ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Volume 25, Number 2, 2000, pp. 137–144

PROPRIÉTÉS SPECTRALES LOCALES D'UNE MATRICE CARRÉE DES OPÉRATEURS

M. HOUIMDI ET H. ZGUITTI

Abstract. If X and Y are complex Banach spaces, then for $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ and $C \in \mathcal{L}(Y,X)$ we denote by M_C the operator defined on $X \oplus Y$ by

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

When B has $SVEP$, we show that $\sigma(M_C) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ for all $C \in \mathcal{L}(Y,X)$. And in the Hilbert space setting, this result gives a partial positive answer to the question 3 posed in [5].

1. Introduction

Dans toute la suite X et Y désignent deux espaces de Banach complexes. On note par $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(Y)$ et $\mathcal{L}(Y,X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur X, l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur Y et l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de Y dans X respectivement. Pour $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y,X)$, on note par M_C la matrice carrée des opérateurs définie sur $X \oplus Y$ par

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

En introduisant les techniques de la théorie spectrale locale, nous montrons que $\sigma(M_C) = \sigma(A) \bigcup \sigma(B)$ pour tout $C \in \mathcal{L}(Y,X)$ avec B satisfaisant la $SVEP$ (où $\sigma(.)$ désigne le spectre). Et dans le cas des espaces de Hilbert, c'est-à-dire X et Y sont deux espaces de Hilbert et $X \oplus Y$ est une somme hilbertienne, ce résultat donne une réponse partielle à la question 3 posée dans [5]. Ce résultat généralise le cas où A et B sont normaux [12]. Par suite, nous donnons une généralisation au Théorème 8 de [5], et enfin nous étudions la décomposabilité de M_C. Pour cela, commençons par un rappel sur la théorie spectrale locale.

Received September 29, 1998
1991 Mathematics Subject Classification. 47A10, 47B37.
Key words and phrases. Matrice carrée des opérateurs, spectre local, opérateur décomposable.

Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et soit $x \in X$. On note par $\rho_T(x)$ l'*ensemble résolvant local* de T en x i.e. $\lambda \in \rho_T(x)$ s'il existe une fonction $f : V_\lambda \longrightarrow X$ analytique sur un voisinage ouvert V_λ de λ telle que $(T-\mu)f(\mu) = x$, pour tout $\mu \in V_\lambda$. Le *spectre local* de T en x est $\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ [13]. Et on a $\sigma_s(T) = \bigcup\limits_{x \in X} \sigma_T(x)$, où $\sigma_s(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : (T-\lambda)(X) \neq X\big\}$ le *spectre de surjectivité* de T [10]. On dit que T satisfait la $SVEP$ s'il n'existe pas d'ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel l'équation $(T-\mu)f(\mu) = 0$ admet une solution analytique non nulle [4] et dans ce cas on a $\sigma(T) = \sigma_s(T)$ [10]. On rappelle que T satisfait *la propriété de Dunford* (C), si le *sous-espace spectral analytique* $X_T(F) = \big\{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\big\}$ est fermé pour toute partie F fermée de $\mathbb{C}$; et T satisfait la *condition de Bishop* (β), si pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ et pour toute suite de fonctions analytiques $f_n : U \longrightarrow X$, $(T-\mu)f_n(\mu)$ converge vers zéro dans $\theta(U, X)$ entraîne $f_n(\mu)$ converge aussi vers zéro dans $\theta(U, X)$, où $\theta(U, X)$ est l'espace de Fréchet des fonctions analytiques sur U à valeur dans X muni de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts dans U [3]. Signalons que la condition de Bishop (β) implique la propriété de Dunford (C) qui implique la $SVEP$ [8]. T est dit satisfait la *propriété de décomposition* (δ), si pour tout $x \in X$ et pour toute paire $\{V_1, V_2\}$ d'ouverts recouvrant $\mathbb{C}$, il existe $x_1, x_2 \in X$ tels que $x = x_1 + x_2$ avec $x_i = (T-\mu)f_i(\mu)$, $\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{V_i}$, où $f_i : \mathbb{C} \setminus \overline{V_i} \longrightarrow X$ est analytique pour $i = 1, 2$ [2]. Albrecht et Eschmeier [2] avaient montré que T est décomposable si et seulement s'il satisfait (β) et (δ), et que T satisfait (β) si et seulement si T^* satisfait (δ). On rappelle que T est *décomposable* si pour toute paire $\{U, V\}$ d'ouverts recouvrant $\mathbb{C}$, il existe Y, Z deux sous-espaces fermés de X invariants pour T tels que $X = Y + Z$, $\sigma(T|Y) \subseteq U$ et $\sigma(T|Z) \subseteq V$, [1]. Les opérateurs normaux, spectraux, algébriques, quasi-nilpotents et les opérateurs à spectre totalement discontinu sont des opérateurs décomposables [7]; les opérateurs hyponormaux satisfont la condition de Bishop (β) [11]. En particulier, toutes les classes d'opérateurs que nous venons de citer satisfont la $SVEP$. Pour plus de détails le lecteur peut consulter par exemple [2], [8] et [13].

