^2)^{\frac12}+(y^2-x)((x-1)^2+y^2)^{\frac12}\big]}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{|x|}^{+\infty}\frac{1}{(1+y^2)^{\frac12}}|\Delta|\,dy&\le c\int_{|x|}^{+\infty}\frac{|x|y^4+x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac12}(1+y^2)^2y^2}\,dy\\&\le c\int_1^{+\infty}\frac{|x|^3t}{(1+t^2x^2)^2}\,dt+c\int_1^{+\infty}\frac{|x|^2}{t(1+t^2x^2)^2}\,dt\le c|x|.\end{aligned}$$

Autrement dit, (ii) est vérifié si, et seulement si:

$$\int_{|x|}^{+\infty}\Big(\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2(1+y^2)}+\frac12\frac{1}{1+y^2}\big(\frac{y^2-x}{(x^2+y^2)^{\frac12}}-y\big)\Big)\,dy\underset{x\to0^-}{\sim}\frac12|x|\operatorname{Ln}|x|.$$

Cette intégrale s'écrit en posant $y=t|x|$

$$\begin{aligned}
&|x|\int_1^{+\infty}\Big(\frac{-t^3}{(1+t^2)^2(1+t^2x^2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2x^2}\big(\frac{t^2|x|+1}{(1+t^2)^{\frac12}}-t|x|\big)\Big)\,dt\\
&\quad=|x|\int\limits_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)^{\frac12}}\Big(\frac12-\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac32}}\Big)\,dt\\
&\qquad\qquad+\frac{x^2}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2x^2}\Big(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac12}}-t\Big)\,dt\\
&\quad=-\frac12|x|\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)^{\frac12}}\,dt\\
&\qquad\qquad+|x|\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)^{\frac12}}\Big(1-\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac32}}\Big)\,dt\\
&\qquad\qquad+\frac{|x|^2}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2x^2}\Big(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac12}}-t\Big)\,dt\\
&\quad=-\frac12|x|\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t^2x^2)}\,dt+\frac12|x|\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2x^2)}\Big(\frac1t-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac12}}\Big)\,dt\\
&\qquad\qquad+|x|\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)^{\frac12}}\Big(1-\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac32}}\Big)\,dt\\
&\qquad\qquad+\frac{|x|^2}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2x^2}\Big(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac12}}-t\Big)\,dt.
\end{aligned}$$

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac1t-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac12}}&=O\big(\frac{1}{t^3}\big),\\
1-\frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac32}}&=O\big(\frac{1}{t^2}\big),\\
\frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac12}}-t&=O(1);
\end{aligned}$$

les trois dernières intégrales sont donc majorées par $c|x|$.

Finalement (ii) est vérifié si, et seulement si

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} |\operatorname{Ln}|x||.$$

Mais pour tout a non nul on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{Ln}(1+a^2)$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\operatorname{Ln}|x|;$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

References

[1] R. Banuelos and J. Brossard, *The area integral and its density for BMO and VMO functions*, Ark. Math. **31** (1993), 175-196.

[2] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey 1970.

[3] E. M. Stein, *Harmonic analysis : real-variable methodes, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton university Press, Princeton, New-Jersey 1993.

[4] A. Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, San Diego, Calif. 1986.

[5] S. Wang, *Some properties of Littlewood-Paley's g-function*, Sci. Sinica Ser. A **28** (1985), 252-262.

[6] S. Wang. *Boundness of the Littewood-Paley g-function on* $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(0<\alpha<1)$, Illinois Journal of Mathematics **33** (1989), 531-541.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 st martin d'hères Cedex (France)

E-mail address: sallaz@ujf-grenoble.fr