2. Propriétés spectrales locales de M_C

Tous les choix de choix de la norme sur $X \oplus Y$ sont possible: soit $\|x \oplus y\| = \|x\| + \|y\|$, $\|x \oplus y\| = \max(\|x\| + \|y\|)$ ou $\|x \oplus y\| = \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)^{1/2}$. Mais dans la dernière paragraphe, le choix de la dernière norme est nécessare. Car on aura besoin du fait que $(X \oplus Y)' = X' \oplus Y'$, une chose qui n'est pas vérifiée par les deux autres normes.

Signalons donc que les résultats de cette section restent encore vrais lorsque X et Y sont deux espaces de Hilbert et $X \oplus Y$ est une somme hilbertienne.

Pour qu'on puisse caractériser le spectre de M_C lorsque B satisfait la $SVEP$, on va tout d'abord caractériser le spectre local de M_C en un point $x = y \oplus z$ dans $X \oplus Y$.

Lemme 2.1 [9] [Théorème de Leiterer]. *Soit $T : U \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ une fonctions opérateur analytique sur U, ouvert de $\mathbb{C}$, pour laquelle $T(\lambda) : X \longrightarrow Y$ est surjectif pour tout $\lambda \in U$. Alors pour toute fonction analytique $g : U \longrightarrow Y$, il existe une fonction analytique $f : U \longrightarrow X$ telle que $T(\lambda)f(\lambda) = g(\lambda)$, $\forall \lambda \in U$.*

Proposition 2.1. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$. Alors pour tout $x = y \oplus z \in X \oplus Y$,*

$$\sigma_{M_C}(x) \subseteq \sigma_s(A) \bigcup \sigma_B(z).$$

Preuve. Soit $\lambda \notin \sigma_s(A) \bigcup \sigma_B(z)$. Alors il existe V_1, V_2 deux voisinages ouverts de λ et une fonction analytique $f : V_1 \longrightarrow Y$ tels que $(T-\mu)f(\mu) = z$, $\forall \mu \in V_1$ et $V_2 \cap \sigma_s(A) = \emptyset$ (car le spectre de surjectivité est compact [10]). Posons $V = V_1 \cap V_2$, alors $(T - \mu)f(\mu) = z$, $\forall \mu \in V$. Comme $A - \mu$ est surjectif pour tout $\mu \in V$, donc d'après le théorème de Leiterer, il existe une fonction analytique $g : V \longrightarrow X$ satisfaisant $(A-\mu)g(\mu) = y - Cf(\mu)$, $\forall \mu \in V$. D'où $(M_C - \mu)(g(\mu) \oplus f(\mu)) = y \oplus z = x$, $\forall \mu \in V$. Et par suite $\lambda \notin \sigma_{M_C}(x)$. $\square$

Comme le spectre de surjectivité d'un opérateur est la réunion de tous les spectres locaux [10], le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Corollaire 2.1. *Pour $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, on a*

$$\sigma_s(M_C) \subseteq \sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B).$$

Remarques 2.1. i) Si $C = 0$ alors $\sigma_{M_0}(y \oplus z) = \sigma_A(y) \bigcup \sigma_B(z)$.

ii) $\sigma_B(z) \subseteq \sigma_{M_C}(y \oplus z)$, pour tout $y \in X$. En effet, soit $y \in X$ fixé et soit $\lambda \notin \sigma_{M_C}(y \oplus z)$, alors il existe un voisinage ouvert V_λ de λ et $h : V_\lambda \longrightarrow X \oplus Y$ une fonction analytique tels que $(M_C - \mu)h(\mu) = y \oplus z$ pour tout $\mu \in V_\lambda$. Or, $h = h_1 \oplus h_2$ avec $h_1 : V_\lambda \longrightarrow X$ et $h_2 : V_\lambda \longrightarrow Y$ analytiques. Donc

$$(B - \mu)h_2(\mu) = z\ , \quad \text{pour tout} \quad \mu \in V_\lambda.$$

D'où $\lambda \notin \sigma_B(z)$. Par conséquent, $\sigma_s(B) \subseteq \sigma_s(M_C)$.

iii) Il est facile à vérifier que $\sigma_p(M_C) \subseteq \sigma_p(A) \cup \sigma_p(B)$ ($\sigma_p(.)$ désigne le spectre ponctuel), donc d'après le Corollaire 2.1 on aura $\sigma(M_C) \subseteq \sigma(A) \cup \sigma(B)$.

Proposition 2.2. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$. Si B satisfait la SVEP alors pour tout $y \in X$, $\sigma_A(y) = \sigma_{M_C}(y \oplus 0)$.*

Preuve. Soit $\lambda \notin \sigma_{M_C}(y \oplus 0)$, alors il existe une fonction $h : V_\lambda \longrightarrow X \oplus Y$ analytique sur un voisinage ouvert V_λ de λ telle que $(M_C - \mu)h(\mu) = y \oplus 0$, $\forall \mu \in V_\lambda$. En décomposant $h = h_1 \oplus h_2$, comme dans la remarque précédente, on obtient

$$\begin{cases} (A-\mu)h_1(\mu) + Ch_2(\mu) = y, & \forall \mu \in V_\lambda \\ (B-\mu)h_2(\mu) = 0, & \forall \mu \in V_\lambda \end{cases}$$

Comme B satisfait la $SVEP$, alors $h_2 \equiv 0$ sur V_λ; par suite $(A-\mu)h_1(\mu) = y$, $\forall \mu \in V_\lambda$. D'où $\lambda \notin \sigma_A(y)$.

Inversement, supposons que $\lambda \notin \sigma_A(y)$. Alors, il existe $h : V_\lambda \longrightarrow X$ analytique telle que $(A-\mu)h(\mu) = y$, $\forall \mu \in V_\lambda$. D'où $(M_C - \mu)(h(\mu) \oplus 0) = y \oplus 0$, $\forall \mu \in V_\lambda$. $\square$

Corollaire 2.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$. Si B satisfait la SVEP, alors pour tout $C \in \mathcal{L}(Y, X)$,*

$$\sigma_s(M_C) = \sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B).$$

Preuve. D'après la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned} \sigma_s(A) = \bigcup_{y \in X} \sigma_A(y) &= \bigcup_{y \in X} \sigma_{M_C}(y \oplus 0) \\ &\subseteq \sigma_s(M_C), \end{aligned}$$

et de ii) de la remarque 2.1

$$\begin{aligned} \sigma_s(B) = \bigcup_{z \in Y} \sigma_B(z) &\subseteq \bigcup_{z \in Y} \sigma_{M_C}(0 \oplus z) \\ &\subseteq \sigma_s(M_C). \end{aligned}$$

Mais d'après le corollaire 2.1 on a toujours $\sigma_s(M_C) \subseteq \sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B)$, d'où le résultat. $\square$

Remarques 2.2. 1) L'inclusion $\sigma_s(M_C) \subseteq \sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B)$ peut être stricte. En effet, si $X = Y = l^2(\mathbb{N})$ et A est le shift unilatéral sans poids sur $l^2(\mathbb{N})$ défini par $Ae_n = e_{n+1}$, $\forall n \geq 0$ et $B = A^*$, alors on a $\sigma_s(A) = \{\lambda\,,\, |\lambda| \leq 1\}$ car A satisfait la $SVEP$ [8]. Si on prend $C = e_0 \otimes e_0$, où e_0 est le premier élément de la base canonique de $l^2(\mathbb{N})$; donc M_C est unitaire et par suite $\sigma_s(M_c) \subseteq \{\lambda\,,\, |\lambda| = 1\}$. D'où, $\sigma_s(M_C) \subset \sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B)$. Cet exemple est donné par Du Hong-Ke et Pan Jin [5] pour montrer que l'inclusion $\sigma(M_C) \subseteq \sigma(A) \cup \sigma(B)$ peut être stricte.

2) D'après la preuve de la proposition 2.2, $\sigma_{M_C}(y \oplus 0) \subseteq \sigma_A(y)$ pour tout y dans X sans aucune condition sur B. Mais si B ne satisfait pas la $SVEP$, l'égalité n'est pas toujours vraie. En reprenant l'exemple de 1), on a B ne satisfait pas la SVEP car $\sigma(B) \neq \sigma_s(B)$ et $\sigma_A(y) = \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ pour tout $y \in X$ non nul, [6]. Et donc $\sigma_{M_C}(y \oplus 0)$ est inclus strictement dans $\sigma_A(y)$ pour tout $y \in X$ non nul.

3) Aussi, l'inclusion $\sigma_{M_C}(y \oplus z) \subseteq \sigma_s(A) \bigcup \sigma_B(z)$ peut être stricte. On utilise le même exemple précédent.

Theorème 2.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et supposons que B satisfait la SVEP. Alors pour tout $C \in \mathcal{L}(Y, X)$,*

$$\sigma(M_C) = \sigma(A) \bigcup \sigma(B).$$

Preuve. Soit $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ fixé. Comme B satisfait la $SVEP$, alors d'après le corollaire 2.2 $\sigma_s(A) \bigcup \sigma_s(B) = \sigma_s(M_C)$. Donc, $\sigma_s(A) \bigcup \sigma(B) \subseteq \sigma(M_C)$. Par suite, $\sigma(A) \bigcup \sigma(B) \subseteq \sigma_p(A) \bigcup \sigma(M_C)$. Or, il est facile à voir que $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_p(M_C)$. D'où, $\sigma(A) \bigcup \sigma(B) \subseteq \sigma(M_C)$. Ce qui achève la preuve. $\square$

Notation. Pour $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, on note par G_D l'opérateur défini sur $X \oplus Y$ par

$$G_D = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix},$$

où $D \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Théorème 2.2. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ tels que $C \neq 0$. Alors, il existe un $x \in X$ non nul tel que pour tout $\lambda \in \rho_A(x)$ il existe un opérateur $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ de rang un pour lequel $\lambda \in \sigma_p(G_D)$.*

Preuve. $C \neq 0$, alors il existe un $z \in Y$ tel que $Cz = x \neq 0$. Soit $\lambda \in \rho_A(x)$, il existe donc un $x_\lambda \in X$ tel que $(A - \lambda)x_\lambda = x$. Pour ce x_λ il existe $\varphi \in X^*$ tel que $\varphi(x_\lambda) = \|x_\lambda\|$. Posons donc, $D = \dfrac{1}{\|x_\lambda\|}\varphi(.)(B-\lambda)z$. Alors, $(G_D - \lambda)(\,(-x_\lambda) \oplus z) = 0$. D'où, $\lambda \in \sigma_p(G_D)$. $\square$

Corollaire 2.3. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ tels que $C \neq 0$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_s(A)$ il existe un opérateur de rang un $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ pour lequel $\lambda \in \sigma_p(G_D)$.*

Preuve. $\sigma_s(A) = \bigcup\limits_{x \in X} \sigma_A(x)$, alors $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_s(A)$ entraîne que $\lambda \in \rho_A(x)$ pour tout $x \in X$. Et le théorème 2.2 affirme le résultat. $\square$

Le corollaire suivant est une généralisation du Théorème 8 de [5] aux espaces de Banach.

Corollaire 2.4. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ et $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $C \neq 0$. Alors, pour tout $\lambda \in \rho(A)$ il existe un opérateur de rang un $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ pour lequel $\lambda \in \sigma_p(G_D)$.*

3. La décomposabilité de M_C

Dans cette section nous donnerons des conditions suffisantes pour que M_C satisfait la $SVEP$ ou la propriété de Dunford (C). Nous étudierons aussi la décomposabilité de M_C, pour tout $C \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Proposition 3.1. *Supposons que $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ satisfont la $SVEP$. Alors pour tout $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, M_C satisfait aussi la $SVEP$.*

Preuve. Soit $h : U \longrightarrow X \oplus Y$ une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $(M_C - \mu)h(\mu) = 0$, $\forall \mu \in U$. Donc $(A - \mu)h_1(\mu) + Ch_2(\mu) = 0$ et $(B - \mu)h_2(\mu) = 0$, $\forall \mu \in U$ où $h = h_1 \oplus h_2$. Puisque B satisfait la $SVEP$, alors $h_2(\mu) = 0$ sur U. Par conséquent, $(A - \mu)h_1(\mu) = 0$ sur U et A satisfait la $SVEP$ entraîne que $h_1(\mu) = 0$ sur U. D'où M_C satisfait la $SVEP$. $\square$

Remarques 3.1. 1) Si M_C satisfait la $SVEP$ pour un certain $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors il est clair que A la satisfaite. Mais B ne la satisfaite pas forcément. Il suffit de reprendre l'exemple précédent. M_C est unitaire donc satisfait la $SVEP$ mais B ne la satisfaite pas.

2) Si A et B satisfont la $SVEP$, alors d'après le corollaire 2.2 on retrouve le résultat

$$\sigma(M_C) = \sigma(A) \bigcup \sigma(B), \quad \forall C \in \mathcal{L}(Y, X).$$

Proposition 3.2. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B \in \mathcal{L}(Y)$. Alors:*

i) *Si B satisfait la SVEP et M_{C_0} satisfait la propriété de Dunford (C) pour un certain $C_0 \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors A satisfait la propriété de Dunford (C).*

ii) *Si M_C satisfait la condition de Bishop (β) pour un certain $C \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors A la satisfera.*

Preuve. i) Soit F une partie fermée de $\mathbb{C}$ et soit $\big(z_n\big)_n$ une suite d'éléments de $X_A(F)$ qui converge vers $z \in X$. Donc $\sigma_A(z_n) = \sigma_{M_C}(z_n \oplus 0) \subseteq F$, d'après la proposition 2.2. Comme M_C satisfait la propriété (C), on a donc $\sigma_{M_C}(z \oplus 0) \subseteq F$. Or, $\sigma_A(z) = \sigma_{M_C}(z \oplus 0)$, d'où $z \in X_A(F)$.

ii) Soit $f_n : U \longrightarrow X$ une suite de fonctions analytiques sur U un ouvert de $\mathbb{C}$ telle que $(A-\mu)f_n(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact dans U. Alors $(M_C - \mu)(f_n(\mu) \oplus 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact dans U. Et comme M_C satisfait (β), par hypothèse, alors $(f_n(\mu) \oplus 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur tout compact dans U. D'où A satisfait (β). $\square$

Remarques 3.2. On a

$$M_C^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ C^* & B^* \end{pmatrix},$$

donc si M_C satisfait (δ), alors [2] M_C^* satisfait la condition de Bishop (β) et d'après la preuve de la proposition 3.2, B satisfait aussi (δ). Par suite, si M_C est décomposable pour un certain $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ alors A satisfait (β) et B satisfait (δ). En reprenant l'exemple précédent, on remarque que A et B ne sont pas forcément décomposables.

Proposition 3.3. *Si $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B \in \mathcal{L}(Y)$ sont décomposables, alors M_C est décomposable pour tout $C \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Preuve. Soit $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ fixé. Comme un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est décomposable si, et seulement si T et T^* satisfont (β) [2], alors d'après la remarque 3.2 il suffit de montrer que si A et B satisfont (β) alors M_C la satisfaite. Supposons donc que A et B satisfont (β). Soit $h_n : U \longrightarrow X \oplus Y$ une suite de fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $(M_C - \mu)h_n(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\theta(U, X \oplus Y)$. Posons $h_n(\mu) = h_{1,n}(\mu) \oplus h_{2,n}(\mu) \in X \oplus Y$. Donc $((A-\mu)h_{1,n}(\mu) + Ch_{2,n}(\mu)) \oplus (B-\mu)h_{2,n}(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\theta(U, X \oplus Y)$, par suite $(B-\mu)h_{2,n}(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\theta(U, Y)$. Comme B satisfait (β), alors $h_{2,n}(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\theta(U, Y)$ et par conséquent $Ch_{2,n}(\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

dans $\theta(U,X)$. Or, $(A-\mu)h_{1,n}(\mu)+Ch_{2,n}(\mu)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ dans $\theta(U,X)$, donc $(A-\mu)h_{1,n}(\mu)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ dans $\theta(U,X)$. Et d'après l'hypothèse sur A on a $h_{1,n}(\mu)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ dans $\theta(U,X)$. D'où la décomposabilité de M_C. $\square$

References

1. E. Albrecht, *On decomposable operators*, Integr. Equat. Oper. Th. **2** (1979), 1-10.
2. E. Albrecht and J. Eschmeier, *Analytic functional models and local spectral theory*, submitted for publication. University of Saarbrücken 1992.
3. E. Bishop, *A duality theorem for an arbitrary operator*, Pacific J. Math. **9** (1959), 379-397.
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators*, Part III, Wiley, New York, 1971.
5. Du Hong-Ke and Pan Jin, *Perturbation of spectrums of 2×2 operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 761-766.
6. K. B. Laursen, V. G. Miller and M. M. Neumann, *Local spectral properties of commutators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (1995).
7. K. B. Laursen and M. M. Neumann, *Decomposable operators and automatic continuity*, J. Oper. Th. **15** (1986), 33-51.
8. K. B. Laursen and M. M. Neumann, *Asymptotic intertwining and spectral inclusions on Banach spaces*, Czech. Math. J. **43** (118) (1993), 483-497.
9. K. B. Laursen and M. M. Neumann, *On analytic solutions of the equation* $(T-\lambda)f(\lambda)=x$, LEU Seminar notes in Funct. Anal. & PDEs 1993-94, pp. 256-265.
10. K. B. Laursen and P. Vrbová, *Some remarks on the surjectivity spectrum of linear operators*, Czech. Math. J. **39** (114) (1989), 730-739.
11. M. Putinar, *Hyponormal operators are subscalar*, J. Oper. Th. **12** (1984), 385-395.
12. A. Schweinsberg, *Similarity orbits and the range of the generalized derivation* $X\to MX-XN$, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 201-211.
13. F.-H. Vasilescu, *Analytic Functional Calculus and Spectral Decompositions*, Editura Academiei and D. Reidel Publishing Company, Bucharest and Dordrecht, 1982.

Département de Mathématiques,
Faculté des sciences semlalia
BP : S15 Marrakech 40000 Maroc